金融学前沿译丛

INVESTMENT SCIENCE

投资科学

戴维·G·卢恩伯格 David G. Luenberger/著
沈丽萍 文忠桥/译
文忠桥/校

中国人民大学出版社

金融学前沿译丛

INVESTMENT SCIENCE

投资科学

戴维·G·卢恩伯格 David G. Luenberger/著
沈丽萍 文忠桥/译
文忠桥/校

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

投资科学/（ ）卢恩伯格著；沈丽萍，文忠桥译.
北京：中国人民大学出版社，2005
（金融学前沿译丛）
ISBN 7-300-06320-9

Ⅰ. 投…
Ⅱ. ①卢…②沈…③文…
Ⅲ. 投资学
Ⅳ. F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 015825 号

金融学前沿译丛
投资科学
戴维·G·卢恩伯格 著
沈丽萍
文忠桥 译
文忠桥 校

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242（总编室）	010－62511239（出版部）	
	010－82501766（邮购部）	010－62514148（门市部）	
	010－62515195（发行公司）	010－62515275（盗版举报）	
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　销	新华书店		
印　刷	河北涿州星河印刷有限公司		
开　本	720×965 毫米 1/16	版　次	2005 年 3 月第 1 版
印　张	42 插页 2	印　次	2005 年 3 月第 1 次印刷
字　数	589 000	定　价	55.00 元

版权所有　侵权必究　　印装差错　负责调换

内容提要

斯坦福大学知名教授卢恩伯格所著的《投资科学》分别与兹维·博迪等人和威廉·夏普等人所著的《投资学》一样，是国内外读者非常喜欢的投资学教材。

与后两本书相比，本书的主要特点在于：其内容凸现了期权和期货等衍生证券的基本理论在教材中的重要地位。更难能可贵的是，本书自始至终用众多实例和图形论述各种金融问题，既形象直观又通俗易懂。本书特别突出资产定价理论的数值计算方法，如二项式网格方法，这是一般投资学教材所忽视的。通过各种各样丰富多彩的例子研究了实物期权等更一般的投资问题，这是本书的又一亮点，因为实物期权是当前金融领域的研究热点之一。同时，本书还系统地论述了对数最优策略在资产定价和投资组合决策等领域中的重要作用。

全书共分四部分，16章。其中第一部分论述确定性现金流，第二部分论述单期随机现金流，第三部分论述期权和期货等衍生证券理论，第四部分论述一般现金流问题。

本书可作为我国高等学校经济、管理类专业课程"投资学"的教材和参考书，也可作为广大经济金融从业人员学习现代投资学基础理论和方法的合适的辅导书。

作者简介

卢恩伯格教授于1963年毕业于斯坦福大学并获得博士学位，现为斯坦福大学管理科学与工程学院教授。他还是经济计量学会、经济动态与控制学会、经济理论推广协会的会员。他已经出版的主要著作有：《动态系统导论：理论、模型与应用》(Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications)、《线性与非线性规划导论》(Introduction to Linear and Nonlinear Programming)、《投资科学》(Investment Science)、《线性与非线性规划》(Linear and Nonlinear Programming)、《微观经济学理论》(Microeconomic Theory)、《优化的向量空间方法》(Optimization by Vector Space Methods)、《投资科学解题手册》(Solutions Manual for Investment Science)等。此外，他还为西屋公司、斯坦福研究院、系统控制公司、优化技术公司和花旗集团提供咨询服务。1971－1972年曾担任总统科技顾问的技术助手。他的主要研究领域为控制理论、一般优化理论、数学规划和微观经济学。他是斯坦福大学工程经济系统系最初的创始人之一，并于1980－1991年担任该系系主任。他公开发表了70余篇有关系统科学、优化理论、经济学和投资学的论文。

“金融学前沿译丛”总序

无论是对研究者还是对实践者，金融领域都是一处最值得冒险的乐园。诺贝尔经济学奖不断眷顾着这个领域的佼佼者；政府、企业和居民都已经认识到，金融系统构成了整个经济体系的心脏。穷国的百姓们逐渐接受着超出传统的储蓄思维以外的投资知识，股票、债券不再是发达资本主义国家的专利，跟随经济全球化的步伐，不发达国家的居民开始和发达国家的居民一同选择明星公司的金融产品，并成为这些公司的所有者。不过，金融产品的复杂性和金融市场固

有的投机性并不仅仅带来刺激，当自己的财富在较短时间内像水蒸气一样蒸发时，金融就仿佛和撒旦紧密结合在一起了。直到今天人们还在议论着密西西比事件、郁金香事件、南海泡沫等，20 世纪 30 年代的大危机更是很多人心头挥之不去的阴影。

如果在这样一个世界里，各种金融产品的收益可以通过概率估计出来，同时，通过历史数据的收集和处理，可以推断一种金融产品的收益方差和标准差，那么投资者就可以通过精确的数学工具来计算满足自己要求的投资组合，实现同等风险下的收益最大化或同等收益下的风险最小化。果真如此，投资者就可以在不确定的世界里从事类似确定条件下的决策，这样，就可以避免金融市场上的泡沫和金融系统的危机。20 世纪 50 年代，一些代表性的学者从理论上和经验实证上分别注意到了投资者理性决策的重要性。首先，阿罗（Arrow）通过对保险和风险的研究，特别是通过对一般均衡框架中或有证券的研究发现：只要针对未来的每一种潜在的可能性设计出相应的应对条款，那么就能构造出一种“阿罗证券”来确保总体经济的一般均衡。不过，阿罗也注意到，投资者理性决策依赖一定的信息条件，如果该条件得不到满足，金融产品的合同安排就可能不完全，比如，在保险业会出现“道德风险”问题。这些观点对后来的金融理论的发展产生了巨大影响。

其次，哈里·马克威茨（H. Markowitz）在 20 世纪 50 年代借助于统计技术发展出了均值方差模型，并被广泛应用于实际的资产组合决策。马克威茨的思路可以追溯到伯努里（Bernoulli，1738）和费雪（Fisher，1930）等人，前者考察了概率与博彩问题，也就是不确定条件下的决策，后者考察了利息理论。这些早期的理论为后来的金融产品估价技术及金融工程学科的开拓打下了坚实的基础。不过，正是马克威茨第一次系统地用数理统计的语言描述了金融市场上投资者的可能行为。尽管当时他的研究并没有成为金融经济学的模型基础，但在华尔街却广为流行，成为众多投资者投资决策的技术依据。

最后，莫迪利亚尼（Modigliani）和米勒（Miller）也在 20 世纪 50 年

代开始关注金融市场上的证券供给问题，他们采取了标准的微观经济学的均衡分析方法，在假定金融市场完全竞争的前提下，试图通过公司的融资成本—收益决策来推导出证券供给曲线，不过，现在人们已经很少关心这个目的，主要原因是他们的结论因为“MM 定理”闻名于世，其背后的证券供给曲线反而被忽视了。MM 定理说明：在给定若干假定条件下，公司的资本结构选择并不能给公司创造价值。这一结论奠定了现代公司金融理论的框架，因为该定理为复杂的公司金融活动分析创造了一个基本构架，相当于经济学中完全竞争市场的作用。

继承前面诸人的成果，夏普（Sharpe）、林特纳（Lintner）等人于 20 世纪 60 年代在马克威茨工作的基础上发展出了资本资产定价模型，罗斯（Ross）等人又进一步发展出了套利定价模型，奠定了研究资本市场价格的理论框架。法马（Fama）等人在 20 世纪 70 年代提出了有效资本市场假说，并给出了金融市场价格运动规律的经验实证研究思路。布莱克（Black）、斯科尔斯（Scholes）和莫顿（Merton）等人于 20 世纪 70 年代在 MM 定理和资本资产定价模型的基础上发展出了金融产品的定价模型，并被广泛应用于实务，从而导致了金融产品的大量创新。

另一方面，阿罗早期的研究重新受到重视，20 世纪 70～80 年代，大量的博弈论和信息经济学模型被用于分析金融市场，如罗斯（S. Ross）、格罗斯曼（S. Grossman）、普雷思克特（E. Prescott）、斯蒂格利茨（J. Stiglitz）、利兰（H. Leland）、布雷纳（M. Brennan）、杰森（M. Jensen）、哈特（O. Hart）、哈里森（M. Harrison）、克瑞普斯（D. Kreps）、布哈塔期瑞（S. Bhattacherya）等人。这些学者把金融产品看作是契约，如果当事人的信息不对称，就可能导致契约的不完全，从而出现逆向选择和道德风险问题，此即金融市场资源配置的低效率。如果要提高资源配置效率，就必须采取有效的治理机制、恰当的证券设计及充分的信息披露，而这些正成为金融系统中日益重要的制度架构。

经过近 40 年的开拓，现代金融理论才真正成型，它不仅形成了以契约

为基础的金融经济学，而且在公司和各种金融中介的金融活动、金融市场的价格运动、市场微观结构、金融系统的演变及金融监管等诸多方面都有专门的理论，从而构成了一个较完善的理论体系和研究方法体系。

不过，随着金融产品的多元化和金融系统的复杂化，学者们逐步发现，20 世纪 80 年代以前的金融理论仅仅考虑定价、套利、均衡、合同等问题，这是不够的。比如，有效资本市场假说的核心是完美套利，但现实世界中套利是不完美的，这就预示着作为理论基础的完全资本市场假定缺乏理论预见力；资本资产定价模型、代理理论模型等虽然比较精致，但缺乏足够的数据支持；以现值为基础的证券估价模型缺乏理论意义，扩展到不确定条件和多个时期也是如此；当事人的风险偏好假定不现实，越来越多的实验经济学研究结果证明了这一点；股权溢价之谜、市场效率异常等得不到合理解释，期限结构、波动理论等也是如此；金融市场的制度基础没有得到充分的重视，制度如何影响价格还不清楚等等。

正因为过去的理论有诸多局限，从 20 世纪 80 年代开始，金融学家进行了广泛的新探索，这一探索分两条线索展开：一方面，在过去的金融理论模型中嵌入制度等因素，着重研究金融契约的性质和边界、金融契约选择与产品设计、金融契约的治理与金融系统演化、法律和习俗等制度因素对金融活动的影响等。另一方面，一些金融学家基于卡尼曼（D. Kahneman）等人发展的非线性效用理论，开始引入心理学关于人的行为的一些观点，来解释金融产品交易的异常现象，比如有限套利、噪音交易、从众心理、泡沫等，这些理论形成了现代金融理论中的行为学派，又称为“行为金融”。

从目前的理论发展看，两条线索互相竞争，互相促进，共同发展，基于信息不完全、不对称和一般均衡理论的模型在解释金融市场异常方面有明显不足；但行为金融还不能有效地应用于金融产品定价，并且现有理论模型本身缺乏更广泛的经验证据支持。双方正处于争论阶段，构成现代金融理论发展过程的主旋律。

很明显，现代金融理论从 20 世纪 50 年代开始逐步摆脱了过去那种纯货

币理论的状态，确立了资产定价在金融学中的核心地位，如同一般均衡理论在经济学中的地位一样，它像一顶皇冠，吸引着无数的追求者。所谓现代金融理论其实就是用标准的主流经济学的原理和方法精确刻画金融活动的产物。而20世纪80年代以后，经过经济学家的不懈努力，金融产品和金融系统的复杂性日益受到关注，金融理论开始走出资产定价技术这一狭窄范畴，越来越多的人开始从金融活动参与者的行为本身来解释纷繁复杂的金融现象。行为的多元化导致金融产品和金融系统的多元化，也导致金融理论的多元化。现代金融理论的核心从资产定价转向参与者行为，这可以看作是向经济学本来面目的复归。

当现代金融理论日新月异的时候，国内的金融学研究尚处于启蒙阶段，几个明显的特征可以支持这一判断：首先，从教学上看，货币银行学仍是金融专业最核心的课程，而且还是经济类专业的基础课程，如果按照课程体系的逻辑去理解，这有点本末倒置、不伦不类。从国际化角度看，金融工程学开始试点，但很多人仅仅把金融工程学理解为纯技术的科学，忽视了它背后的经济学理论，这种把金融学等同于数学的看法实际上是对现代金融理论新发展的片面理解。其次，从研究层次看，对国外研究成果模仿者居多，对现存问题描述性讨论较多，缺乏自身对现象背后的内在逻辑的理解。实际上，金融问题和任何经济问题一样，都有其社会制度背景，如果忽略这种背景知识，盲目地和国际接轨，只能给人以隔靴搔痒的感觉。最后，从出版物看，金融读物的出版可能是经济类读物的出版中最繁荣的一块，但这些金融读物大多是对金融现象的描述分析，缺乏强有力的理论逻辑和科学的研究方法。国内著作的现状与国外译著引进的落后局面有关。迄今为止，很多出版社相继推出了各种金融学名著译丛，但所选名著大多代表20世纪80年代前的理论成果，并且这些著作大多是针对本科生的教科书，对于最新的理论名著和探索性的著作则介绍得很少。

金融活动没有国界，但对金融活动的理解一定是有文化和制度内涵的。中国的金融市场要得以繁荣，仅仅依靠一些缺乏理论和经验证据的政策辨论

是毫无意义的，并且还可能误导决策者和普通投资者。如果要形成正确的金融活动决策，就需要掌握科学的研究方法，这就要求中国的学者必须对国外研究成果有较全面的掌握，而不能各取所需，一叶障目。也只有全面了解现代金融理论前沿的进展情况，才能真正实现学者之教书育人和传播知识的功能。正是对中国金融研究现状的担忧，使得我们下决心把国外一些最新的研究成果介绍进来，一方面能够使国内的研究者，特别是青年研究者较全面地了解现代金融学的进展；另一方面，也可借此机会和众多同仁切磋心得，共同提高国内的金融研究水平。

基于以上的想法，中国人民大学经济学院西方经济学教研室、北京奥尔多投资研究中心和中国人民大学出版社共同组织翻译了这套“金融学前沿译丛”。这套译丛不仅包括《不确定条件下的投资》、《资产定价》这类纯技术著作，也包括比较制度分析在金融领域中的运用，如《比较金融系统》；还包括最新的行为金融著作《并非有效的市场——行为金融学导论》。同时，我们也关注到金融中的传统课题——货币，不过新的研究更加重视政治对货币政策和经济周期的影响，所以我们选译了《货币制度理论》。这些译著中，有些未必是经典著作，但它们至少能够从研究层次上拓宽我们的视野，比如《金融创新》一书，该书运用熊彼特（Schumpeter）的理论系统研究了金融创新活动，这也是迄今理论界对金融创新活动的一个较好的理论解释。当然，我们将继续从国外现有的研究成果中遴选出比较独到的作品呈献给读者，也希望得到同仁们更多的批评指正。

执行主编　周业安　唐寿宁　马学亮

2003年4月

前　言

投资方面的理论目前受到那些极具聪明才智的人们的关注——一方面是由于在金融理论方面有非常大的发展，另一方面是因为信息和电脑技术爆炸式的增长，还有一方面是因为投资活动的全球性扩张。投资学理论最近的这些新发展正在进人大学课堂，进人金融服务机构，进人商业企业，并且正在被很多私人投资者所意识到。本书旨在成为传播过程中的一种工具。

本书致力于强调基本原则，并且说明如何掌握这些基本原则并转化为现实投资问题

的完备和实际的解决方案。本书的组织结构反映了这种方法：从前到后的章节所覆盖到的内容是从简单的概念逐步深入到更加高深的内容。本书用最多的篇幅研究一些特殊的金融产品和投资问题，是为了让它们沿着本书的概念进度的线索进展下去，对它们的分析不仅用来说明概念，同时也用来描述投资环境的某些特征。

本书是为那些有与工程、数学或理科的本科教育大致相同的专业知识背景的个人，或者对基础数学很了解的个人而设计的。投资学的语言大部分是数学的，这个学科的某些方面只能以数学术语的方式来表述。然而，本书里用到的数学并不复杂——例如，只需要微积分里最基本的部分——但是读者必须要适应把数学作为推导和解决问题的方法。这样的读者才能够利用他们的专业知识背景来加快和深入学习。

实际上，本书能够从几个层次上去阅读，不同的层次要求不同的数学知识，包括不同的学习范围。对于这些不同层次的最简单的说明就在于本书的编码排版方式。有的部分或者小标题，其后面标有星号（*），比如，“2.6 应用和扩展*”，星号就表明这部分是特殊的，其内容可能有点偏，或者比本书其他部分对数学要求更高，在第一次阅读的时候这些部分可以略过去。这种编排方法仅仅是一个大概，教材解释了每个部分开头的内容并且指导读者如何继续读下去。

每章后面的练习是教材的重点，读者应该尝试一下把每章的练习都做几个。这些练习也是编了号码的：做了◇记号的是比一般的练习在数学上难度更大的；作了⊕记号的要求用数值计算方法（通常要用一个表格软件程序）。

本书很大程度上受电脑表格软件包的影响，几乎投资学的所有基本思想——比如现值、资产组合免疫、现金匹配、项目最优化、因素模型、二项式网格风险中性定价和模拟——都能很容易地用表格软件包来说明。因此，就可以在那些从概念上的内容看达到最新技术发展水平的章节中给出各种例子。更进一步说，学生能够用现成的软件系统地说明和解决现实的和富有挑战性的投资问题。通过使学生全面了解问题的所有方面，这个过程加深了他

们的理解。很多学了这门课的学生都说，完成课程的各个项目（特别是标了㊉记号的练习题里面难度很大的那部分）使他们学得更好。

在写作本书的过程中有很大的乐趣，在某种程度上是因为我从我的同事和学生那里得到了很多的鼓励和帮助。特别要由衷地感谢 Graydon Barz，Kian Esteghamat，Charles Feinstein，Marius Holtan，Blake Johnson，Robert Maxfield，Paul McEntire，James Smith，Lucie Tepla，and Lauren Wang，他们都阅读了不断改进的文稿的相当大的部分，并提出了修改建议。几位同仁的真知灼见使本书的最后这一版本改进不少，他们是：波士顿大学的 Joseph Cherian，田纳西大学的 Phillip Daves，斯特拉克莱德大学的 Jaime Cuevas Dermody，多伦多大学的 Myron Gordon，英属哥伦比亚大学的 Robert Heinkel，威斯康星大学的 James Hodder，多伦多大学的 Raymond Kan，亚利桑那大学的 Chris Lamoureux，卡内基·梅隆大学的 Duane Seppi，多
[illegible]感谢她的鼓励和对我长时间的文字处理的理解。最后，我要衷心地感谢很多热情的学生，他们课堂上的问题，以及练习和课外活动的辛勤劳动，为初稿的成形提供了宝贵的信息反馈。

目　录

第1章　引言 …… 1

1.1　现金流 …… 2

1.2　投资和市场 …… 4

1.3　典型的投资问题 …… 8

1.4　本书的结构 …… 11

第一部分　确定性的现金流

第2章　利息基础理论 …… 17

2.1　本金和利息 …… 17

2.2 现值 …… 24
2.3 现金流的现值和终值 …… 25
2.4 内部收益率 …… 29
2.5 评估准则 …… 32
2.6 应用和扩展* …… 35
2.7 小结 …… 43
练习 …… 44
参考文献 …… 49

第3章 固定收益证券 …… 50

3.1 未来现金流的市场 …… 51
3.2 价值公式 …… 56
3.3 债券的详细介绍 …… 62
3.4 收益率 …… 66
3.5 久期 …… 72
3.6 免疫 …… 80
3.7 凸度* …… 84
3.8 小结 …… 85
练习 …… 87
参考文献 …… 91

第4章 利率期限结构 …… 93

4.1 收益率曲线 …… 93
4.2 期限结构 …… 95
4.3 远期利率 …… 100
4.4 对利率期限结构的几种解释 …… 104
4.5 期望动态 …… 107

4.6 连续现值 …… 113
4.7 浮动利率债券 …… 116
4.8 久期 …… 117
4.9 免疫 …… 121
4.10 小结 …… 123
练习 …… 125
参考文献 …… 130

第5章 应用利率分析 …… 132

5.1 资本预算 …… 133
5.2 最优资产组合 …… 140
5.3 动态现金流过程 …… 143
5.4 最优化管理 …… 148
5.5 一致性定理* …… 157
5.6 公司的估值* …… 161
5.7 小结 …… 166
练习 …… 168
参考文献 …… 173

第二部分 单期随机现金流

第6章 均值—方差资产组合理论 …… 177

6.1 资产收益 …… 178
6.2 随机变量 …… 182
6.3 随机收益 …… 189
6.4 投资组合均值和方差 …… 194

6.5 可行集合 …… 200
6.6 马克维茨模型 …… 204
6.7 两基金定理* …… 209
6.8 包含无风险资产的投资组合 …… 212
6.9 单基金定理 …… 214
6.10 小结 …… 217
练习 …… 218
参考文献 …… 221

第7章 资本资产定价模型 …… 223

7.1 市场均衡 …… 224
7.2 资本市场线 …… 226
7.3 定价模型 …… 228
7.4 证券市场线 …… 234
7.5 投资含义 …… 236
7.6 绩效评估 …… 238
7.7 作为定价公式的资本资产定价模型 …… 241
7.8 项目选择* …… 245
7.9 小结 …… 248
练习 …… 249
参考文献 …… 253

第8章 模型和数据 …… 255

8.1 引言 …… 255
8.2 因素模型 …… 256
8.3 作为因素模型的资本资产定价模型 …… 265
8.4 套利定价理论* …… 268
8.5 数据和统计 …… 273

8.6 其他参数的估计 …… 280
8.7 偏离均衡* …… 281
8.8 多期谬论 …… 285
8.9 小结 …… 287
练习 …… 289
参考文献 …… 293

第9章 一般原理 …… 295

9.1 引言 …… 295
9.2 效用函数 …… 296
9.3 风险厌恶 …… 299
9.4 效用函数评述 …… 304
9.5 效用函数与均值—方差准则* …… 310
9.6 线性定价 …… 312
9.7 投资组合选择 …… 314
9.8 对数最优定价* …… 319
9.9 有限状态模型 …… 322
9.10 风险中性定价 …… 326
9.11 定价方法的选择* …… 328
9.12 小结 …… 330
练习 …… 333
参考文献 …… 337

第三部分 衍生证券

第10章 远期、期货和互换 …… 341

10.1 引言 …… 341

10.2　远期合约 343
10.3　远期价格 345
10.4　远期合约的价值 353
10.5　互换* 354
10.6　期货合约基础 357
10.7　期货价格 360
10.8　与预期现货价格的关系* 364
10.9　完全套期 365
10.10　最小方差套期 366
10.11　最优套期* 370
10.12　非线性风险套期* 372
10.13　小结 377
练习 378
参考文献 383

第 11 章　资产动态模型 384

11.1　二项式网格模型 385
11.2　可加模型 388
11.3　倍数模型 390
11.4　典型参数值* 393
11.5　对数正态随机变量 394
11.6　随机游走和维纳过程 395
11.7　股票价格过程 399
11.8　伊藤引理* 404
11.9　再论二项式网格模型 406
11.10　小结 408
练习 409

参考文献 …… 412

第 12 章 期权基础理论 …… 413

12.1 期权概念 …… 415
12.2 期权价值的实质 …… 417
12.3 期权组合和看涨 看跌平价 …… 421
12.4 提前执行 …… 423
12.5 单期二项式期权理论 …… 424
12.6 多期期权 …… 428
12.7 更一般的二项式问题 …… 431
12.8 评估实际投资机会 …… 436
12.9 一般的风险中性定价* …… 446
12.10 小结 …… 447
练习 …… 449
参考文献 …… 453

第 13 章 其他期权问题 …… 455

13.1 引言 …… 455
13.2 布莱克-斯科尔斯（Black-Scholes）方程 …… 456
13.3 看涨期权公式 …… 460
13.4 风险中性定价* …… 462
13.5 得尔塔 …… 464
13.6 复制、综合期权和组合保险* …… 466
13.7 计算方法 …… 470
13.8 特异性期权 …… 477
13.9 储存成本和股息* …… 481
13.10 鞅定价* …… 483

13.11 小结 …… 485
附录：布莱克-斯科尔斯方程的另一种推导 …… 487
练习 …… 489
参考文献 …… 494

第 14 章 利率衍生证券 …… 496

14.1 利率衍生证券的例子 …… 497
14.2 理论需要 …… 499
14.3 二项式方法 …… 500
14.4 定价的应用 …… 505
14.5 校准和可调整利率贷款★ …… 509
14.6 前推方程 …… 514
14.7 匹配期限结构 …… 517
14.8 免疫 …… 520
14.9 担保抵押债券★ …… 523
14.10 利率动态模型★ …… 528
14.11 连续时间解★ …… 530
14.12 小结 …… 532
练习 …… 534
参考文献 …… 537

第四部分 一般现金流

第 15 章 最优组合增长 …… 541

15.1 投资轮盘 …… 542
15.2 增长的对数效用方法 …… 544
15.3 对数—最优策略的性质★ …… 551

15.4 替代方法★ …… 552
15.5 连续时间增长 …… 555
15.6 可行区域 …… 558
15.7 对数最优定价公式★ …… 564
15.8 对数最优定价和布莱克-斯科尔斯方程★ …… 569
15.9 小结 …… 570
练习 …… 572
参考文献 …… 575

第 16 章 一般投资评估 …… 577

16.1 多期证券 …… 577
16.2 风险中性定价 …… 581
16.3 最优定价 …… 583
16.4 双网格 …… 588
16.5 双网格定价 …… 590
16.6 具有个体不确定性的投资 …… 595
16.7 买入价格分析 …… 602
16.8 连续时间定价★ …… 609
16.9 小结 …… 613
练习 …… 614
参考文献 …… 617

附录 A 概率基础理论 …… 619

A.1 一般概念 …… 619
A.2 正态分布随机变量 …… 621
A.3 对数正态随机变量 …… 623

附录 B　微积分和最优化 …… 624

B. 1　函数 …… 624

B. 2　微积分 …… 626

B. 3　最优化 …… 627

第1章 引 言

从传统意义上讲，投资是指目前投入资源以期将来得到收益。如果资源和收益采取货币的形式，那么投资就是现在投入货币以期将来获得（有希望获得更多）货币。在有些情况下，比如购买银行存单，那么就会精确地得知以后要得到的货币数额。然而，大多数情况下，将来要得到的货币数额是不确定的。 1

有一个关于投资的更为宽泛的观点，这个观点是基于某一个时间跨度中费用和收入流量的。从这个观点去理解，投资的目的就

是要制定这些时间跨度中的流量形式，使它们尽可能地合意。当花费和收入是以现金来表示的时候，任何时候的净收入都称为**现金流**（**cash flow**），跨越几个时期的一系列流入就称为**现金流序列**（**cash flow stream**）。投资的目的就是要制定这些现金流序列，使它们比其他情况下更加合意。例如，通过贷款，就有可能把下个月的一笔大的负现金流变换成跨越几个月的一系列小额的负现金流，并且这种现金流序列的替换方式有可能比原先那种更受欢迎。未来现金流常常有某种程度上的不确定性，现金流序列的设计或者修改，可能和控制这个不确定性有关，也许还与降低风险水平有关。这个投资的更为宽泛的定义——调整现金流的模式——涵盖了比传统观点更加完备的对金融活动的分类。正是这个更加宽泛的解释引出了本书的面世。

投资学（**investment science**）就是把科学工具运用于投资。这里所用的科学工具主要是数学上的，但理解本书所讨论的基本概念只要求中等水平的数学功底。本书的目的是体现投资学的基本原理，同时，还致力于让读者理解如何把这些基本原理运用于实际进行计算以作出合适的投资决策。

投资还是有技巧可言的。一部分技巧就是要知道该分析什么和如何去分
2 析。这部分技巧能够通过学习本书的内容来提高。然而，还有一些从各种定量信息——如所涉及的人（首长、负责人）的个性特征，推出的新产品是否好卖，等等——评估投资的直觉技巧。尽管读者将从这种技巧必需的要求中获得提高，本书并没有明确地阐述这种技巧。

1.1 现金流

根据上面那个宽泛的解释，投资以它所产生的现金流序列来定义——在一段时间内一个投资者所发生的货币流入量和流出量。通常这些现金流（不管是正的还是负的）发生在确定的日期，比如在一年的每个季度末或年末。这个现金流序列可以通过列出每次的现金流来描述。如果我们确定地知道这

些现金流，那么这是最简单的情况。就像银行的利息收入或者抵押贷款的偿还一样。这种情况下，可以通过一系列的数字来描述现金流序列。例如，如果基本时间周期是一年，这一年可能产生一笔现金流，从开始到末尾，是（−1，1.2），相当于年初支付 1 美元（用于投资）和年末的 1.2 美元收入。周期为 4 年的投资可能是（−1，0.10，0.10，0.10，1.10），在这里，最初 1 美元的投资导致了前三年每年年末的 0.10 美元的收入和最终 1.10 美元的收入。注意到对于时间跨度只有一年的周期来说，两个现金流的数额是指定的——一个是在年初，一个是在年末。同样地，四年的例子涉及 5 个现金流数额。

现金流序列可以用图表表示，如图 1—1。在图中，给出了时间轴，并且特定时点的现金流用该时点的垂线表示。这些垂线的长度和现金流的数额成比例。

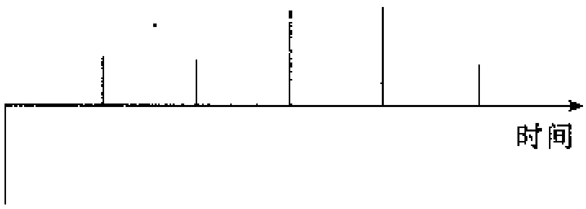


图 1—1 现金流序列

投资的现金流序列可以用图表表示。如图所示，现金流周期性地发生。第一笔现金流是负的，表示现金费用，接下来的现金流都是正的。

如果有些未来现金流的数额是未知的（这种情况是常见的），就必须用一个更加复杂的形式来表现现金流序列。有各种不同的表现技巧，本书以后会介绍。但不管是否出现不确定性，投资都是以现金流序列来表述的。

许多投资问题都可以用现金流表述，比如，两笔现金流中哪一笔更加可取？为了得到一笔已知的现金流我应该支付多少？将两笔现金流合起来对于我来说是否超过它们单个价值之和？如果我能购买一笔现金流的一部分，我应该购买多少？给出了一组现金流，它们的最好组合是什么？

这也引出了其他更加复杂的问题。例如，有时候并不是所有的现金流的 3

发生时间都是固定的，而是受投资者影响的。如果我购买一家公司的股票，对应于我购买所发生的支付最初发生的是一笔负的现金流；当我持有股票时，我可能会有规律地分得红利（相对较小的正的现金流）；最后，当我卖出股票时，我得到了一大笔现金流量。然而，最后一笔现金流的时间不是事先预订好的，我可以自由地选择时间。事实上，我们有时可以积极地管理投资来影响所有现金流的数额和时间。例如，如果我购买一个金矿作为一项投资，我可以决定如何开采它，并因此影响每年的现金流量。确定好合适的管理策略同样是投资科学的一部分。

把投资科学看作是制定现金流的观点使这个学科得到了广泛的应用。对个人来讲它可以应用于个人投资决策，比如住房按揭或者退休计划的决策。它也适用于商业决策，比如是否投资于产品开发，是否建造新的制造车间，如何管理现金资源。最后，它还可应用于政府决策，比如是否修建一个大坝或者改变税率。投资科学指导我们如何将股票、债券和其他投资产品组合成一个优良的资产组合。这个过程将单独看来风险很高的项目转化成吸引人的组合成分，从而提高了总产出。

1.2 投资和市场

本质上说，投资分析是一个检验备选项目并决定哪个最可取的过程。从这个方面讲，投资分析与其他的决策分析相似——操作一套生产设备，设计一个建筑，安排一次旅行，或者明确地叙述一项广告活动。事实上，投资科学的很大部分依赖于和分析其他决策相同的一般性工具。

然而，投资问题在一个很重要的方面与其他的决策问题有很大的区别：很多投资是在金融市场的框架里面执行的，并且这些市场提供一些在其他决策环境里所没有的选择。正是这个结构致使投资分析与众不同和异常高效。

比较原则

金融市场通过一个叫做**比较原则**（**comparison principle**）的概念简化了决策过程。为了介绍这个原则，考虑下面这个假设的情形。

你的叔叔向你提供一项特殊的投资。如果你现在给他100美元，他将在1年后归还你110美元。他的偿还由一个完全可靠的美国政府证券组成的信托基金担保，因此实际上这个投资无风险。同样，也没有道德或者个人义务 4
来做这项投资。你可以拒绝或者接受它。你该如何做？

为了分析这个情形，你注意到该投资提供的是10%的利率，你可以把它与在别处，比如，在你当地的银行或者通过国库券在美国联邦政府得到的市场利率进行比较。如果市场利率仅仅为7%，你可能就会投资于你的叔叔提供的这项特殊的投资（假设你有投资的资金）。另一方面，如果市场利率为12%，你肯定就会拒绝该项投资。从纯粹投资的角度看很容易评估这个机会，无须冥思苦想或者进行数学分析。如果该投资提供的利率高于一般水平，你接受它；如果低于一般水平，就拒绝它。

这个分析就是比较原则的一个例子。你通过把它与其他在金融市场上可获得的投资进行比较而评估这项投资。金融市场提供了比较的基础。

如果，另一方面，你的叔叔向你出售一幅价格很难确定的室内画，外部参照物就不可获得。你必须决定，对于你来说，这幅画是否与他的要价相称。

套利

当市场上有两种相似的投资备选项目时，会得到比比较原则更坚决的结论。例如，考虑以相同利率提供贷款或者吸收存款的（理想化的）银行。假设在某个银行的存贷利率为10%而在另外一个银行的利率为12%。那么你就可以到第一个银行借款，比如，以10%利率来借10 000美元并且把那10 000美元以12%的利率存入第二个银行。一年后你将获得10 000美元的2%，也就是200美元，不用投入自己的一分一毫。这就是**套利**（**arbitrage**）

的一种形式——不用投资而赚钱。假定你甚至可以通过在更高的水平上实行计划而挣更多的钱。大家应该明白这种事情是不会发生的——至少不常常发生。这两家银行的利率会很快地趋同。

上面这个例子假设任何银行的存贷利息相同。当然，一般来说，这些利率之间是有差别的。然而，在高容量的市场里，像美国财政证券，其买卖差价是非常小的。因此有相同特质的两种证券必然有几乎相同的价格——否则就存在套利机会。

为了便于分析，通常假设没有套利机会存在。这就是**无套利（No-arbitrage）**假设。

排除套利的可能性是一种简单的思想，但是它却具有深远的影响。我们可以发现无套利原则暗示着价格关系是线性的，股票价格必须满足某种关系，并且衍生证券的价格，比如期权和期货的价格，可以由解析式决定。

5 以非常发达的市场为基础，这个原则贯穿了现代投资科学的很大一部分。

动态

从相同或者相似的金融工具在连续的基础上进行交易这个意义上讲，金融市场的另外一个重要特征就是它们是动态的。这意味着一种资产的未来的价格并不是被看作一个简单的数字，而是随时间而变化的动态过程，并且受不确定性的影响。对投资情景分析的一个重要部分就是分析这个动态过程的特征。

有一些用来描述价格过程的标准框架。它们包括二项式网格模型、差分方程模型和微分方程模型，所有这些模型在本书中都会讨论到。一般来讲，过去的价格和其他信息的记录都要用来确定说明模型的参数。

因为市场是动态的，投资自身也是动态的——一项投资的价值随着时间而变化，并且一个很好的投资组合构成有可能变化。一旦这个动态特征为人所理解并被程式化，就有可能利用它们的动态特征构造投资组合，使得整个

投资组合价值快速增长。

风险厌恶

投资科学另外一个原则就是**风险厌恶（risk aversion）**。设想两种可能的投资有相同的成本，并且两者预期（expected）有相同的回报（比最初的成本多一些），这里的术语预期是按概率意义定义的（在第6章给出解释）。然而，其中一个投资的回报是确定的而另一个投资回报是不确定的。寻找投资而不是彻头彻尾的投机的人们将选择前一个投资（确定的）而不是后一个（有风险的）。这就是风险厌恶原则。

表述此原则的另外一种方法就是以市场收益率来说明。假设一个投资将会确定地支付固定收益——比如10%——可能是从政府担保的银行存单所得。第二种投资，比如是公司股票，其收益不确定。因此股票的期望收益必须高于10%，否则投资者将不会购买这只股票。总之，只有当我们期望得到更高的（或者平均）收益时才会接受更高的风险。

这种风险厌恶原则可以用几种方法来程式化（并可用解析式表示），这些将在以后的章节中讨论。一旦一种程式建立起来，风险厌恶原则可以用来分析许多投资决策。

风险厌恶原则程式化的一种方法是**均值—方差分析（mean-variance analysis）**。用这种方法，一种资产收益的不确定性仅通过两个量来表现：收益的均值和收益的方差。风险厌恶原则表明：如果几个投资机会有相同的均值但有不同的方差，一个理性的（风险厌恶型）投资者将会选择方差最小的那一种投资。

这种将风险程式化的均值—方差方法是许多大家熟知的投资组合定量分析方法的基础，哈里·马克维茨（Harry Markowitz）是这方面的先导（他因为这项工作获得了诺贝尔经济学奖）。这种方法导出了全面广泛的投资理论，并且被普遍地认为是现代资产组合理论的根基。我们将在第6章里讨论此理论。 6

风险厌恶原则程式化的更加普遍的一种方法是引入个人**效用函数**（**utility functions**）。这种方法在第 9 章里面介绍。

最后，在第 15 章，我们发现当一段时间内重复进行一项投资时风险厌恶呈现新的特征。事实上，人们将会发现短期方差是有益的，不是有害的。这是通览投资科学传达的观点得出的惊人结论之一。

1.3 典型的投资问题

每个投资问题都有独特的特征，但是很多问题可以归入一些大的范畴或者类型。这里我们简要地列出一些最重要的问题类型。有关这些一般类型的更加全面的描述和更加具体的例子，将在相关章节中出现。

定价

让我们回到投资情形的第一个例子，你叔叔提供给你的第一份投资，但是，现在我们将其反转过来。假设有一个投资机会是在一年年末向你支付 110 美元。我们提问：这项投资在今天值多少？换句话说，已知整个金融环境时，这项投资合适的**价格**是多少？

如果一年期投资的当前利率是 10%，那么这项投资的价格应该刚好为 100 美元。在这种情形中，该年末所支付的 110 美元应该与 10%的回报率相对应。如果当前的一年期投资利率低于 10%，那么这项投资的价格将高于 100 美元。总之，如果利率为 r（以小数来表示，比如 $r=0.10$），那么一年以后支付 X 的投资的价格为 $X/(1+r)$。

我们通过应用比较原则来决定价格。这项投资可以直接与投资于一年期存单（或者一年期的国库券）比较，因此它必须产生相同的有效利率。

这个利率的例子是一般定价问题的一个简单例子：给定一项我们清楚其回报特征的投资（回报可能是随机的），合理的价格是多少；或者，相当于

说，什么样的价格与市场上其他的证券相符？我们将在很多地方遇见这种问题。比如，在早期的学习中我们要确定债券合适的价格。然后我们要计算有随机收益特征的股票的合适价格。再然后我们要计算更加复杂的证券的合适价格，比如期货和期权。事实上，定价问题是现代投资科学的基础问题之 7
一，并且具有显著的实用价值。

比如在单利的例子里面，定价问题通常是应用比较原则来解决的。然而，在很多例子里面，比较原则的应用并不是像这个例子中这样简单和显而易见。人们已经设计出高明的论据来证明如何将复杂的投资分解成许多部分，每个部分可以与其他已知其价格的投资相比较。然而，不管是简单还是复杂的论据，进行比较是许多定价问题得以解决的基础。

套期保值

套期保值（hedging）是降低由正常的商业经营产生的或者与投资有关的金融风险的过程。套期保值是金融市场最重要的作用之一，并且是现代工业活动的一个必不可少的组成部分。套期保值的一种形式是**保险（insurance）**，通过支付一笔固定的金额（**保险费（premium）**），你就可以在损失发生时，得到补偿，从而使自己免于遭受某种可能的损失——比如火灾、盗窃，甚至价格的不利变化。在以下方法中可能产生更一般的套期保值。假设一个大的面包店，这个面包店要购买面粉（由小麦制成）和其他配料并且把它们做成烤制品，比如面包。假设面包店赢得了一份合同，可以在明年以一个固定的价格提供大量面包给另外一家公司。该面包店很高兴能够赢得这份合同，但是现在也面临着面粉价格变化的风险。该面包店不会马上把该合同所需要的面粉一次全部购齐，而是在该年需要的时候再买。因此，如果面粉的价格在该年中突然上涨了，面包店就不得不花费更多的钱来满足该合同的需要，因此利润将降低。某种意义上说该面包店受到面粉市场的支配。如果面粉价格上涨，面包店将得到较少的利润，甚至有可能在这个合同上亏损。如果面粉价格下降，面包店将得到比预期更多的利润。

该面包店是在烤制品行业，而不是在对面粉进行投机的行业。它想要减少与面粉成本相关的风险而只是关注烤制这一行。它可以通过在期货市场上得到数量合适的小麦期货合约来达到这个目的。这种合约有很小的初始现金流出，并且在固定的将来某日提供与签订该合约以后小麦价格变化量相等的利润（或者损失）。面粉价格与小麦价格联系紧密，因此如果面粉价格要上涨，则小麦期货合约的价值也会上升相当数量。因此对于面包店的净影响——来自于小麦期货合约的利润加上面粉成本的变化——接近于零。

还有很多种商业风险可以通过套期保值来减少。并且有很多种套期保值的方法：通过期货合约、期权和其他特殊安排。事实上，这些金融工具最主要的用途就是套期保值——而不是投机。

8 **纯投资（pure investment）**

纯投资是指通过现在的资本配置来获得更高的未来收入。这是在股票市场中许多单个投资隐含的动机。这种动机所引起的投资问题叫做**组合选择问题（portfolio selection problem）**，因为决定将资本投资于何处才是真正的问题所在。

解决纯投资的很多方法依赖于风险厌恶原则，因为在这个问题上你必须谨慎地估量你的偏好，决定如何在风险和预期收益之间权衡。没有惟一的解决方法。判断和鉴赏力很重要，这一点已被大量的文献资料和每年为帮助个人解决这个问题所给出的建议所证实。

纯投资问题还刻画了追求利润的公司的行为，这些公司持有现存的资本并且通过投资于设备、人员和经营而将它转化成利润。因此由分析纯投资问题而得出的方法也可以用于分析公司内部的潜在项目，公司总的财务结构，甚至公司间的合并。

其他问题

投资问题并不经常以前面列出的那些特殊形式出现。一个套期保值问题

可能包含了纯投资的成分，反过来一项投资可能由一定程度的套期保值来缓解风险。幸好，同样的分析原理可以应用于这些问题的组合。

经常发生的一类问题就是消费—投资组合问题。例如，一对退休夫妇，靠投资所得维生，他们的投资就很有可能与一对想得到资本增长的年轻夫妇的投资有很大差别。对收入的要求会改变投资问题的性质。同样地，对一个公共事业单位捐赠基金的管理也存在这个问题，比如一个大学，必须考虑与学校现在的经营相关的消费目标，同时也要考虑增长目标。

我们同样会发现，投资问题的框架是由以前用来处理投资问题的规范方法所形成的。一旦我们掌握了描述投资问题的逻辑方法，对新的问题就会有所启发。在学习此书的过程中，我们会发现更多的问题并对此处的简单概括有更深入的理解。

1.4 本书的结构

本书的结构反映这样一个概念——投资科学是研究怎样调整现金流的。的确，现金流观点使这个学科自然地分成了如下四个主要部分。

确定性的现金流 9

最简单的现金流是那些确定的（不是随机的，而是明确的）现金流。本书的第一部分讲述这些现金流。这种现金流可以由数列来表示，比如（−1，0，3），就如前面讨论的一样。这种类型的投资，不管是单期还是多期的，主要是用各种不同的利率概念来分析。相应地，利率理论在本书第一部分就很重要。这个理论为相当深入地理解投资奠定了基础，并为讲述各种重要和有趣的问题提供了框架。

单期随机现金流

复杂程度处于第二位的现金流与只有一期的现金流有关，仅有开头和结尾的现金流，但第二个现金流的数额是不确定的。年初购买股票并在年末将股票售出就是这种情形。我们事先不知道年末出售股票能得到多少金额，因此这是不确定的。这种复杂性抓住了许多投资情形的实质。

为了分析这种现金流，你必须对**不确定收益（uncertain returns）**有严谨的描述。这种描述有好几种（都是基于概率理论的），我们将要学习主要的几种，其中最简单的是均值—方差分析。我们还必须对个体如何评估不确定性收益有严谨的分析。我们将从均值—方差分析开始考虑这种评估方法。这种单期不确定现金流情形是本书第二部分的主题。

衍生资产

复杂程度处在第三位的现金流包含了那些在每个时间点上现金流量都是随机的现金流，但是这里资产产生的现金流在函数关系上与另外一种价格特征已知的资产相联系。

这种现金流量的价值在函数关系上依赖于另外一种资产叫做**衍生资产（derivative asset）**。股票期权就是很好的例子。要描述这种期权，假设我拥有 A 公司的 100 股股票。这个资产，100 股股票，是基础资产。现在假设我赋予你购买的权利（而不是义务），比如以每股 54 美元在三个月后购买我的 100 股股票。这种权利就是买入 100 股 A 公司股票的看涨期权。这种期权是一种资产，它具有价值，这种价值会随时间而变化。然而，它是 A 公司股票的衍生品，因为该期权的价值依赖于股票的价值。如果股价上升，期权价值同样会上升。其他衍生资产包括期货合同、其他种类的期权和各种其他的
10 金融合约。很多购买住房的人知道的一个例子就是可调节利率的抵押贷款，它每期根据利率指数来调节利息支付。这种抵押贷款是那些确定利率指数的证券的衍生品。

本书的第三部分主要讲述这些衍生资产。对这些资产的分析通常比对那

些有一般多期不确定现金流的资产分析要简单的多，因为衍生品的特性可以回溯到基础原生资产。然而，对衍生资产的研究，是投资科学的重要和生动的一方面，其中可以得出具有很强理论性的结果，并且可以获得重要的数量，比如隐含的价格。

一般现金流

最后，本书的第四部分讲述的是在许多时间点上都有不确定现金流量的现金流——函数关系上与其他资产不相关联的现金流量。如大家预料的一样，这个程度的现金流是本学科最难的部分，但同时也是最重要的部分。大多数投资中遇到的现金流都具有这种一般形式。

本书这个部分所用的方法是以前面的方法为基础的，但是增加了新的概念。投资组合——资产组合结构——可以随时间进展而变化，这种变化取决于在那个时点上发生了什么，这一事实引出了新的现象和新的机遇。例如，投资组合的成长率可以通过应用合适的再投资策略来提高。本书这一部分展现了这个领域的一些最新角度。

投资学是一门实用科学，因为它最重要的精髓是基于一些简单原理，所以学起来很容易并且可以富有成效地应用于有趣和重要的问题。它同时是一门发展中的科学，扩展得很迅速。读者对本领域有一个基本了解后，或许会在理论或者应用方面对投资学的发展作出贡献。

第2章 利息基础理论

利息经常被称为货币的时间价值，以下儿章将探究货币时间价值的结构和含义。在这门学科的第一章，我们概述了利率理论的基本要素，阐明此理论能够转化成解析形式，并且因此能被用作作出明智的投资决策的基础。 13

2.1 本金和利息

利息的基本思想是相当熟悉的。如果你

投资 1 美元于每年有 8%利率的银行账户，那么在 1 年以后你的账户里将包含 1 美元的**本金（principal）**（原先的数额）加上 0.08 美元的**利息（interest）**，总共就是 1.08 美元。如果你投资很大的一笔数额，比如 A 美元，那么在年末你的账户将增长到 $A\times 1.08$ 美元。总之，如果利率是 r，且以小数的方式来表述，那么你年末所得将是年初投资乘以 $(1+r)$。

单利

在**单利（simple interest）**规则下，非一年期的投资所得的累积利息与投资的期限成比例。因此，2 年期的投资所得的总利息就是初始投资的 $2r$ 倍，以此类推。换句话说，每年投资产生的利息等于初始投资的 r 倍。对于未满 1 年的投资，通常是以比例的方式来处理；也就是说，在 f 年以后（f 小于 1），则会获得初始投资 rf 倍的利息。

单利的一般规则是：如果以单利 r 向一个存款账户注入数额为 A 的资金，n 年以后的总价值是：

$$V=(1+rn)A$$

对不足 1 年的投资期限，如果比例规则适用，那么在任意时间 t(以年为度量单位）以后，这个存款账户的价值是：

$$V=(1+rt)A$$

14 该存款账户随着时间而**线性地（linearly）**增长。如以上公式显示，该存款账户在任意时刻上的价值刚好是初始数额（本金）和累计利息之和，而累计利息与时间成比例。

复利

许多银行的存款和贷款使用复合形式产生的复利。再次，考虑一个年利率为 r 的存款账户。如果每年的利息以复利方式计算，那么 1 年以后，第一年的利息加上本金的总和作为第 2 年的数额更大的本金。因此，在第 2 年期间，此存款账户赚取了利息的利息。这就是复利效应，这种效应会一年一年

地持续下去。

在使用年复利方法时，1 年以后存款账户上的数额是本金乘上$(1+r)$。第 2 年以后，就会再乘上另一个乘数$(1+r)$，成为本金乘以$(1+r)^2$。n 年以后，这样一笔存款就会成为本金值的$(1+r)^n$ 倍，而这就是**复利（compound interest）**条件下存款账户增长的解析表达式。由于其 n 次幂形式，这个表达式显示出**几何性增长（geometric growth）**。

当 n 增大时，由于复利计算而产生的增长是巨大的。例如，图 2—1 显示了 100 美元的投资以 10%的单利和复利的增长。此图显示了单利线性增长和复利加速增长的特征。请注意，在复利情况下，投资值大约 7 年后翻一番。

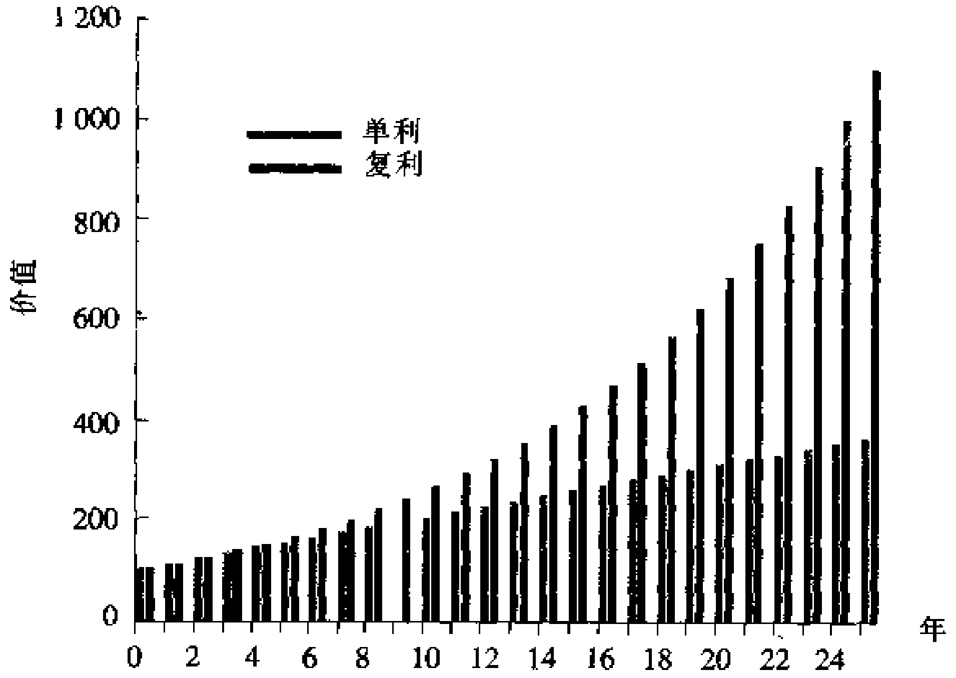


图 2—1

单利得出的是线性的增长，而复利得出的是几何级的加速增长。该图显示了利率为 10%的单利和复利两种情形。

有一个很微妙的规则可用来估计复利效应。

15 *⇒**七一十规则**（the seven-ten rule） 以年利率 7%进行的投资，其价值大约 10 年后会翻番。同时，以 10%的年利率进行的投资其价值会在大约 7 年后翻一番。*

（更精确一些，以 7%的利率和 10 年时间，一笔存款会增长到 1.97 倍；而以 10%的年利率和 7 年时间，存款会增长到 1.95 倍。）将该规则再推广和改进一下，可陈述如下：对于少于 20%的年利率，翻倍的时间是 $72/i$ 左右，这里 i 是以百分比表示的利率（也就是说，10%利率对应的 $i=10$）。（见练习 2）。

不同时间间隔的复利计息

在前面的讨论里，利息是在每年年末计算和支付的。许多银行现在频繁地计算和支付利息——每季，每月，有些情况下每天计算。这种频繁的复利计息方式产生了有效年利率。在此情况下，仍然习惯于以年为基础进行利率报价，但是要对每个复利计息期应用该年利率的合适的比例部分。比如，以季度复利计息为例。以 r 为年利率的季度复利计息就意味着每个季度是 $r/4$的利率。因此 1 个季度后银行账户里的金额就会增长到本金乘以（$1+r/4$）。如果下个季度存款继续保留，那么该笔金额会增长到再乘以（$1+r/4$）那么多。1 年以后，原账户就会增长为本金乘以复利因子 $(1+r/4)^4$。对于任意 $r>0$，都有 $(1+r/4)^4>1+r$。因此在相同的年利率情况下，计算 4 季度复利后的账户金额要大于没有以复利形式计息的 1 年后的金额。

通过对**有效利率（effective interest rate）**的阐述，在年增长方面的复利计息效应就凸显出来了。有效利率相当于非复利计息方式下产生相同效果的年利率。例如，一个年利率为 8%的每季复利计息方式将导致 $(1.02)^4=1.0824$ 的增长；因此有效利率就是 8.24%。基础年利率（此例中的 8%）就定义为**名义利率（nominal）**。

复利计息可以在任何频率下计算，一般方法是：将一年划分为若干相等

的时段——比如 m 期。(在每月复利计息情况下，时间段并不完全相等，但在此我们可忽略不计并且设每月复利计息下的 $m=12$。) 对于这 m 期的每一期，利率为 r/m，这里的 r 是名义年利率。在第一期，该存款账户增长到本金的 $1+(r/m)$ 倍。在 k 期后，增长到 $[1+(r/m)]^m$。有效利率是 r'，此 r' 满足 $1+r'=[1+(r/m)]^m$。

连续复利

我们可以想像将一年分成越来越小的时期，并应用复利计息于每月、每周、每天，甚至于每分每秒。这就产生了连续复利的思想。通过考虑一年的时期 m 趋于无穷时普通复利的极限，我们能确定连续复利的效果。为了确定这种连续复利的年效应，我们利用下列等式： 16

$$\lim_{m\to\infty}[1+(r+m)]^m=e^r$$

在这里，$e=2.781\,8\cdots$，它是自然对数的底数。有效利率 r 满足 $1+r'=e^r$。如果名义利率是每年 8%，那么连续复利计算出来的增长将是 $e^{0.08}=1.083\,3$，即有效利率为 8.33%。(回忆一下每季复利计息时产生的有效利率是 8.24%。) 表格 2—1 显示了不同的名义利率进行连续复利计算所产生的结果。注意，随着名义利率的增大，复利计息的效果更显著。

表 2—1　　　　连续复利计息

	利率（10%）							
名义	1.00	5.00	10.00	20.00	30.00	50.00	75.00	100.00
有效	1.01	5.13	10.52	22.14	34.99	64.87	111.70	171.83

在连续复利条件下，上面一行的名义利率与第二行的有效利率相对应。在高名义利率时，由于复利引起的增长十分显著。

我们还能计算出，经过任意长度的时间后，一项存款将会增长到多少。用变量 t 来定义时间，以年为单位。因此 $t=1$ 就是指 1 年，$t=0.25$ 指 3 个月。选择一个时间 t，并且将年划分为 m 期（m 很大），每期长为 $1/m$。因此，对某些 k，$t\approx k/m$ 时，意味着 k 期大约与时间 t 相同。如果 m 很大，这

个近似值就能很精确。因此 $k\approx mt$。利用复利计息的一般公式，我们知道 k 期增长因子是：

$$[1+(r/m)]^k=[1+(r/m)]^{mt}=\{[1+(r/m)^m]\}^t\to e^{rt}$$

其中，m 趋于无穷相当于连续复利，最后一个表达式取极限时成立。因此，连续复利产生了大家所熟悉的指数式增长曲线。在图 2—2 中显示了 10%的名义利率情况下的**指数式增长（exponential growth）**曲线。

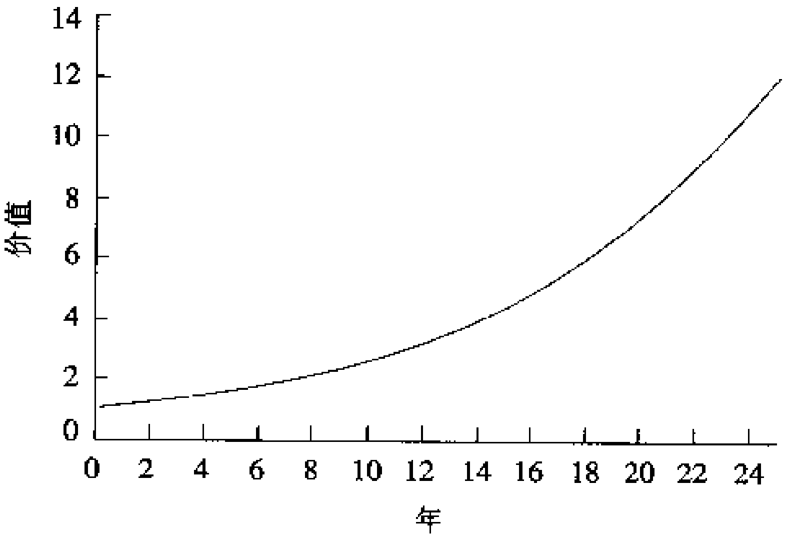


图 2—2　指数式增长曲线；连续型复利增长

以 10%的年利率来进行连续复利计息，1 美元的价值大约 7 年后翻一番。20 年后是原值的 8 倍。

负债

我们已经考察了单项投资（比如一项银行存款）根据复利计息如何增长。很明显债务的增长方式完全相同。如果我以利率 r 从银行里借钱并且不做任何支付，那么我的负债将会按相同的公式增长。尤其是，如果我的负债是每月复利计息，那么 k 月以后我的债务将按因子 $[1+(r/12)]^k$ 增长。

货币市场

17 虽然我们把利率作为已知值对待，但是在现实中每天都有许多不同的利

率。不同利率应用于不同场合，不同用户群和不同时期。许多利率是由应用这些利率的主要的市场供求双方的力量决定的。这些利率被广泛地公布；表 2-2 显示了某天中各种利率。这些市场利率中许多会在第 3 章和第 4 章中更详尽地讨论。并不是所有的利率都是应用广泛的市场利率。可能会存在两方私下协商的私人利率。或者以公司为背景，内部交易或者为了评估某项目也会确定出特殊利率，这将会在本章的后面部分讨论。 18

表 2—2　各种市场利率

各种利率（1995 年 8 月 9 日）	
美国短期和中期国债	
3 个月短期国债	5.39
6 个月短期国债	5.39
1 年短期国债	5.36
3 年中期国债（%收益率）	6.05
10 年中期国债（%收益率）	6.49
30 年长期国债（%收益率）	6.92
联邦基金利率	5.687 5
贴现率	5.26
优惠利率	8.75
商业票据	5.84
存单	
1 个月	5.17
2 个月	5.24
1 年	5.28
银行承兑汇票（30 天）	5.68
伦敦新欧洲美元（1 个月）	5.75
伦敦银行同业拆借利率（1 个月）	5.88
联邦住宅贷款抵押公司（Freddie Mae）（30 年）	7.94

每天应用的利率都有所不同。这是一个样本。

2.2 现值

前一节的大意是：由于利率的作用，今天的投资会在将来增值。前一节的公式表明了如何决定这个将来价值。

这一整套概念和公式也可以反过来计算对于将来才能得到的钱，放到现在应该得到多少。这个倒置过来的想法就是极其重要的**现值**（**present value**）概念的基本思想。

为了说明这个概念，考虑两种情形：（1）你将在 1 年后收到 110 美元；（2）你现在收到 100 美元并以 10%的利率将其存入银行。很明显这两种情况在 1 年以后结果是相同的——你将得到 110 美元。我们可以重述这个等价性——一年后收到 110 美元与利率为 10%时现在收到 100 美元是一样的。或者说，将在 1 年后收到的 110 美元，其现值是 100 美元。总之，在 1 年以后要得到的 1 美元其现值为 $1/(1+r)$ 美元，这里 r 是指利率。

其相似的转换形式可应用于将来的债务，比如对负债的偿还。设想一下，因为某种原因你有一项在刚好 1 年以后偿还某人 100 美元的债务。这项债务可以看作发生在年末的负现金流。为了计算这项债务的现值，你要确定现在需要多少钱才能偿还将来的这项债务。这很容易确定。如果现在的年利率是 r，你需要 $100/(1+r)$ 美元。如果这笔资金现在存入银行，年末将增加到 100 美元，你能完全如期偿还这笔债务。所以，该笔债务的现值是 $100/(1+r)$ 美元。

将未来的债务折算为等价的现值的过程也叫做**贴现**（**discounting**）。一笔未来货币金额的现值小于其面值，因此将来价值必须贴现后求得现值。用以对将来价值进行贴现的因子称为**贴现因子**（**discount factor**）。1 年期的贴现因子是 $d_1=1/(1+r)$，这里 r 是 1 年期利率。因此如果在 1 年后将收到金

额为 A 的一笔款项，则现值就是经过贴现后的金额 d_1A。

现值公式依赖于从银行或其他来源获得的利率。如果其来源的报价利率是复利，那么这个复利就应该用来计算现值。比如，假设将年利率 r 按相同的 m 期的每期末进行复利计息，并假设在第 k 期末将得到一笔金额为 A 的现金支付，那么合适的贴现因子是： 19

$$d_k=\frac{1}{[1+(r/m)]^k}$$

在将来第 k 期得到的金额为 A 的支付的现值是 d_kA。

2.3 现金流的现值和终值

前面部分研究了利息对于单个存款或贷款的影响，也就是说，对于单个现金流量的影响。我们现在将其扩展到现金流量发生在几个时期，并因此形成现金流或现金流系列的情况。首先我们需要一个新的概念。

理想的银行

当讨论现金流时，定义**理想的银行**（**ideal bank**）这个概念是很有用的。一个理想的银行对存款和贷款使用相同的利率，并且无服务费或交易费用。它的利率适用于任何规模的本金，从 1 美分（或者很小）到 100 万美元（或者更多）。此外，一个账户里的各个单项交易对其将来余额产生的效应是完全可加的。

请注意理想的银行的定义并没有暗示所有交易使用相同的利率。例如，2 年期的存单（CD）可能比一年期存单提供更高的利率。但是，2 年期存单提供的利率必须与 2 年期贷款的利率相同。

如果理想银行的利率独立于其适用的时间长度，并且利率根据一般规则进行复利计息，它就被称为是**永恒的理想银行**（**constant ideal bank**）。在本

章的后面部分，我们通常假设利率实际上是恒定的。

永恒的理想银行是用来描述外部金融市场——公开货币市场——的参照点。

终值

现在我们回到对现金流的研究。我们先设定复利计息的固定时间周期（比如，每年）并设一期是这个周期的长度。我们假设现金流发生在每期期末（虽然有些现金流可能是 0），我们每期将获得现金流并将其存入永恒的理想银行。（如果现金流为负，我们设为偿还一笔贷款。）在永恒的理想银行定义下，我们可以通过加总单个现金流的终值来算出账户里的最终余额。明确地考虑现金流（x_0，x_1，…，x_n）。在 n 期末，初始现金流 x_0 将会增长到
20 $x_0(1+r)^n$，这里，r 是每期的利率（即每年的年利率除以每年的期数）。在第一期后收到的下一笔现金流 x_1，到最后时间点上，在该账户里只经历 $n-1$期，因此终值为 $x_1(1+r)^{n-1}$。同理，再下一笔现金流 x_2 将得到 $n-2$ 期内的利息，其终值为 $x_2(1+r)^{n-2}$。最后一笔现金流 x_n 将没有获得任何利息，仍然为 x_n。n 期末的总值就为 $FV=x_0(1+r)^n+x_1(1+r)^{n-1}+\cdots+x_n$。总结如下：

⇒**现金流的终值** *已知一笔现金流（x_0，x_1，…，x_n）和每期利率 r，现金流的终值为：*

$$FV=x_0(1+r)^n+x_1(1+r)^{n-1}+\cdots+x_n$$

例 2.1（一笔短期现金流） 考虑现金流（-2，1，1，1），以 1 年为 1 期，利率为 10%，终值为

$$FV=-2\times(1.1)^3+1\times(1.1)^2+1\times(1.1)+1=0.648 \qquad (2-1)$$

这个终值公式通常利用每期的利率并假设每期进行复利计息。

现值

一般的现金流的现值——就如终值一样——也能通过单独考虑每笔现金流量进行加总。再次考虑现金流（x_0，x_1，…，x_n）。第一笔现金流 x_0 的现值就是它自身，因为没有必要贴现。现金流 x_1 的现值是 $x_1/(1+r)$，因为必须对其进行 1 期贴现。（再次说明，利率是每期的利率），继续下去，我们得出整个现金流的现值为 $PV=x_0+\frac{x_1}{(1+r)}+\frac{x_2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{x_n}{(1+r)^n}$。我们总结出重要的结论如下：

⇒**现金流的现值**　*已知现金流(x_0，x_1，…，x_n）和每期利率 r，这笔现金流的现值为：*

$$PV=x_0+x_1/(1+r)+x_2/(1+r)^2+\cdots+x_n/(1+r)^n \qquad (2—2)$$

例 2.2　再次考虑现金流（−2，1，1，1），应用 10%的利率。我们得出

$$PV=-2+1/1.1+1/(1.1)^2+1/(1.1)^3=0.487$$

现金流的现值可以看作与整个现金流等价的当前支付额。因此我们可以 21
把整个现金流看作被初始点的单笔现金流量所代替。

还有另一种解释现值公式的方法，其基本思想是把终值公式变形。终值就是指与整个现金流等价的最终支付额。我们可以把现金流看作被转换成的第 n 期的单笔现金流。这单笔等价现金流的现值通过$(1+r)^n$ 贴现而得出。也就是说，现值和终值通过下面公式而联系起来：

$$PV=FV/(1+r)^n$$

在前面的例子中，对现金流（−2，1，1，1）我们有 $0.487=PV=FV/(1.1)^3=0.648/1.331=0.487$。

连续而频繁的复利计息

假设 r 是名义利率，并且按 1 年中 m 个相等的时期复利计息。假设现

金流在最初和 n 期的每期期末发生，期数为 n，形成现金流（x_0，x_1，…，x_n），那么如前所述，我们得出

$$PV=\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{[1+(r/m)]^k}$$

现在假设以名义利率 r 进行连续复利计息，现金流发生在 t_0，t_1，…，t_n。（在前面的章节的现金流中有 $t_k=k/m$，但是这里允许更一般的情形。）我们用 $x(t_k)$ 表示时间 t_k 的现金流，在这种情况下，有：

$$PV=\sum_{k=0}^{n}x(t_k)e^{-rt_k}$$

这就是现值的连续复利计息公式。

现值和理想的银行

我们知道理想的银行可以用来改变现金流的模式。例如，通过现在收取 1 美元而在 2 年后支付本金和利息共 1.21 美元，一个年利率 10%的银行可以将现金流（1，0，0）转换成现金流（0，0，1.21）。该银行同样可以把二者颠倒过来运作，通过现在发行 1 美元的贷款把第二个现金流转换成第一个现金流。

22 总之，如果一个理想银行可以把现金流（x_0，x_1，…，x_n）转换成现金流（y_0，y_1，…，y_n），它同样能反向转换。两个能够互相转换的现金流称为**等价现金流（equivalent stream）**。

⇒***现值的重要定理*** *对于利率为 r 的永恒的理想银行来说，当且仅当以银行利率评估两个现金流的现值相等时，现金流 $X=x_0$，x_1，…，x_n 和 $Y=y_0$，y_1，…，y_n 才等价。*

证明：令 v_x 和 v_y 分别为 x 现金流和 y 现金流的现值，x 现金流等价于现金流（v_x，0，0，…，0）而 y 现金流等价于现金流（v_y，0，0，…，0）。

很明显当且仅当 $v_x=v_y$ 时现金流 v_x，0，0，…，0 和 v_y，0，0，…，0

才等价。

因此，当且仅当 $v_x = v_y$ 时，原现金流 x 和 y 才等价。

此结论非常重要，因为它表明存在理想银行时，需要用以刻画现金流的惟一数字是现值。现金流能够被银行用很多方法变形，但是现值是一致的。因此如果某人提供给你一笔现金流，你只需要算出它相应的现值，这样你就能利用银行将具有该现值的现金流调整成任何你想要的形式。

2.4 内部收益率

内部收益率（internal rate of return）是现金流分析中的另一个重要的概念。它是专门针对与投资相关的整个现金流而言的，并非关于像单期现金流量一样的部分现金流。这个概念通常适用于现金流同时有正的和负的部分：负现金流相当于必须作出的支付；正现金流相当于流入。一个简单的例子就是固定的 1 年期存单的投资。有两笔现金流量：最初的存款或支付（负流量）和最后得到的偿还（正流量）。

已知一项与投资相关的现金流（x_0，x_1，…，x_n），我们写出现值公式

$$PV = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+r)^k}$$

如果与此现金流有关的投资是由一系列在利率为 r 时，从永恒的理想银行中的存款和提款构成，那么从前面章节中现值的重要定理中得出，现值将为 0。内部收益率背后的思想就是逆转这种程序。已知一笔现金流，我们写出现值的表达式并求出使现值等于 0 的 r 值。这个值称为内部收益率， 23
因为它是现金流的内部结构隐含的利率。这种思想可适用于任何的现金流序列。

内部收益率（IRR）初步的正式定义是：

⇒***内部收益率*** *设 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 为一笔现金流，此现金流的内部收益率为满足下面的方程式的数 r：*

$$0=x_0+x_1/(1+r)+x_2/(1+r)^2+\cdots+x_n/(1+r)^n \qquad (2—3)$$

同样，它是满足 $1/(1+r)=c$（也就是，$r=(1/c)-1$）的数 r，此时 c 满足多项式：

$$0=x_0+x_1c+x_2c^2+\cdots+x_nc^n \qquad (2—4)$$

我们称这为初步定义，是因为解 n 次多项式方程，答案是不惟一的。我们简短地讨论此问题。首先，还是让我们说明一下内部收益率的解。

例 2.3（原现金流） 再次考虑前面讨论过的现金流（−2，1，1，1）。通过解下面的等式得出内部收益率

$$0=-2+c+c^2+c^3$$

求出的解为（通过试错法）$c=0.81$，因此 IRR$=(1/c)-1=0.23$。

请注意定义内部收益率与现行的市场利率无关。它完全是由现金流所决定的。这就是它称为内部收益率的原因：它是在内部决定的而与外部金融世界无关。它是从开始的 0 现金余额产生已知的现金流的理想的银行必须采用的利率。

正如已经指出的一样，关于内部收益率的方程式（2—4）是关于 c 的 n 次多项式，一般来说，它没有解析解。然而，通常用电脑很容易解此方程。从代数理论上讲，大家都知道这样的方程式通常至少有一个根，有可能多至 n 个根，但有可能部分的或者全部的解都是复数。幸好最常见的投资形式，即初始的一笔现金流出后都是正的现金流，可以得出惟一的正数解。因此内部收益率很好定义并相对容易计算（见练习 4）。对存在正数根的严谨阐述体现了关于内部收益率的主要结论。

⇒***内部收益率的主要定理*** *假设现金流 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 中 $x_0<0$ 而对于*
24 *所有的 k 都有 $x_k\geqslant 0$，$k=1, 2, \cdots, n$，起码有一项严格为正。那么下述方*

程有惟一正根：

$$0=x_0+x_1c+x_2c^2+\cdots+x_nc^n$$

此外，如果 $\sum_{k=0}^{n}x_k>0$ *(即收益总额超过初始投资)，那么相应的内部收益率* $r=(1/c)-1$ *为正。*

证明：构造函数 $f(c)=x_0+x_1c+x_2c^2+\cdots+x_nc^n$，如图 2—3 所示。注意 $f(0)<0$。然而，随着 c 增大，$f(c)$ 的值也增大，这是因为现金流中至少有一项严格为正。事实上，随着 c 趋于无穷 $f(c)$ 也趋于无穷。由于该函数是连续的，它必然要交横轴于某个 c 值上。它只能与横轴相交一次，因为它是严格递增的。因此存在惟一的正实数 c_0，满足 $f(c_0)=0$。

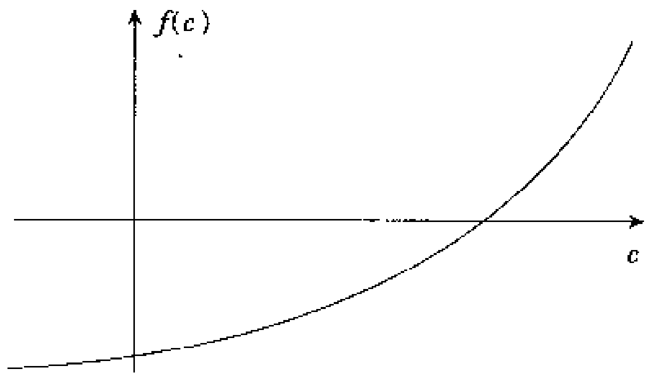


图 2—3 用函数来证明

如果 $x_0<0$ 并且对于所有的 k 都有 $x_k\geqslant0$，$1\leqslant k\leqslant n$，起码有一项严格为正，那么函数 $f(c)$ 将从横轴下方开始并随着 c 的增加而单调递增。因此必然有惟一正解 c 满足 $f(c)=0$。

如果 $\sum_{k=0}^{n}x_k>0$，意味着存在正的净（非贴现的）现金流，那么 $f(1)>0$。这意味着满足 $f(c_0)=0$ 的解 c_0 必然小于 1。因此在 $r_0=(1/c_0)-1>0$中，r_0 为内部收益率。

如果内部收益率方程的一些（或者全部）解是复数，这些值的解释并不简单。一般来说，选择实数部分最大的解，并利用该实数部分决定内部收益率的做法是合理的。然而实际上，这并不是个严重的问题，因为合适的实数

根一般是存在的。

2.5 评估准则

投资的本质就是从一些可相互替代的现金流中选择一笔现金流。为了作出明智的选择，必须根据逻辑缜密而通用的准则评估现金流。实际运用中有几种不同的准则，但是有两个最重要的方法是基于现值和内部收益率的。

净现值

25 通过简单地将各笔现金流的现值从大到小排序而评估各笔现金流——现值越高，该笔现金流越受欢迎。应用此方法时，必须将所有与该投资相关的现金流量包括在内，包括正的现金流和负的现金流。为了突出这一点，经常会用到这个表述——**净现值（net present value，NPV）**。净现值是所有收益的现值减去所有成本的现值。通常，为了突出收益和成本的划分，用到了术语**收益的现在价值（present worth of benefits）**和**成本的现在价值（present worth of costs）**，这二者都是现值。净现值就是这二者的差。一项投资要让人值得考虑，它产生的现金流必须有正的净现值。

例 2.4（何时伐木，when to cut a tree） 假设你有一个机会可以植树，并且以后卖出木材。这个项目需要初始现金流出以购买和种植幼苗。直到砍伐树木时才发生了第二笔现金流。然而，你可选择何时砍伐：1 年以后或者 2 年以后。如果你 1 年以后砍伐，你会迅速地得到投资回报。但如果你再等 1 年，树木将长得更加粗壮，你从树木的销售中得到的收入也将更多。

我们假设与这两种投资决策相关的现金流为：

(a)（−1，2）早点砍伐；

(b)（−1，0，3）晚点砍伐。

我们也假设市场利率为 10%，则相关的净现值为：

(a) NPV $=-1+2/1.1=0.82$

(b) NPV $=-1+3/(1.1)^2=1.48$

因此，根据净现值准则，最好是晚点砍伐。

净现值标准是很令人信服的，事实上它通常被认为是衡量投资价值的最好的准则。它有一个独特的优点——几个不同的投资的净现值可以加总起来，得到一个富有意义的组合。这是因为一组现金流之和的现值等于该组现金流的现值之和。比如，对于与植树有关的两种不同的投资，尽管现金流发生的时间不同，我们也能进行比较。总之，投资者可以加总单笔现金流的现值，也可以计算整个投资组合的现值。

内部收益率

内部收益率同样可以将不同的现金流进行排序。规则很简单：内部收益率越高，投资越受欢迎。然而，如果潜在的投资或项目的内部收益率低于市场利率，则大概是不值得考虑的。如果内部收益率比市场利率高，该项投资将比在外部金融市场中的投资更受欢迎。 26

例 2.5（何时伐木，续前） 我们用内部收益率方法来评估例 2.4 中的两种伐木方案。在这两种方案中，内部收益率方程式为：

(a) $-1+2c=0$

(b) $-1+3c^2=0$

同时 $c=1/(1+r)$，有以下解：

(a) $c=1/2=1/(1+r)\quad r=1.0$

(b) $c=\sqrt{3}/3=1/(1+r)\quad r=\sqrt{3}-1=0.7$

换句话说，对于（a），早点伐木，内部收益率为 100%，而对于（b），内部收益率为 70%。因此，在内部收益率准则下，最好的选择为（a）。请

注意这和前面用净现值法得出的结论不同。

对准则的讨论

关于净现值和内部收益率这两个准则何者更适合于投资评估，存在很多争论。两者都有吸引人的特征，同时也都有局限性（如前所示，它们甚至可能作出相矛盾的建议）。净现值是最易计算的，它没有内部收益率方程式那种可能有几个根的不确定性。而且净现值可以被分解为几个组成部分，而内部收益率不行。而内部收益率的优势在于它仅仅依赖于现金流的属性，而不依赖于市场利率（它在实际中可能不容易确定）。事实上，这两种方法都有自己合适的作用，适用于不同的情形。

这两个准则的最主要区别可以用“何时伐木”例子来解释。除了看单周期的林场经营，我们还必须看看有一系列周期的林场经营。假设第一期树的
27 收获所得用来种更多的树，在林场经营上开始一系列的扩张。在（a）计划下，早点伐木，这项经营每年都会翻倍，因为每年年末的收入是开始投人的2倍。在（b）计划下，晚点伐木，这项经营每2年就会增至原先的3倍，其原因与前一种方案相同。从长期看，每2年增至3倍。等价于每年增长$\sqrt{3}$倍。这两种计划的年增长率系数分别是2和$\sqrt{3}$，等于1加上该计划的内部收益率——而这个等量关系一般来说确实如此。因此，在这种情况下，当收益能被重复再投资于同类但规模不同的项目，选择内部收益率最大的投资是有意义的——为了得到最大的资本增长。

另一方面，假设这个投资是一次性的，并且不能够重复。此时净现值方法是合适的准则，因为它把该投资与那些可以通过正常渠道获得的投资进行比较（后者提供的是市场利率）。

被广泛（被理论家，但不一定被实际操作者）认同的是，总的来说，最好的准则是基于净现值的。如果利用得好，它具有一致性和合理性。比如，在伐木的例子中，一个明智的现值分析将与内部收益率准则的结论一致。如

果那两种伐木方案可完全继续延伸，现值准则应用于很长的一系列现金流时，将同样采取（a）方案。

有很多其他因素影响可靠的现值分析——有可能会使这样的分析比过去对此准则直截了当的正规阐述中的分析更复杂。一个很重要的问题就是计算时利率的选择。在实际中，金融市场存在几个不同的“无风险”利率：银行存单的利率，3 个月短期国库券利率，级别最高的商业债券的利率等。再者，借款利率通常比贷款的利率稍微高一点。在所有的这些选择中，其两两之差可能有几个百分点。在做商业决策时通常要用到一个叫做**资本成本（cost of capital）**的数字作为基线利率。它是公司必须支付给潜在投资者的收益率，也就是说，它是公司为了得到更多资金而必须支付的成本。或者，它有时被称为是满意的备选项目的期望收益率。然而，这些资本成本数字中有些是从不确定的现金流得出的，并不是无风险利率的合适的标准。因为我们假定现金流是确定的所以最好能用代表真实利率的数字来计算现值。这些利率明显的差异我们将在第 4 章里解释和证明，但是仍然有评价的空间。

另一个要考虑的因素是现值本身只能揭示收益率的部分信息。两个备选的投资可能都有 100 美元的净现值，但是有一个要求 100 美元的投资，而另一个却要求 1 000 000 美元的投资。很明显应该对这两个投资区别对待，净现值并不能说明全部（我们也从未说过）。它是一个坚定的出发点，但是必须用其他的内容进行补充。

2.6 应用和扩展★

本部分将说明本章的概念是如何用来评估真实的投资机会和项目的。合 28

★ 标有星号的部分第一次阅读本书时可跳过去不读。

适的分析方法通常需要创造性地思考来抓住问题的本质。

在读本章第一遍时，并不需要阅读所有的应用部分，但是当读者再次阅读本章时，这些例子会帮助你弄清楚这些基本概念。

净现金流

不管用净现值还是内部收益率进行现金流分析，必须用收入减去支出的净值（也就是净利润）作为每期的现金流。净利润通常可以用简单方法求得，但是在复杂的情形下，计算过程可能很琐碎。特别是，税收通常会使问题复杂化，因为某些应税成本和利润并不总是等于实际的现金流出和流入。我们将在后面的部分考虑税收。

现在，我们用一个相对简单的关于金矿的例子来进行净现值分析。随着我们对概念理解的延伸，各种不同的金矿例子将贯穿全书，用以说明我们如何对同类型的投资进行更深入的分析。辛普利可金矿是这一系列中最简单的。

例 2.6（辛普利可金矿，Simplico gold mine） 辛普利可金矿有大量的黄金蕴藏量，你是一个正在考虑租用该金矿 10 年的团队中的一员。这个矿每年可以每盎司 200 美元的成本提炼出至多 10 000 盎司的黄金。这个成本是开采和提炼的营运成本之和，不包括租赁费用。目前黄金市价为每盎司 400 美元，利率为 10%。假设金价、营运成本、利率在 10 年内不变，这项租赁的现值为多少？

这相当容易。我们忽略租赁费用，并只求营运利润的现值。很明显该矿应该每年都全部投入营运，得出利润为 10 000×（400－200）＝200 万美元/年。我们假设这些现金流每年年末发生。因此现金流由 10 笔每年发生在年末的 200 万美元的现金流量组成。现值相应就是：

$$PV = \sum_{k=1}^{10} 2\,000\,000/(1.1)^k$$

这可以通过直接加总，也可以通过等比数列的和公式计算，结果为 29

$$PV=2\ 000\ 000[1-(1/1.1)^{10}]\times 10=12\ 290\ 000 \text{ 美元}$$

这就是该项租赁的价值。

周期问题

当用利率理论来评估正在进行（可重复）的活动时，备选投资必须在相同时间跨度内进行比较。不过这样做可能引起的困难，将在伐木例子中说明。该例子中两个备选方案有不同的周期长度，但是周期合理重复的性质最初并没有被清楚地阐明。

这里我们说明两种正确计算不同周期长度的方法。第一种是重复每一个备选方案直到两者在同一时间点结束。例如，如果第一个方案持续 2 年而第二个持续 4 年，那么 2 遍第一个备选方案就可以与 1 遍第二个备选方案比较了。另一种比较有不同周期长度的备选方案的方法是假设一个备选方案将会无限重复下去。从而可写出计算整个无限期的现金流的简单等式。

例 2.7（购买汽车） 你在计划买一辆汽车并把选择范围缩小到 2 个选择。A 车价值 20 000 美元，并估计每年的维护费较低，为 1 000 美元（在第一年以后，每年都在年初支付），对你而言有 4 年的有效寿命。B 车值 30 000美元，并估计每年维护费为 2 000 美元（第一年以后）有效寿命为 6 年。两车都无残值。利率为 10%。应该买哪辆车呢？

我们通过假设类似的备选方案将来也是可行的，来分析这种选择——不考虑通货膨胀——因此这项购买是一系列的买车行为中的一次。为了使时间一致，我们假设一个 12 年的策划时期，对应于 A 车的 3 个周期和 B 车的 2 个周期。

我们分析单个周期并将它们组合如下：

A 车：

$$1\text{ 个周期 } PV_{\text{A}} = 20\,000 + 1\,000\sum_{k=1}^{3} 1/(1.1)^k = 22\,487\text{ 美元}$$

$$3\text{ 个周期 } PV_{\text{A3}} = PV_{\text{A}}[1 + 1/(1.1)^4 + 1/(1.1)^8] = 48\,336\text{ 美元}$$

80 B车：

$$1\text{ 个周期 } PV_{\text{B}} = 30\,000 + 2\,000\sum_{k=1}^{5} 1/(1.1)^k = 37\,582\text{ 美元}$$

$$2\text{ 个周期 } PV_{\text{B2}} = PV_{\text{B}}[1 + 1/(1.1)^6] = 58\,795\text{ 美元}$$

因此应该选 A 车，因为在相同的时间水平上它的现值更低。

例 2.8（机器更换） 一台对公司经营很重要的专用机器价值 10 000 美元，并且在第一年发生 2 000 美元的营运成本。此后的营运成本将每年递增 1 000 美元。假设这些营运成本发生在每年年末，利率为 10%。该机器应该被保持多长时间才被另外一台新的同样的机器代替呢？（假设由于其专用性，该机器无残值。）

这个例子事先现金流并不确定，因为不知道更换机器的时间。我们必须同时计算那些用新机器替代旧机器产生的现金流。这可以通过写出两头都含有 PV 的方程式来实现。例如，假设对机器每年进行一次更换。那么现金流（以千计算）为（-10，-2），接着为（0，-10，-2），然后是（0，0，-10，-2），以此类推。然而，我们可以简短地写出成本的总现值如下：

$$PV = 10 + 2/1.1 + PV/1.1$$

因为在第一台机器被替换以后，那一时点以后的现金流与原现金流看起来是完全相同的，除了一点不同，那就是这个接下去的现金流是发生在 1 年以后的，因此必须用 1 年期的利率进行贴现。该方程解为 $PV = 130$，或者以原单位计量，130 000 美元。

我们可以用同样的方法计算 2 年一换的，3 年一换的，如此下去。一般的解法是以下面这个方程为基础的：

$$PV_{total}=PV_{1cycle}+(1/1.1)^{k}PV_{total}$$

这里 k 是基本周期的长度。方程中的解很容易从表 2—3 中得出。

从表中我们看出，成本的最小现值是当机器 5 年以后替换时产生的。因此那是最好的更换策略。

表 2—3 机器更换

更换年度	现值
1	130 000
2	82 381
3	69 577
4	65 358
5	64 481
6	65 196

不同的更换频率得出不同的总现值。最好的原则就是选择使总现值最小的那个频率。

税收

税收可能使现金流价值分析变得复杂。并没有新的概念性问题产生，只是税收会使现金流的真实定义变得模糊不清。如果统一的税率分别应用于所有的收入和税收与贷款的支出中，那么税前和税后分析所得出的建议是一致的。从后者得出的各种不同的现值数字将仅仅与同一个因数成比例，也就 31
是，所有的现值数字将乘以（1—税率），内部收益率的值将相等。因此用净现值或者内部收益率排序得出的结论和无税情况是一致的。所以在我们的很多例子中都不考虑税收。然而，有时上报政府的税收表格上的现金流并不是真实现金流。这就是为什么公司通常有两个账户——一个是以税收为目的的，一个是以做决策为目的的，这种做法并不是非法的，它是由税收法规引起的现实问题。

税收引起的现金流变化经常与固定资产折旧的处理相关。政府把折旧作

为负现金流，但是这些现金流的确定时间，在报税时，很少与实际现金流出的发生时间一致。以下是一个说明这个偏差的简单的例子。

例 2.9（折旧） 假设一个公司以 10 000 美元购买一台机器。这台机器的有效寿命是 4 年，并且它每年可产生 3 000 美元的现金流。在第 4 年末该机器有残值为 2 000 美元。

政府不允许在第一年将机器的全价报告为费用，而是要求将机器成本按有效寿命进行折旧。有几种折旧方法，每种方法适用于不同的情况，但是为简化起见我们假设是直线折旧法。这种方法每年提取成本的固定比例部分作为折旧。因此对 4 年寿命来说，每年报告 1/4 的成本（减去估计残值）可作为费用从收入中扣除。

如果假设一个联邦和州的税率共计 43%，我们获得税前和税后现金流，如表 2—4 所示。残值不征税（因为它不折旧）。两笔现金流的现值（以 10%算）也如表 2—4 中所示。请注意在本例中税收规则将本来有利可图的营运转变为无利可图了。

32 **表 2—4** **税前和税后现金流**

年度	税前现金流	折旧	应税收入	税收	税后现金流
0	−10 000				−10 000
1	3 000	2 000	1 000	430	2 570
2	3 000	2 000	1 000	430	2 570
3	3 000	2 000	1 000	430	2 570
4	5 000	2 000	1 000	430	4 570
PV	876				−487

从现值的观点来看，对待折旧的税收规则能够把一个潜在盈利的投资变为无利可图的投资。

通货膨胀

通货膨胀是另一个经常引起迷惑的因素，这种迷惑由以实际美元价值和以购买力表示的价值描述现金流之间的选择所引起，后者由膨胀的美元将来

价值降低到名义水平所决定。

通货膨胀的表现是物价总水平的持续不断的上涨。在量上可用**通货膨胀率**（**inflation rate**）f 来表示。1 年以后的价格平均来说等于现在的价格乘以（$1+f$）。通货膨胀就像复利一样增加，因此以 f 的通胀水平 k 年后，价格将为原价的（$1+f)^k$ 倍。当然，通货膨胀率并不是保持不变的，但是在计划研究里未来通胀率通常估计为常数。

另一种认识通货膨胀的途径是它腐蚀了货币的购买力。例如，现在的 1 美元不如 10 年前的 1 美元购买的面包或牛奶多。换句话说，我们可以认为价格上涨了，或者，货币价值下降了。如果通货膨胀率为 f，那么以现在的购买力衡量的明年的 1 美元的价值就是 $1/(1+f)$。有时，根据同样的美元把消除通货膨胀的影响考虑明白是很有用的。因此我们引入相对于一个给定的参考年度定义的**不变美元**（**constant dollars**），换句话说为**实际美元**（**real dollars**）。它们是一直保持与参考年度里的美元一样购买力的（假设的）美元。这些美元定义与我们交易中实际使用的**现实**（**actual**）或者**名义美元**（**nominal dollars**）形成对照。

这促使我们定义一种新的利率，称为**实际利率**（**real interest rate**），实际美元按这个利率增长而如果放在银行账户则会支付名义利率。为了理解实际利率的意义，设想在时间点 0 将钱存入银行，然后 1 年后取出。尽管存在通货膨胀，银行账户余额的购买力也许还是增加了，这种增加就衡量了实际利率。

如果全面理解前面的思考，r 为名义利率而 f 是通货膨胀率时，容易得出：

$$1+r_0=(1+r)/(1+f)$$

这里 r_0 表示实际利率。这个等式表明了这样的事实：银行账户上的钱按因数 $1+r$ 增加（名义上）为原来的 $1+r$ 倍，但它的购买力按指数 $1/(1+f)$ 下降，可得出 r_0 为： 33

$$r_0=(r-f)/(1+f) \qquad (2—5)$$

请注意对于轻微的通胀，实际利率几乎等于名义利率减去通胀率。

进行一项现金流分析时可用现实（名义）美元或者实际美元，但是危险在于可能会粗心地使用两种美元概念的混合。这种混合有时发生在大公司的计划研究里。营运部门主要关心实物流入和流出，可能会将实际现金流推算到将来。但公司总部，主要关心金融市场和税收规则，可能会觉得名义（即现实）现金流用起来更方便，并且因此可能以名义利率进行贴现。结果可能是总部对那些营运部门递交的项目计划的估值比持续考虑通货膨胀的估值低估了。

现在，我们来说明如何持续用实际或名义现金流来进行分析。

例 2.10（通货膨胀） 假设通胀率为 4%，名义利率为 10%，我们有一笔实际（或不变）美元如表 2—5 第二栏所示。（通常以相对于现在的恒久美元来估值现金流，因为“普通”价格增长能够在简单现金流估值中忽略不计）要确定实际条件下的现值，我们必须用实际利率，从式（2—5）得出 $r_0=(0.10-0.04)/1.04=5.77\%$

表 2—5 **通货膨胀**

年度	实际现金流	PV@5.77%	名义现金流	PV@10%
0	−10 000	−10 000	−10 000	−10 000
1	5 000	4 727	5 200	4 727
2	5 000	4 469	5 408	4 469
3	5 000	4 226	5 624	4 226
4	3 000	2 397	3 510	2 397
总计		5 819		5 819

第二列的是预计实际现金流，它按实际利率计算现值，如第三列所示。第四列显示了通胀率为 4%的现金流，第五列显示了 10%的名义利率下它们的现值。

84 同样地，我们可用合适的通胀因子来扩大现金流数字，把现金流转化为现实（名义）现金流。因此，用名义利率 10%来确定现值，两种方法得出的结果相同。

2.7 小结

货币的时间价值具体表现为利率。1 年期的利率是借 1 年的钱而支付的价格（以本金的一个百分比来表示）。在单利时，借入资金第一年的利息与以后年度的利息相等。因此，例如，在银行里单笔存款的账户余额会一年一年地线性增长。在复利时，在以后年度中支付的利息是以该年年初账户余额为基础的。因此单笔存款的账户余额将一年一年地呈几何级数增长。

一个很有用的近似计算是每年按复利计算使存款翻一番的年数是 $72/i$，这里 i 是以百分比数表示的利率。例如，在 10%时，存款在大约 7 年里翻一番。

利率可以在任何频率下复利计息，并不只是每年。甚至可以连续复利计息，这使银行账户余额随着时间而指数性地增长。当利息比每年更频繁地以复利计息时，有必要同时定义名义利率和有效年利率。名义利率是以时期长度（以年）划分的单期的利率。当不应用复利计息时，有效利率是使得出来的账户余额与存满一年期的货币额总数相同的利率。有效利率比名义利率大。例如，8%的名义利率对应于每季度复利计息下的 8.24%的有效年利率。

将来得到的钱没有现在得到的同样金额值钱，因为现在得到的钱可以借出而得到利息。将来某日得到的钱必须用其数额除以一个因子进行贴现，如果将钱贷出直到将来的那一天的话，这个因子会使现在的钱增长。将来每一天都存在相应的贴现因子。

现金流的现值是该现金流的单个现金流量的贴现值之和。一个理想的银行可以将一笔现金流转变为另一笔与之有相同现值的现金流。

现金流的内部收益率是一种利率，如果用它来评估该笔现金流的现值，会导致现值为 0。总之，这个利率不好解释。然而，当现金流有一个初始负

流入然后接下来为正流入，内部收益率就好解释了。

现值和内部收益率是用来评估提议的产生决定性现金流的投资项目的两种主要方法。在现值框架中，如果有几个相互竞争的备选项目，那么其中有最高现值的项目将会被选中。在内部收益率准则下，有最高内部收益率的备选项目将被选中。

应用这些方法的分析并不总是那么简单。尤其是，考虑到不同周期长度、税收和通货膨胀时，每个因素都需要仔细对待。

练习

35 1.（一笔诱人的遗产）假设在 1776 年以 3.3%的年复利投资了 1 美元。

(a) 这笔投资今天大约值多少钱：1 000 美元，10 000 美元，100 000 美元，还是 1 000 000 美元？

(b) 要是利率为 6.6%，情况会是怎么样呢？

2.（72 规则）在利率 r 时一笔投资翻一番所需要的年数必须满足 $(1+r)^n=2$。利用 $\ln 2=0.69$ 和近似值 $\ln(1+r)\approx r$（对于很小的数值 r 有效），证明 $n\approx 69/i$，这里 i 是利率百分数（也就是 $i=100r$）。用更精确的近似 $\ln(1+r)\approx r-\frac{1}{2}r^2$，证明 $r\approx 0.08$ 时，$n\approx 72/i$。

3.（有效利率）求相应的有效利率：

(a) 3%每月复利计息；

(b) 18%每月复利计息；

(c) 18%每季复利计息。

4.（牛顿方法◇）计算 IRR 通常用一个反复程序。假设我们定义 $f(\lambda)=-a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_n\lambda^n$，这里所有的 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 为正，并且 $n>1$。这里有一个产生收敛于根 $\bar{\lambda}>0$ 的一系列估计数 λ_0，λ_1，λ_2，…，

λ_k，……的反复技巧，解方程 $f(\bar{\lambda})=0$。从任意接近于解的 λ_0 开始计算，假设 λ_k 已经被算出，判断

$$f'(\lambda_k)=a_1+2a_2\lambda_k+3a_3\lambda_k^2+\cdots+na_n\lambda_k^{n-1}$$

并定义

$$\lambda_{k+1}=\lambda_k-f(\lambda_k)\ /f'(\lambda_k)$$

这就是牛顿方法。通过作函数图在 λ_k 处的切线，计算函数 f 的近似值，如图 2—4 所示。试计算 $f(\lambda)=-1+\lambda+\lambda^2$。从 $\lambda_0=1$ 开始，并且计算另外 4 个估计值。

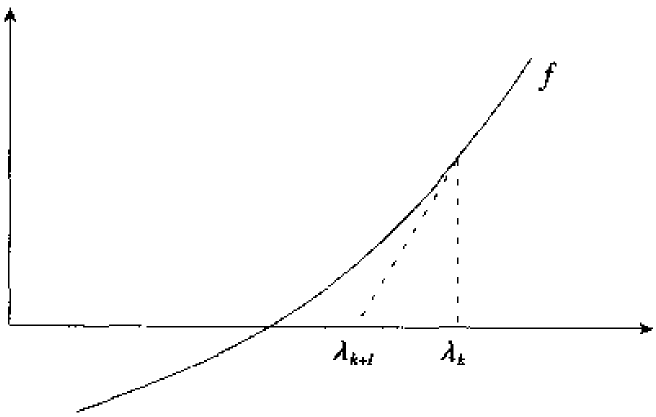


图 2—4　牛顿方法

5.（中彩奖）一个大型彩票广告中说将会对获奖者支付 1 000 万美元。 36
然而，获奖金额是每年支付 500 000 美元（第一笔是马上支付）共支付 20 年。在 10%的利率时这项奖的现值是多少?

6.（沉没成本）一对年轻夫妇在租用半年期的公寓时已经支付了第一个月的租金（等于 1 000 美元）——不可退还的保证金。第二天发现另一套他们同样喜欢的公寓，但月租仅 900 美元。他们计划在公寓里只住 6 个月。他们应该换成那套公寓吗？如果他们计划住 1 年呢？假设利率为 12%。

◇有◇的练习在数学方面比一般水平的难。

7.（捷径）杰维·琼斯求知欲很强并决定同时学习投资学的理论和应用。他急切要求农场主给出更多信息，并且得知有可能延迟例 2.4 中的伐木到另一年。农场主说，从现值方面说，不值得这么做。杰维马上推算出得到的收入肯定少于 x。求 x 为多少？

8.（复印机⊕）有两台复印机。两者有效寿命都为 5 年。一台可以租赁或者购买；另一台必须是购买。因此总共有三种选择：A，B，C。详细描述如表 2—6 所示。（第一年的维护费包括在初始成本里。因此，每年年初共有四个额外的维护费支出，外加转售费。）这三种选择的费用在 10%利率时的现值同样显示在表中。根据现值分析，要使用现值衡量的机器成本最小，应该选择 B。

这些选择不可能计算 IRR，因为所有的现金流都为负（除了转售值）。然而，可以在增量的基础上计算 IRR。求出从 A 转变为 B 的 IRR。在 IRR 基础上计算 A 转变为 B 合理吗？

表 2—6 **选择复印机** 单位：美元

	选项		
	A	B	C
初始流出	6 000	30 000	35 000
每年的费用	8 000	2 000	1 600
转售值	0	10 000	12 000
现值（@10%）	31 359	30 131	32 621

A 选项是租赁；B 和 C 选项是分别购买这两台机器。所有的选项的寿命都是 5 年。

9.（一项评估）你正在考虑买一套漂亮的房子。除了屋顶它在各方面都
37 很完美，并且处于很好的状况中。屋顶仅有 5 年的寿命期。一个新屋顶能保持 20 年，但要花 2 万美元。这套房子会一直保存下去。假设成本保持不变并且利率为 5%，你将分摊在屋顶上多少钱？

⊕标有⊕的练习需要数字计算。

10. （耗油免税额㊉）一个富有的投资者花了 100 万美元开发了一个油井，这个油井估计有 200 000 桶油的储藏量。油井将营运 5 年，生产出的产量大约如表 2—7 的第二列所示。估计油价为每桶 20 美元。净收入也如表所示。

表 2—7 **原油投资细节** 单位：美元

年度	产量（桶）	总收入	净收入	选项 1	选项 2	免税额	应税收入	税 收	税后收入
1	80 000	1 600 000	1 200 000	352 000	400 000	400 000	800 000	360 000	840 000
2	70 000	1 400 000	1 000 000						
3	50 000	1 000 000	500 000						
4	30 000	600 000	200 000						
5	10 000	200 000	50 000						

关于耗油免税额，每年可以用两种方法中的一种来计算：从总收入的 22%直到净收入的 50%作税前扣除（选项 1），或者作为投资的生产成本，在本题中等于单位储存成本，每桶 5 美元（选项 2）。免税额从净收入中减去以决定应税收入。投资者属于 45%税率这一级。

(a) 完成表 2—7 并证明总的免税额超过初始投资。

(b) 计算此投资的 PV 和 IRR。假设利率为 20%。

11. （互相冲突的建议㊉）考虑两个项目，其现金流如表 2—8 所示。求出两个项目的 IRR 和在 5%利率时的 NPV。说明 IRR 和 NPV 数字产生不同的建议。你能解释它吗？

表 2—8

	年度					
	0	1	2	3	4	5
项目 1	−100	30	30	30	30	30
项目 2	−150	42	42	42	42	42

12. (占有优势) 假设两个相互竞争的项目有以下现金流形式 $(-A_1, B_1, B_1, \cdots, B_1)$ 和 $(-A_2, B_2, B_2, \cdots, B_2)$，两者有相同长度并且 A_1，A_2，B_1，B_2 都为正，假设 $B_1/A_1 > B_2/A_2$。表明项目 1 比项目 2 的 IRR 高。

38 13. (相交◇) 一般来讲，我们说分别有现金流 x_i 和 $y_i, i = 0,1,2,\cdots,n$ 的两个项目，如果 $x_0 < y_0$ 并且 $\sum_{i=0}^{n} x_i > \sum_{i=0}^{n} y_i$，则会相交。假设 $P_x(d)$ 和 $P_y(d)$ 表示在贴现因子为 d 时两个项目的现值。

(a) 说明有一个交点值 $c>0$ 使 $P_x(c) = P_y(c)$。

(b) 对练习 11，计算相交值 c。

14. (折旧选择) 美国的加速成本恢复系统 (ACRS) 必须应用于 1980 年 12 月以后投入使用的资产的折旧。在这个系统中，资产被划分成指定有效税收寿命的类别。例如，"3 年期资产" 包括汽车、用来拖挂车的拖拉机、轻型卡车和某些生产工具。3 年期资产能在购买后的前 3 年 (包括购买当年) 中每年作税收扣减的成本比率分别为 25%，38%，37%。税法允许用另一种 ACRS 方法，对 3 年期资产来说它意味着可用 3 年的直线折旧比率，$33\frac{1}{3}\%$。

对于一个想要使折旧的现值最大化的人来说，他更喜欢哪种方法呢？这个选择如何依赖于假设的利率？

15. (一种错误的分析) ABBOX 公司的一个部门开发了一种新产品。该产品的生产需要初始资本费用 1 000 万美元。预期有 5 年，该产品每年售出 100 万单位，然后将会过时并停止生产。每年的生产需要 10 000 小时的劳动力和 100 吨的原材料。目前的平均工资率是每小时 30 美元而原材料成本是每吨 100 美元。该产品卖价将为每单位 3.3 美元，这个价格将会保持下去 (实际物价水平)。ABBOX 管理层会对这类项目应用 12% 的贴现率，并且其利润会有 34% 的税率。初始资本费用可以在 5 年内用直线折旧法。在这个项目的第一次分析中，管理层没有用通胀因子来推算收入和营运成本。他们会得到多少现值？如果应用了 4% 的通胀率答案会如何变化？

【参考文献】

很多优秀的教材里都有利率理论、复利计息、现值和内部收益率的内容。在投资方面的教材里讨论利率一般概念的是文献［1～5］。用 NPV 和 IRR 来排列投资备选项目的用法在经济工程学领域发展得很充分，在此方面的优秀教材包括文献［6～9］。对利息的更深入研究是文献［10］，它包含了连续时间方面的“何时伐木”例子，这导出了在 2.5 节里的例子。练习 10 是对文献［6］里面的一个例子的修改。

1. Alexander, G. J., W. F. Sharpe, and V. J. Bailey (1993), *Fundamentals of Investment*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. Bodie, H. M., A. Kane, and A. J. Marcus (1993), *Investments*, 2nd ed., Irwin, Homewood, IL.
3. Brealey, R., and S. Meyers (1981), *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill, New York.
4. Francis, J. C. (1991), *Investments: Analysis and Management*, 5th 39
ed., McGraw-Hill, New York.
5. Haugen, R. A. (1993), *Modern Investment Theory*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
6. DeGarmo, E. P., W. G. Sullivan, and J. A. Bontadelli (1988), *Engineering Economy*, 8th ed., Macmillan, New York.
7. Grant, E. L., W. G. Ireson, and R. S. Leavensworth (1982), *Principles of Engineering Economy*, 7th ed., Wiley, New York.
8. Steiner, H. M. (1992), *Engineering Economy*, McGraw-Hill, New York.
9. Thuesen, G. J., and W. J. Fabrycky (1989), *Engineering Economy*, 7th ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
10. Hirshleifer, J. (1970), *Investment, Interest, and Capital*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

第3章 固定收益证券

40 利率是所有交易的商品中最受欢迎的商品——货币的价格，或者租金。比如，一年期利率，是1年期贷款必须支付的价格。货币市场发展良好，并且相应的基本市场价格——利息——被那些高度关注金融活动的人密切注视着。

如前一章所示，市场利率为产生现金流的投资备选项目提供了一个方便的对照。这个对照可以用来评估任意的现金流：不管是与商业项目有关的个人交易产生的现金流，还是由证券投资产生的现金流。

然而，与利率相关的整个市场比上一章讨论的简单的银行账户更复杂。各种各样的凭单、票据、债券、年金、期货合同和抵押贷款都是充分发展的货币市场的一部分。这些市场的元素并不是有内在价值意义上的实物商品（或有形资产）——比如土豆或金子—— 而是以纸币来交易，或者以电脑数据库的要素来交易。一般来说，这些市场元素，称为**金融工具**（**financial instruments**）。它们的价值来自于它们所代表的承诺。如果一种金融工具的市场发展良好，那么对它的交易能够很自由和容易地进行，此种金融工具就称为**证券**（**security**）。有很多金融工具和证券直接与利率相关，因此，它们提供以合适的利率或比率定义的价格得到收入的途径。

固定收益证券（**fixed-income securities**）是在很发达的金融市场上交易的金融工具，并且对持有一段时期的持有者承诺支付一笔固定的（也就是，确定的）收益。以本书的术语来讲，它们代表对一笔确定的现金流的所有权。

固定收益证券对于一个投资者来说很重要，因为它们确定了货币市场的范畴，并且有许多投资者参与这个市场。当对那些没有在市场上交易的投资机会，比如对公司研究项目、石油勘探、专利权这些投资机会作分析时，这些证券作为附加参照点同样也很重要。对金融工具的深入学习很自然地就从 41
学习固定收益证券开始。

3.1　未来现金流的市场

对于固定收益证券的这种划分实际上有一点模棱两可。就如前面所述一样，最初这种划分意味着固定收益证券是支付证券所有者固定的、很好确定的现金流。关于这已承诺了的现金流的惟一不确定性就是证券发行者是否会**违约**（**default**）（也就是说，破产），一旦违约收入将会中断或者推迟。然而，现在有些“固定收益”证券承诺现金流量的大小与不同的意外事件或浮动指数相联系。例如，可调节利率的抵押贷款的支付水平可能与一种利率指

数相联系，或者公司债券的支付可能会某种程度上受一种股票价格的调控。但是一般说来，在对固定收益证券的更广泛的界定里，是容许这种变化的。大意就是说一种固定收益证券，除了在明确界定的意外情形下有变化外，是有固定的现金流的。

有很多种不同的固定收益证券，我们无法作出全面的考察。但是，为了说明这种证券的大概范畴，我们会提到一些基本类型的固定收益证券。

储蓄存款

最为人所熟悉的固定收益金融工具大概就是生息的银行储蓄存款。它们由商业银行、储蓄与贷款机构，以及信用社来提供。在美国，这种存款大多数是由联邦政府机构来担保的。最简单的**活期存款（demand deposit）**根据不同的市场状况而支付利率。在很长的时期里，这种存款并不是严格意义上的固定收益类型，但我们把它归为固定收益一类。**定期储蓄账户（Time deposit accout）**的利息是有保证的，这种存款账户必须维持给定的时期（比如6个月），否则提前取出就会估定一笔罚金。一种相似的金融工具是**存单（certificate of deposit，CD）**，它以标准的面额，比如10 000美元来发行。大面额存单能够在市场中销售，因此，可以作为证券。

货币市场工具

货币市场是指公司或金融中介（比如，包括银行）的短期（1年或1年以下）贷款市场。它是为大额货币设计的很有组织的市场，但由于它的短期性和特殊性而对长期投资者不是很重要。在这个市场里，**商业票据（com-
42 mercial paper）**这个术语用来描述向公司提供的无担保贷款（也就是说，无担保品的贷款），前面提及的大面额存单同样是这个市场的一部分。

银行承兑票据（banker's acceptance）是一种更复杂的货币市场工具。如果A公司向B公司出售商品，B公司可能会向A公司发出书面承诺：它将在固定的期限内，比如3个月内付清货款。有些银行通过代表B公司承

诺支付该笔账务作承兑。A 公司就可以在到期日之前以一个折扣价将这张银行承兑票据卖给别人。

欧洲美元存款是以美元表示的存放在美国境外银行的存款。同样，欧洲美元 CD 是以美元表示的由美国境外银行发行的大额可转让存单。欧洲美元与美国本土美元的区别在于银行业监管和保险制度的差异。

美国政府证券

美国政府通过发行不同类型的固定收益证券来获得贷款。这些证券被认为有最高的信用，因为它们由政府担保。最重要的政府证券概括如下。

美国国库券（U.S. Treasury bills）以 10 000 美元或更大的面额发行，并且其固定的到期期限为 13 周，26 周和 52 周。它们以折扣价卖出。因此一张面值为 10 000 美元的国库券可能以 9 500 美元卖出，价格和面值之间的差价就是利息。一张债券可以在到期日以面值偿还。每周都提供新债券并以拍卖的形式卖出。这些国库券有很高的流动性（也就是说，它们有极便利的交易市场），因此，很容易在到期日前卖出。

美国中期国债（U.S. Treasury notes）有 1 到 10 年的期限，并且卖出的面额最小为 1 000 美元。这种国债的所有者在到期日之前每 6 个月收到一次利息（**coupon payment**）。这种息票支付表示利息支付，并且息票的大小在整个债券期限内是固定的。在到期日债券持有人收到最后一次利息和债券的面值。像国库券一样，这种债券也以拍卖的形式卖出。

美国长期国债（U.S. Treasury bonds）是以长于 10 年的期限来发行的。在支付息票方面它们与中期国债相似。然而，有些长期国债是**可赎回的（callable）**，意味着在某个安排好的息票支付日，财政部可以强行要求债券持有人以面值（平价）结清该债券。

美国息票剥离债券（U.S. Treasury strips）是指美国财政部以剥离的形式发行的长期债券。此时每张息票单独发行，就如本金一样。因此 10 年期的债券剥离后就由 20 张半年期的证券（每张有单独的 CUSIP[1]）和一张本

43 金证券组成。每张这样的证券单独产生单笔现金流量，其间没有息票支付。这种证券称为**零息票债券**（**zero-coupon bond**）。

其他债券

债券由联邦政府机构、州和地方政府，以及公司发行。

市政债券（**municipal bonds**）由州和地方政府机构发行。有两种主要类型：**普通债务债券**（**general obligation bonds**），由行政机构比如州来支持；**收益债券**（**revenue**），由最初该债券融资的项目产生的收益或者对该项目负责的机构来支持。

市政债券产生的利息收入是免除联邦所得税和发行所在州的州和地方税的。这个特点意味着与其他有相似条件的证券相比投资者愿意接受这种债券低一些的利率。

公司债（**corporate bonds**）是公司为了筹集营运资本和创业而发行的。它们根据发行公司的实力和债券的某些特点而质量各异。

有些公司债在交易所交易，但大多数是以场外交易的方式在债券交易商的网络上进行交易。这些场外交易债券某次发行可能每天只有几笔交易，在这个意义上，其流动性要差一些。

每张债券都附带一个契约，它是各种条件的合同，可能包含如下的特征。

可赎回债券（**callable bonds**）如果发行者有权利以指定的价格将债券回购，则这种债券是可赎回的。一般来说，这个赎回价格随着时间而下降，并且通常有一个最初的赎回保护期，在这个期间该债券不可赎回。

偿债基金（**sinking funds**）发行者承担偿还义务并不是说在到期日才将债券的所有面值一次支付完，而是建立一个偿债基金来分期偿还。在这种安排下发行者可能会每年以指定的价格回购部分持偿债券。

债务附属化（**debt subordination**）为了保护债券持有人，会对发行者的追加借款额设置限定。债券持有人同样会受到破产时的担保，这些债务的偿还优先于其他债务——其他居于次要地位的债务。

抵押契约

对于一个典型的房主，抵押契约看起来就像是债券的反面。一个将来的房主通常会卖出一项住房抵押契约马上获得现金以对住房进行支付，他或她自己承担分期付款给抵押契约持有者的义务。标准的抵押契约是安排得很有组织的，这样在整个期间每月都支付相同的金额，这与很多债券都相反，很多债券都是在到期日最后偿付与面值相等的金额。许多标准抵押契约允许提前偿还债务余额。因此以抵押契约持有者的观点看，其产生的 44
收入流并不完全是固定的，因为它有可能在房主的斟酌下以一个合适的一次性偿付而终结。

标准抵押契约有很多种变动。可以是几年里面每期进行小额偿付，然后紧接着有一笔最后的**期末大笔支付（balloon payment）**来终结此契约。可调节利率的抵押契约根据一种利率指数周期性地调节有效利率，因此这些抵押契约在严格意义上并不真正产生固定收入。

人们通常并不把抵押契约认为是证券，因为它们是双方立下的契约，比如，双方为房主和银行。然而，抵押契约典型地被“捆绑”成大的证券包并在金融机构交易。这些**抵押担保证券（Mortgage-backed securities）**流动性很强。

年金

年金（annuity）是根据一个事先确定的计划或方案在一段时间里周期性地向持有者（**年金受领人（annuitant）**）进行支付的合同。养老金通常采取年金的方式。有时年金被构造成在年金受益者的生存年限里每年向他们支付一笔固定的金额，在这种情况下年金的价格是基于年金受益者购买年金时的年龄和从购买年金到支付之间的时间长短。

年金有很多的变化形式。有时年余的支付水平与一个赖以进行年金支付的很大的基金池的收入相联系，有时支付额随时间而变化，等等。

年金实际上并不是证券，因为它们没有用来交易。（如果年金支付与其

所有者的寿命有关，发行者当然不允许年金受益人的变动；同样，年金受益人也不会允许年金公司把它们的支付义务转移给另外一个偿付力不那么强的公司。）然而，当利率为标准化时年金也被认为是一种投资机会。因此从投资者的观点看，它们和其他固定收益金融工具起着相同的作用。

3.2 价值公式

许多固定收益金融工具包含一项支付--笔每期金额相等的现金流的义务。这是有规律地支付固定金额给持有者的标准息票债券的特征。这同样是标准抵押契约：许多年金、标准汽车贷款和其他消费贷款的特征。因此认识到这种不变现金流的现值可以由一个简短的公式来确定是非常有用的。这个公式很难用手来计算，因此每天和这些金融工具打交道的专业化工作专门有可利用的合适的表格、便携式计算器，或者那些把分期付款的数额和条件与现值相联系的电脑程序。例如，有大量的抵押表格、债券表格、年金率表格等等。我们在此应该扩展基本公式并说明它的用法。

永续年金

45 作为扩展公式的一个过渡，我们考虑一个有趣的和概念上很有用的称为**永续年金（perpetual annuity, or perpetuity）**的固定收益金融工具，它永远进行周期性的固定金额的支付。例如，可能是永远在每个 1 月 1 日支付 1 000美元。这种年金很少见（虽然此种金融工具事实上在英国存在，那里称它们为**统一公债（consols)**）。

很容易得出永续年金的现值。假设从第一期期末开始每期末支付金额 A，并假设每期的利率都为 r。那么现值为

$$P=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A}{(1+r)^k}$$

在求和式中的各项代表一个等比数列，并且这个数列能用一个标准的公式进行加总。如果你已经忘记了标准公式，我们可以通过下面的关系推导得出：

$$P=\sum_{k=1}^{\infty}=\frac{A}{(1+r)^{k}}=\frac{A}{(1+r)}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A}{(1+r)^{k}}=\frac{A}{1+r}+\frac{P}{1+r}$$

我们可以解方程得出 $P=A/r$。因此我们有以下基本结论：

⇒**永续年金公式（perpetual annuity formula）** *从现在开始为第一期的，每期支付金额为 A 的永续年金，其现值为：$P=\frac{A}{r}$，这里 r 是单期利率。*

例 3.1（永续年金） 考虑一项每年支付 1 000 美元的永续年金。当利率为 10%时其现值为

$$P=\frac{1\ 000}{0.10}=10\ 000\text{ 美元}$$

时期有限的现金流

更具有现实意义的是现金流的支付时期为有限的情形。假设一笔现金流由每期金额为 A 的 n 期支付组成，在当期期末开始发生，并在第 n 期结束。每期的现金流形式和时间排序方法如图 3—1 所示。

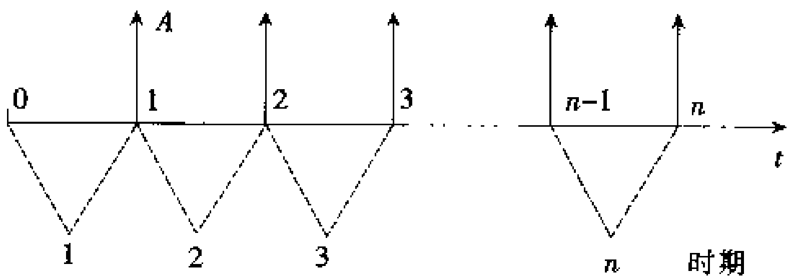


图 3—1 时间排序

时间从 0 标到 n。一个时期是两个时间点之间的时间段，第一期就是从 0 到 1 之间的时间段。一个标准的年金在每期期末都有不变的现金流。

在每期利率为 r 时的有限时期现金流的现值为

$$P=\sum_{k=1}^{n}\frac{A}{(1+r)^k}$$

46 这是一个有限等比数列的和。如果你不记得这个代数和公式，我们很容易用一个简单的方法求出。其值可以通过考虑两项永续年金来得出。两项都是每年支付金额 A，但是有一项是从第 1 期开始而另一项是从第 $n+1$ 期开始。我们用第一项永续年金减去第二项。其结果就与原来的时期有限的现金流结果一致。图 3—2 说明了有 3 期现金流量的这种组合情况。

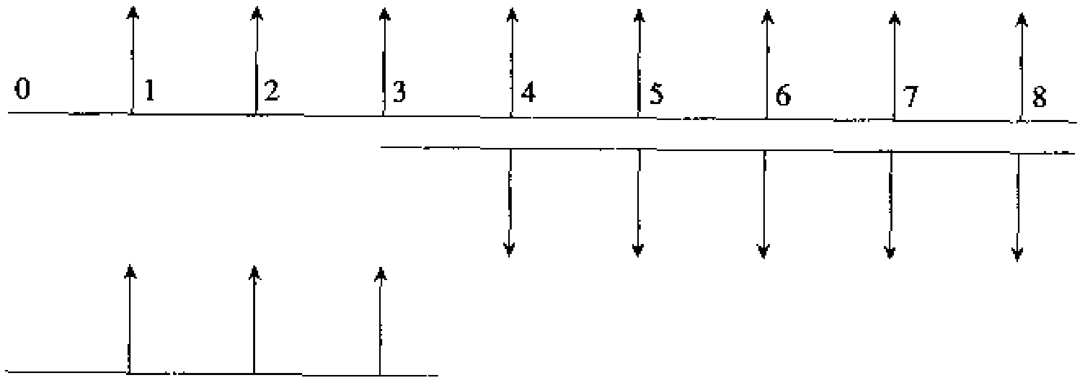


图 3—2 从两笔永续年金得出的有限时期的现金流

上面的线表示从时间点 1 开始的永续年金，向下箭线表示从时间点 4 开始的负的永续年金。这两笔永续年金的和得出一个从时间点 1 到时间点 3 的时期有限的年金。

延迟年金的现值可以通过因子 $(1+r)^{-n}$ 贴现该年金得出，因为它推迟了 n 期。因此我们可写出：

$$P=\frac{A}{r}-\frac{A}{r\ (1+r)^n}=\frac{A}{r}\ \left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

现在我们强调一下这个重要结论：

⇒**年金公式（Annuity formulas）** *考虑一项从现在开始支付第一笔金额的年金，每期支付金额 A，共有 n 期。现值 P，单期年金额 A，单期利率 r，年金期数 n 通过下式联系起来：*

$$P=\frac{A}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

或者，同样地，

$$A=\frac{r(1+r)^nP}{(1+r)^n-1}$$

虽然这些公式概念上很简单并容易推导，但是它们很复杂而无法用手算完成。因此普遍地用到金融表格和金融计算器。这种类型的专业表格占了几页的篇幅，并且通常将 P/A 表示成 r 和 n 的函数。因为某些原因使用 A/P（刚好是倒数）更方便些，两种方法的表格都有。 47

值得注意的是本节的公式中，r 表述为单期利率。如果期限长度并不等于 1 年，这个 r 就不等于年利率，因此必须留意。

年金公式经常反过来用，也就是，A 作为 P 的函数。这个公式确定了相当于初始支付 P（在假设的利率下）的每期支付额 A。这种把当前的债务替换成分期支付的过程叫做**分期偿还（amortization）**。因此一个人可能会通过 5 年期贷款而在 5 年内**分期偿还（amortize）**购买汽车的成本。

例 3.2（贷款计算） 假设你从信用社借入 1 000 美元。该贷款的条件是在 12%的年利率下按每月复利计息。你将在 5 年里每个月支付相等金额以偿还（分期偿还）这笔贷款。每个月应偿还多少？

5 年就是 60 个月，12%的年率每月复利计息 1%的月利。因此我们在公式里用 $n=60$，$r=1\%$和 $P=1\ 000$ 美元，得出每月支付 A 为 22.20 美元。

例 3.3（APR） 在表 3—1 中显示了一个典型的抵押契约经纪人打出的广告。除了利率、贷款期限、最大额度外，还列出了百分点和年度百分比收益率（APR），它们说明了各种费用和开支。百分点是提供抵押贷款所索取的该贷款额的一个百分比，一般来讲，同时还有附加费用。所有这些费用和

48 开支都要加入贷款账户余额，总额以标明的费率在标明的时期里分期偿还。这导致的是每月固定支付额 A。

表 3—1　　抵押契约经纪人的广告

利率	百分点	期限	最大额度（美元）	APR
7.625	1.00	30 年	203 150	7.883
7.875	0.50	30 年	203 150	8.083
8.125	2.25	30 年	600 000	8.399
7.000	1.00	15 年	203 150	7.429
7.500	1.00	15 年	600 000	7.859
Call 555—1213 Real Estate Broker, CA Dept. Of Real Estate, Mortgage Masters, Inc Current fixed Rates				

APR 是隐含了与抵押贷款相关联的费用的利率。

APR 是这样一种利率，如果把它应用于不计费用和支出的贷款额，将会导致每月支付金额 A 和前面的完全一样。

举一个具体的例子，假设你取得了一份与表 3—1 第一行对应的抵押贷款，我们来计算总的费用开支。用 7.883%的 APR，总额为 203 150 美元，期限为 30 年，我们得出每月支付 A=1 474 美元。

现在用 7.625%的利率和每月支付金额计算，我们得出初始总额为 208 267美元。因此总的费用和支出为 208 267—203 150=5 117 美元。贷款的费用为 1 个百分点，或者 2 032 美元。因此其他的支出为 5 117—2 032=3 085 美元。

连续摊销

可以用另外一种方法来看待摊销公式，这种方法直接与一般会计操作相

联系。考虑在例子3.2中的贷款1 000美元，你将在5年内以12%的利率（每月复利计息）来偿还。假设你在1月1日取得了贷款，第一笔支付发生在2月1日。偿还过程可以看作是连续月度账户的贷方。该账户的初始余额与贷款额相等——最初的本金。每月这个账户按1%的利息费用增加而又由于每个月的支付而减少。假设你按照计划支付，这个账户就每月减少一些，60个月后达到0。在7月1日你可能会收到一张6个月的账目表如表格3—2所示，它说明该账户如何随着每次的支付而减少。

表3—2 **交易清单**

	之前的账户	当前的利息	偿还额	新的账户
1月1日				1 000.00
2月1日	1 000.00	10.00	22.20	987.80
3月1日	987.80	9.88	22.20	975.48
4月1日	975.48	9.75	22.20	963.03
5月1日	963.03	9.63	22.20	950.46
6月1日	950.46	9.50	22.20	937.76

在每个月，该月之前的账户积累起利息同时又被每个月的偿还减少。在贷款期限末该账户金额为0。

通常把每次支付看成两部分。第一部分是目前的利息；第二部分是对本金的部分偿还。连续账户程序与该贷款每个月的再摊销一致。特别地，假设所有的到期支付都是按计划进行的，并且是合适的额度，原合同中由公式预测的剩余股份分期偿还与当前余额的支付水平总是22.20美元。例如，在7月的账户基础上，你可以从6月1日（6月1日支付以后）开始，以12%的利率，在55个月内分期偿还937.76美元。这个分期偿还要求的每月支付是22.20美元。 49

年度价值*

年金框架为净现值分析提供了另外一种方法。这个**年度价值**（**annual**

worth）方法的优势在于它以不变的现金流量来表示结果，因此很好理解。

假设一个项目与 n 年的现金流（x_0，x_1，…，x_n）有关。现值分析利用一个（虚构的）利率为 r 的永恒理想银行，将这笔现金流假想地转化成等价形式（v，0，0，…，0），这里 v 是现金流的净现值。

年度价值分析用相同的理想银行来假想地将该数列转化成（0，A，A，A，…，A）的形式。数值 A 是该项目的年价值（在 n 年期间）。如果所有的数额都转化成一个从第一年开始的 n 年期的固定年金，A 是由该项目产生的相等净额。

很明显，仅当 $v>0$ 时 $A>0$，因此基于是否 $A>0$ 而接受该项目的条件与净现值标准一致。

例 3.4（资本成本） 购买一台价值 100 000 美元的机器（在时间点 0 上），预期将在以后的 10 年里从第一年开始每年产生 25 000 美元的附加收入。如果贴现率是 16%，这是否是一项有利可图的投资？

我们只需要决定如何将初始成本在 10 年里面平均地摊销，也就是说，我们需要找出在 16%的贴现率时其总和与初始成本相等的每年的支付。用年金公式，我们发现这对应于每年 20 690 美元。因此该项目的年价值为 25 000−20 690=4 310 美元，为正数，因此该投资有利可图。注意如果该机器的购买是在 10 年里以 16%的利率融资，实际年净现金流将与年价值完全对应。

3.3 债券的详细介绍

债券到目前为止是固定收益证券中所占金额最大的，并且是这些证券中流动性最强的一种类型。我们给予债券特别的关注，既因为它作为投资载体在实务上的重要性，又因为它的理论价值，这将在第 4 章深入地剖析。本节

我们描述债券的一般结构和交易机制，然后在以后的章节中讨论一些分析债券的方法。我们打算作概览性描述，许多细节很复杂，你必须参考专业文献或者参照经纪公司来查看任何特殊债券发行的准确特征。

债券（**bond**）是发行人根据债券发行时规定的规则向债券持有人支付货币的一种义务。一般来说，一张债券支付一笔具体的数额，它的**面值**（**face value**）或者，也可以说，是它在到期日的**平价**（**par value**）。债券的平价一般是相同的数额，比如 1 000 美元或者 10 000 美元。另外，很多债券每期支付息票。叫做息票是因为过去实际的息票都附在债券凭证上。债券持有人按规定的日期每次邮寄一张息票到发行代理处（通常为银行），然后合适的息票支付金额将通过邮寄方式返还给持有人。这种有形的息票现在很少见了，但是名称还保留着。最后一次付息票日期对应着到期日，因此最后一笔支付等于面值加上一次息票价值。 50

息票额是用面值的百分比来描述的。例如，一张面值为 1 000 美元的 9%息票债券每年就有 90 美元的息票。然而，息票支付间隔的时间可能会短于一年。在美国，一般每六个月支付一次息票，支付年息票金额的一半。这在该例子中就为 45 美元。

债券发行者最初卖出债券以迅速筹集资金，然后就不得不作出规定的支付。通常债券发行时的息票率与市场利率接近，这样就能按近似面值的价格将它们卖出。然而，随着时间推移，债券经常不按面值交易。当任意的交易双方达成一个价格并且执行交易时，大量的债券或者以拍卖（最初发行时）的形式或者通过交易机构卖出。因此债券价格由市场决定并且每分每秒都在变化。

表格 3—3 是公众可购买的债券的报价（美国长期国债和中期国债）的一个例子。这里显示的息票率是年率（在这个例子中每六个月支付其中的一半）。到期月份是指定的，到期日随发行变化，但是美国长期国债和中期国债通常为到期月份的 15 号。报价为面值的一个百分比，因此如果面值为 1 000美元，标为 100 的价格就表示 1 000 美元。**买价**（**bid price**）是交易商 51

愿意支付的债券价格，因此按该价格债券能很迅速地卖出；而**要价**（**ask price**）是按该价格交易商愿意卖出债券，因此在该价格上债券能很迅速地买入。一个特殊和很不方便的特征就是价格以 32 分之几的形式来标出，在表 3—3 中显示的最后一种债券的买价是 103 21/32，对于面值为 1 000 美元的债券来说价格为 1 036.56 美元。显示的收益是按后面章节描述的方法以要价为基础计算的。

表 3—3　　美国国库券，中期国债，长期国债

中长期政府债券											
利率	到期期限 月/年	出价	要价	变化量	要求的收益率	利率	到期期限 月/年	出价	要价	变化量	要求的收益率
						$5^{7/8}$	2 月 04n	97：28	97：29	+9	6.25
$4^{3/4}$	2 月 97n	99：31	100：00	……	4.64	$7^{1/4}$	5 月 04n	105：20	105：22	+11	6.26
$6^{3/4}$	2 月 97n	100：00	100：02	−1	4.98	$12^{3/8}$	5 月 04	135：03	135：09	+18	6.24
$6^{7/8}$	2 月 97n	100：00	100：02	−1	5.09	$7^{1/4}$	8 月 04n	105：21	105：25	+13	6.27
$6^{5/8}$	3 月 97n	100：04	100：06	……	4.97	$13^{3/4}$	8 月 04	144：04	144：10	+20	6.26
$6^{7/8}$	3 月 97n	100：05	100：07	……	4.97	$7^{7/8}$	11 月 04n	109：20	109：22	+16	6.27
$8^{1/2}$	4 月 97n	100：15	100：17	−1	5.10	$11^{5/8}$	11 月 04n	132：08	132：14	+19	6.27
$6^{1/2}$	4 月 97n	100：07	100：09	……	5.03	$7^{1/2}$	2 月 05n	107：09	107：12	+11	6.31
$6^{7/8}$	4 月 97n	100：09	100：11	……	5.10	$6^{1/2}$	5 月 05n	101：08	101：10	+17	6.29
$6^{1/2}$	5 月 97n	100：08	100：10	……	5.14	$8^{1/4}$	5 月 00—05	105：24	105：26	+6	6.24
$8^{1/2}$	5 月 97n	100：24	100：26	……	5.08	12	5 月 05	136：00	136：06	+20	6.30
$6^{1/8}$	5 月 97n	100：06	100：08	+1	5.19	$6^{1/2}$	8 月 05n	101：08	101：10	+18	6.30
$6^{3/4}$	5 月 97n	100：11	100：13	……	5.26	$10^{3/4}$	8 月 05	128：20	128：26	+20	6.32
$5^{5/8}$	6 月 97n	100：03	100：05	……	5.16	$5^{7/8}$	11 月 05n	97：01	97：03	+18	6.31
$6^{3/8}$	6 月 97n	100：12	100：14	……	5.15	$5^{5/8}$	2 月 06n	95：08	95：10	+18	6.32
$8^{1/2}$	7 月 97n	101：09	101：11	……	5.17	$9^{3/8}$	2 月 06	120：25	120：31	+21	6.29
$5^{1/2}$	7 月 97n	100：02	100：04	+1	5.21	$6^{7/8}$	5 月 06n	103：21	103：23	+19	6.34
						息票利率	到期日	Denotes note	价格	要价变化	到期收益率

报价是以面值的一个百分比的形式，分数部分是以 32 分之几的形式表示的。应计利息应该计入报价。

资料来源：*The Wall Street Journal*，February 14，1997.

债券标价忽略了**应计利息**（**accrued interest**），必须将它加入标价以获得应该对债券支付的实际数额。假设一张债券每六个月支付一次利息。如果你在息票期间的中途购买债券，你就会在仅仅 3 个月后得到第一笔息票支付。你得到了额外的利息——在理论上应该由前一个债券所有人得到的利息。因此你必须向前一个债券所有人支付 3 个月的利息。这个利息支付是在卖出债券时进行的，而不是在支付下一次息票的时候，因此这个利息支付看起来像是附加在价格上的。必须向前一个债券所有人支付的应计利息是以天为基础用线性插值法确定的。具体地，应计利息（AI）是

$$AI=\frac{\text{从上次息票支付开始计的天数}}{\text{目前息票期间的天数}}\times\text{息票金额}$$

例 3.5（计算应计利息） 假设我们在 5 月 8 日购买一张到期日为将来某年 8 月 15 日的美国长期国债。息票率是 9%。每年 2 月 15 日和 8 月 15 日支付息票。通过标明从上次息票支付（在闰年）计起有 83 天和离下次息票支付还有 99 天得出应计利息。因此，

$$AI=\frac{83}{83+99}\times 4.50=2.05$$

这个 2.05 将加入标价，以面值的百分比形式表现出来。例如，如果债券面值是 1 000 美元，20.50 美元将被加入债券。

信用评级

虽然债券提供一个一般认为是固定收益的现金流，但是如果发行者有财务困难或者濒临破产的话它们会遭受违约。为了描述这种风险特征，债券通过评级机构来评级。两种主要的信用评级分类是由穆迪和标准普尔发布的。它们的等级系统如表 3—4 所示。美国国库证券没有评级，因为它们被认为本质上是没有违约风险的。

52 表 3—4 评级等级

	穆迪	标准普尔
高级	Aaa	AAA
	Aa	AA
中级	A	A
	Baa	BBB
可疑级	Ba	BB
	B	B
违约级	Caa	CCC
	Ca	CC
	C	C
		D

评级反映了对债券是否会如期偿付的可能性的一个评价。评级很低的债券通常比评级相对高的债券的卖价低。

高级和中级债券都被认为是**投资级**（**investment grade**）。而处于可疑级或者以下级别的被称为是**垃圾债券**（**junk bond**）。历史上，违约频率和给定的评级有很大的关联度。

由评级机构作出的级别评定主要是基于用各种财务比率衡量的发行者的财务状况。例如，债务与权益的比率、流动资产与流动负债的比率、现金流与未偿债务的比率、还有几种其他的比率。这些比率变动的趋势同样很重要。

评级低的债券比评级相对高的债券价格低。因此有些人曾经争论，如果违约风险能够分散的话，垃圾债券有可能偶尔会有高的价值。然而，要仔细分析这种方法需要明确考虑不确定性。

3.4 收益率

债券的收益率是支付结构隐含的利率。特别是，在此利率上所有支付的

现金流（包括息票支付和最后的面值偿付）的现值恰恰等于债券当前的价格。称这个值为**到期收益率（yield to maturity，YTM）**可能更恰当，以区别于有时候用到的其他收益率。通常收益率都是以年为基础的。

应该明确到期收益率正好是债券在当前价格时的内部收益率。但是在讨论债券的时候，通常用收益率而不是内部收益率。

假设一张面值为 F 的债券每年进行 m 次金额为 C/m 的息票支付，并且还有 n 期。每年的息票支付额的总和为 C。同样假设债券的当前价格为 P。 53
那么到期收益率的值 λ 使得：

$$P=\frac{F}{[1+(\lambda/m)]^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{C/m}{[1+(\lambda/m)]^k} \tag{3—1}$$

这个值 λ，即到期收益率，是隐含在债券里面、每年进行 m 次复利计息时的利率。注意在式（3—1）中，第一项表示面值的现值。在求和公式中，第 k 项是第 k 次支付金额为 C/m 的息票的现值。基于名义利率 λ，所有现值的总和，等于债券价格。

在式（3—1）中的求和公式可以用前面章节中的年金一般价值公式变形，因为这个和代表所有的等额息票 C/m 的现值。变形后的形式在此特别提出：

⇒***债券价格公式*** *到期收益率为 λ，到期之前还恰恰有 n 期息票的债券价格，满足公式：*

$$P=\frac{F}{[1+(\lambda/m)]^n}+\frac{C}{\lambda}\left\{1-\frac{1}{[1+(\lambda/m)]^n}\right\} \tag{3—2}$$

这里 F 是债券的面值，C 是每年支付的息票额，m 是每年支付息票的次数。

通过方程式（3—2）一定能解出收益率 λ。但这不可能通过手工解出，除非是很简单的情形。应该明确式（3—2）中的各项是熟悉的单笔未来支付

金额和年金的现值。然而，为了确定 λ，你不能仅评价这些表达式，还必须调整 λ 来满足式（3—2）。就如任何的内部收益率的计算一样，通常要求一个重复的过程，这用计算机很容易进行。为此种计算有人设计出专门的计算器和债券表格，它们被债券交易商和其他专业人士所用。电子数据表通常有嵌入的债券价格公式。

在此讨论的公式假设离到期日有整整的息票期数。价格—收益公式要求在各个息票支付日之间进行调整。

价格—收益率曲线的性质

虽然债券方程式很复杂，但从性质上理解价格、收益率、息票和到期日之间关系却很容易。这种性质上的理解有利于促发债券组合构造背后的思想，特别是，引向了对债券的利率风险特性的理解。学习下面的例子时应该留意这种理解。

就像一般规则一样，各种各样的债券的收益率都相互联系，并且也与其
54 他固定收益证券的市场利率相联系。毕竟，在银行存单提供 10%的收益率时大多数人是不会购买收益率为 6%的债券的。总体利率环境对每种债券都施加一种压力，迫使它的收益率与其他债券的收益率相一致。然而，惟一让收益率变化的方法是债券价格的变动。随着收益率的变动，价格也相应地变动。要求与收益率变化相匹配的价格变化根据债券结构（它的息票率和到期日）的不同而不同。因此，随着不同的债券的收益率或多或少和谐地移动，它们的价格也发生了不同的变化。要理解债券，重要的是理解价格和收益率之间的关系。给定一种债券，这种关系由**价格—收益率曲线（price-yield curve）**表示出来。

图 3—3 显示的是价格—收益率曲线的几个例子。这里的价格，作为面值的一个百分比，是以百分比表示的 YTM 的函数。看一下 10%的债券，这种债券的息票率为 10%（意思是每年支付面值的 10%，或者每六个月支付面值的 5%），离到期日有 30 年。价格—收益率曲线显示了价格和收益之间的关系。

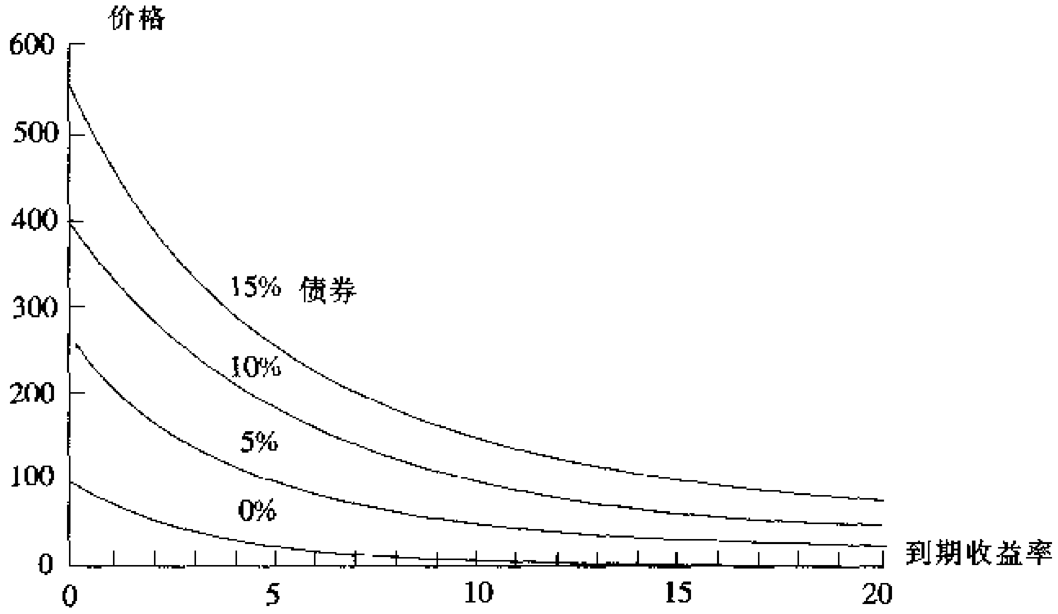


图 3—3　价格—收益率曲线和息票率

显示的所有债券的期限都为 30 年，息票率显示在相应的曲线上。价格以平价的百分比来表示。

该曲线的第一个明显特征是它的斜率为负，就是说价格和收益率是反向的关系。收益率上升时，价格下降。如果在一笔固定的已收现金流上能得到较高的收益率，那么支付这笔现金流的价格就较低。这是债券市场的基本特征。当人们说“债券市场走低”时，他们是指利率在上升。

曲线上的某些点可以通过检验计算。首先，假设 YTM＝0。这意味着债券是以不提供利息来定价的。在这个债券框架内，未来的货币不进行贴现。在这种情况下，债券的现值恰好等于所有支付额的总和：这里 30 年每年 10 点的息票支付，定为 300 点，加上在到期日收到的面值的 100%，共为 400 点。这是在收益率为 0 时的债券的价值。其次，假定 YTM＝10%。那么债券的价值等于平价。原因是每年息票支付恰好等于投资的期望收益率 10%。每年的价值保持为 100。该债券就像一笔每年按该本金支付利息的贷款，并且本金保持不变。在此情形下，收益率刚好等于息票率，该债券被称为**平价债券（par bond）**。除了曲线上这两个特殊点以外，我们可以推导出当收益率增长时债券的价格肯定是趋于零的——高收益率意味着高比率的贴 55

现，因此甚至连离得最近的息票支付也只有很少的现值。总之，曲线的形状是凸（convex）的，因为它弯向原点并且拉向横轴。只给定这两点和这个形状的粗略认识，就有可能画出相当接近于真实曲线的图形。

让我们简单地检验一下另外一条曲线，比如，收益率为 15%的债券。在 YTM=0 时的价格是 15×30+100=550，100 的平价点为 15%。我们看出在到期日固定时，随着息票率上升，价格—收益率曲线也上升。

现在来看看债券到期期限的影响。图 3—4 显示了三种不同债券的价格—收益率曲线。这些债券的息票率都是 10%，但是到期期限不同，分别为 30 年，10 年和 3 年。当收益率为 10%时这些债券都是平价，因此都通过共同的平价点。然而，这些曲线都围绕该点向上偏转，偏转程度取决于期限。YTM=0 时的值很容易求得，就像前面一样，通过简单加总各项支付。主要的特征是随着到期期限上升，价格—收益率曲线变得越来越陡峭，但本质上都是围绕平价点旋转的。这种逐渐增陡的趋势说明期限越长价格对收益率的敏感度越高。

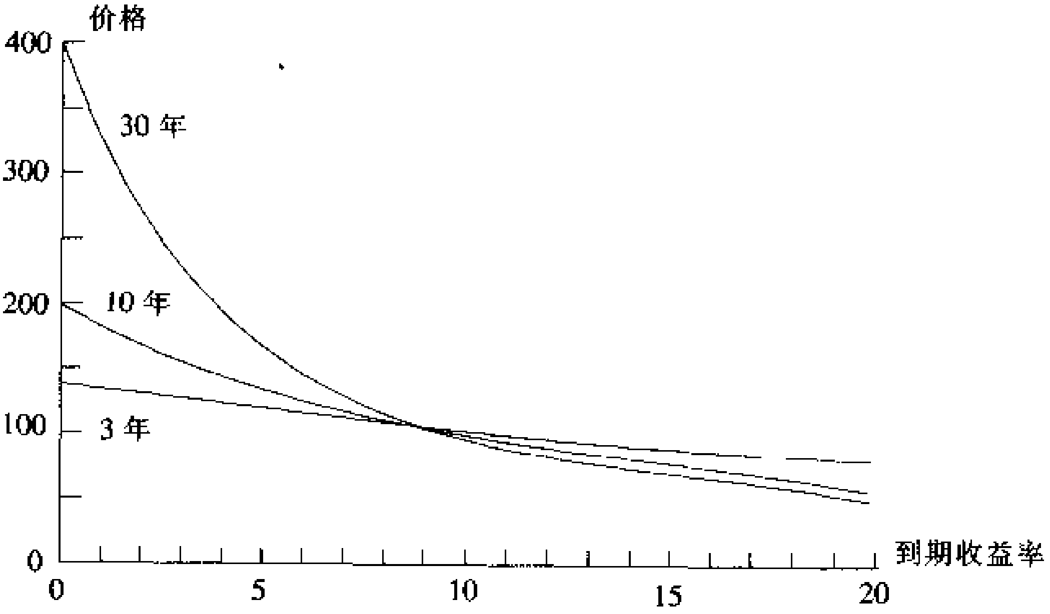


图 3—4　价格—收益率曲线和到期期限

显示了三种到期期限的价格—收益率曲线。所有债券的息票率都为 10%。

价格—收益率曲线很重要，因为它描述了与债券相关联的利率风险。例如，假设你以平价购买如图 3—3 显示的息票率为 10%的债券（当收益率为 10%时）。尽管有些可能不在平价上，但有可能到期期限大约为 30 年的债券都将有 10%的收益率。那么 10%将代表这种债券的市场利率。现在假设市场环境变化了，并且你的债券的收益率增至 11%，价格将降到 91.28。这表明了你的债券价值有 8.72%的变化。购买债券的时候考虑到这种变化的可能性是很好的。例如，一张三年期的息票率为 10%的平价债券，如果收益率上升为 11%，价格将仅仅降至 97.50，则这张债券的利率风险要低一些。当然，如果收益率下降，你将获益同样的数额。 56

债券持有者在下面描述的这个意义上受收益风险支配：如果收益率改变，债券价格同样改变。这是一个直接的风险，影响债券的近期价值。当然，你可以继续持有债券，并因此继续收到承诺支付的息票和到期日时收到面值，这笔现金流并不受利率的影响。（这就是为什么债券终究被归类为面定收益债券。）但是如果你计划在到期日之前把债券卖出，价格将由价格—收益率曲线决定。

表 3—5 以表格形式显示了息票率为 9%的债券的价格—收益率关系。很容易看出期限为 30 年的债券比期限为 1 年的债券对收益率的变化更敏感。

表 3—5　　息票率为 9%的债券价格

到期期限	收益率				
	5%	8%	9%	10%	15%
1 年	103.85	100.94	100.00	99.07	94.61
5 年	117.50	104.06	100.00	96.14	78.41
10 年	131.18	106.80	100.00	93.77	69.42
20 年	150.21	109.90	100.00	91.42	62.22
30 年	161.82	111.31	100.00	90.54	60.52

长期债券的价格比短期债券的价格对收益率的变化更加敏感。

这是以价格—收益率关系的重要性为基础对利率风险的量化。我们粗略的定性理解是重要的。下一节讲述研究这种风险的其他工具。

衡量收益率的其他方法

除了到期收益率，其他的衡量收益率的方法都用来深入理解债券性质。例如，一种重要的衡量方法就是**当期收益率（current yield，CY）**，定义如下：

$$CY=\frac{每年的息票支付}{债券价格}\times 100$$

当期收益率衡量了债券的年收益。例如，考虑一张10%的30年期的债券。如果它以平价卖出（也就是，以100），那么当期收益率是10，这与息票率以及到期收益率相等。如果相同的债券以90卖出，那么当期收益率为$CY=\frac{10}{90}\times 100\%=11.11$（此处原文为$CY=10/90=11.11$，有误。——译者注）而$YTM=11.16$。

57 其他的方法：如果用于一定年限以后就可赎回的债券，是赎回期收益率（yield to call，YTC），定义它为假设该债券事实上在可能的最早日期赎回时的内部收益率。

还有几种其他的衡量收益率的方法，分别用来解释偿债基金、本金支付和其他特征。

3.5 久期

在其他条件相同的情况下，长期债券的价格—收益率曲线比短期的更加陡峭。因此**长期（long term）**债券的价格比**短期（short term）**债券的价格对利率更加敏感。这在表3—5里表明得很清楚。但这只是一个粗糙的经验

规则。期限本身并不会给出对利率敏感度的完全量化。

另一种衡量时间长度的术语叫做**久期**（**duration**），它给出了对于利率敏感度的直接衡量。本节讲述这个方法。

固定收益金融工具的久期是对所有作出支付（现金流）的时间的加权平均。加权因子是单个现金流的现值。

我们可以把这个定义更加清楚地写出来。假设现金流分别是在 t_0，t_1，t_2，…，t_n 时点收到的，那么这笔现金流的久期是

$$D=\frac{PV(t_0)\,t_0+PV(t_1)\,t_1+PV(t_2)\,t_2+\cdots+PV(t_n)\,t_n}{PV}$$

在这个公式中，表达式 $PV(t_k)$ 表示时间点 t_k 发生的现金流的现值。分母 PV 是总现值，就是所有单个 $PV(t_k)$ 值的总和。

表达式 D 事实上是现金流的时间的加权平均。因此 D 本身有时间单位。当现金流都是非负时，由于它们属于一张已经被人拥有的债券（因此买价不包含在现金流里面），那么就很显然 $t_0 \leqslant D \leqslant t_n$。久期是一个介于第一笔和最后一笔现金流之间的时间。

很明显，一张零息票债券，只在到期日进行支付，因此它的久期等于它的到期期限。非零息票债券的久期严格地小于它们的到期期限。这说明久期可以被看作概括性的期限衡量工具。它是所有单个支付的期限的平均。

麦考雷久期

前面的定义对于如何计算现值有一点模糊（有意识的），也就是说，用什么利率并不清楚。对于债券自然是以债券的收益率为基础进行计算。如果确实使用收益率，一般的久期公式变成麦考雷久期。

具体地，假设一种金融工具每年进行 m 次支付，在第 k 期的支付就为 c_k，还剩下有 n 期。**麦考雷久期**（**Macaulay duration**）D 定义为： 58

$$D=\frac{\sum_{k=1}^{n}(k/m)c_k/[1+(\lambda/m)]^k}{PV}$$

这里 λ 是到期收益率，且有：

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{[1+(\lambda/m)]^k}$$

注意在计算 D 的公式中，分子中的因子 k/m 是时间，以年为单位。本章中我们通常用麦考雷久期（或者稍有修正的麦考雷久期），因此我们不给它特殊的标志，而是把它标为 D，与一般的久期定义相同。

例 3.6（短期债券） 考虑一张 3 年期的息票率为 7%的债券。假设债券是以 8%的收益率卖出的。我们可以在图 3—5 详细列出的电子数据表中找到其值和麦考雷久期。久期为 2.753 年。

A 年	B 支付	C 贴现因子 @8%	D 支付的现值 (B×C)	E 权重 (D/价格)	F A×E
0.5	3.5	0.962	3.365	0.035	0.017
1	3.5	0.925	3.236	0.033	0.033
1.5	3.5	0.889	3.111	0.032	0.048
2	3.5	0.822	2.992	0.031	0.061
2.5	3.5	0.822	2.877	0.030	0.074
3	103.5	0.790	81.798	0.840	2.520
总和			97.379	1.000	2.753
			价格		久期

图 3—5 计算久期的详细列表

D栏里计算的是各项支付的现值。将它们除以总现值就得到权重如 E 栏所示。通过把这些支付时间进行加权平均就得到久期。

明确的公式*

在所有的息票支付额都相同的情况下（这是债券的一般情况），在麦考雷久期的计算表达式的分子中显示的一系列数字之和可以用一个明确的公式

来表示。我们省略了代数过程而直接给出结果。

⇒**麦考雷久期公式**　*一张每期的息票率为c，每期收益率为y，每年分为m期还有n期，其债券麦考雷久期为：*

$$D=\frac{1+y}{my}-\frac{1+y+n(c-y)}{mc[(1+y)^n-1]+my} \tag{3—3}$$

例 3.7（30 年期的平价债券的久期） 考虑如图 3—3 中所示的一张息票率为 10%，30 年期的债券。我们假设它是平价出售，也就是说，收益率为 10%。在平价时，$c=y$，并且式（3—3）变成： 76

$$D=\frac{1+y}{my}\left[1-\frac{1}{(1+y)^n}\right]$$

因此，

$$D=\frac{1.05}{0.1}\left[1-\frac{1}{(1.05)^{60}}\right]=9.938$$

久期的数量特征*

支付息票的债券的久期通常比债券的到期期限短，但是通常它惊人的短。通过观察表 3—6 可以理解债券的久期和债券的其他参数之间的关系。在这个表中收益率固定在 5%，但是有不同的期限和息票率。这个过程相当于在所有收益率为 5%左右时浏览一系列可取的债券的情形。在一个给定的类别里（比如，政府证券）这些可取的债券主要根据这两个标准来区分。

这个表格的一个显著特征就是随着到期期限趋于无穷大，久期并不会同样增长至无穷，而是趋于一个独立于息票率的极限值。（见本章练习 14。）这个表格的另一个特征就是久期并不会因为息票率的差异而相差悬殊。收益率固定的事实趋于抵消息票的影响。

表 3—6　　作为期限和息票率的函数的收益率为 5%的债券久期

到期收益率	息票率			
	1%	2%	5%	10%
1	0.997	0.995	0.988	0.977
2	1.984	1.969	1.928	1.868
5	4.875	4.763	4.485	4.156
10	9.416	8.950	7.989	7.107
25	20.164	17.715	14.536	12.754
50	26.666	22.284	18.765	17.384
100	22.572	21.200	20.363	20.067
∞	20.500	20.500	20.500	20.500

久期不会随着期限的增长而大幅度地增加。事实上，收益率固定时，久期只会随着期限的增长而上升至一个极限值。

概括出来的一般结论是：只有同时具有很长到期期限和很低息票率的债券才会有很长的久期（比如，20 年或者更长）。

久期和敏感度

60 久期很实用，因为它直接衡量了价格对收益率变化的敏感度。这是根据一个简单的现值的导数表达式而来的。

当每年进行 m 次支付而收益率是基于那些相同的时期时，我们得出：

$$PV_k=\frac{c_k}{[1+(\lambda/m)]^k}$$

对 λ 求导得到：

$$\frac{\mathrm{d}PV_k}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{-(k/m)c_k}{[1+(\lambda/m)]^{k+1}}=-\frac{k/m}{1+(\lambda/m)}PV_k$$

现在我们把它应用于价格的表达式：

$$P=\sum_{k=1}^{n}PV_k$$

这里我们已经运用了这样的事实：价格等于以收益率贴现的总现值（根据收益率的定义）。我们发现：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}PV_k}{\mathrm{d}\lambda}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/m)PV_k}{1+(\lambda/m)}=-\frac{1}{1+(\lambda/m)}DP=-D_MP$$

（3—4）

D_M 的值叫做**修正久期**（**modified duration**）。它是由通常的久期用分母的特殊因子项调整而得来的。注意当 m 很大或者 λ 很小的时候，$D_M\approx D$。我们强调一下这个重要的敏感度关系：

⇒***价格敏感度公式*** *一张固定收益证券的价格 P 关于收益 λ 的导数是：*

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda}=-D_MP \qquad (3—5)$$

这里 $D_M=D/[1+(\lambda/m)]$ 是修正久期。

可能把式（3—5）写成下面的形式更加明了：

$$\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda}=-D_M$$

左边是价格的相对变化（或者是细微的变化）。因此 D_M 衡量 λ 变化时债券价格的相对变化。

通过用近似表达 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\lambda\approx\Delta P/\Delta\lambda$，等式（3—5）可以用于估量收益率的轻微变化引起的价格变化（反之亦然）。特别地，我们可以写出：

$$\Delta P\approx-D_MP\Delta\lambda$$

这给出了明确的收益率变动对价值的影响。

例 3.8（息票率为 10%的债券） 息票率为 10%的 30 年期债券的价格—收益率曲线如图 3—6 所示。如前面计算的一样，该债券在平价点（此时 $P=100$）的久期是 $D=9.94$。因此 $D_M=9.94/1.05=9.47$。根据式（3—3）， 61

价格—收益率曲线在该点的斜率等于 $dP/d\lambda=-947$。($\frac{dP}{d\lambda}=-D_M P=-9.47\times100=-947$——译者注)具有这个斜率的直线可以在计算久期点与价格—收益率曲线相切，如图 3—6 所示。这条直线提供了一个与该曲线邻近点的线性近似。例如，如果收益率变成 11%，我们可以估计出价格的变化为：

$$\Delta P=-D_M 100\Delta\lambda=-947\times0.01=-9.47$$

因此，$P\approx90.53$。

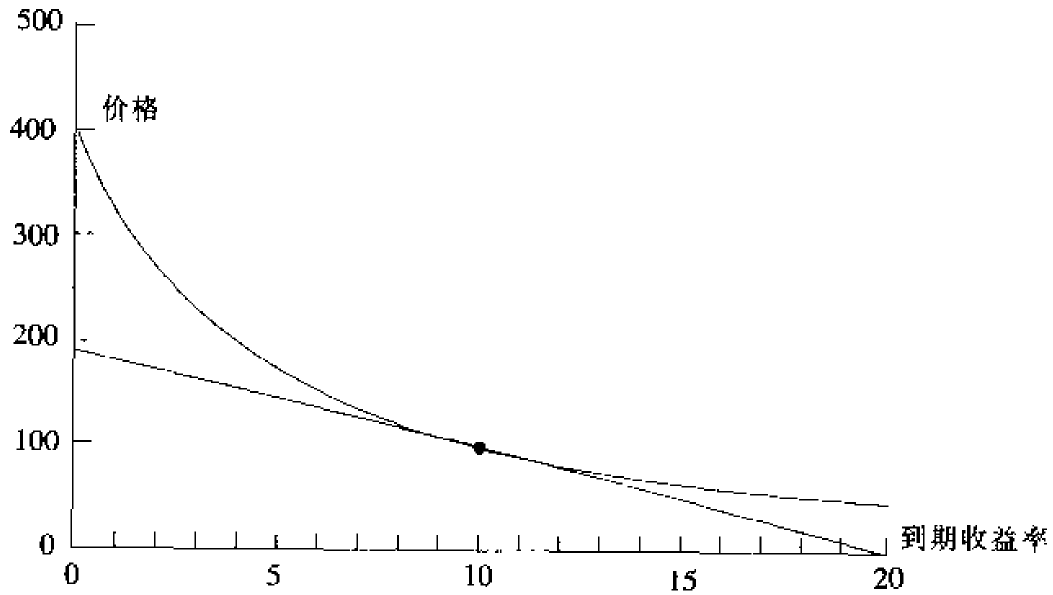


图 3—6 价格—收益率曲线和斜率

与该曲线在 P 点相切的直线的斜率是 $-D_M P$。

例 3.9（零息票债券） 考虑 30 年期的零息票债券。假设它的当前收益率为 10%。那么我们得出 $D=30$ 和 $D_M\approx27$。假设收益率增加到 11%。根据式（3—5），相应的价格变化大约为 27%。这是很大的价值损失。由于它们的久期很长，零息票债券的利率风险相当高。

资产组合的久期

假设将不同期限的债券进行组合。这种资产组合像一个总的固定收益证

券 r：它每期都收到支付额，但是因为到期期限的不同，这些支付额可能并不相等。对于这种组合的久期，我们能讨论些什么呢？

首先，假设所有的债券有相同的收益率。（如果不是完全正确，这通常来说也基本上是正确的，因为收益率趋于相互接近）这种资产组合的久期就 62
是单个债券久期的加权平均和。权重与单个债券的价格成正比。我们可以通过债券 A 和 B 的组合来简单证实这一点。久期为

$$D^{A}=\frac{\sum_{k=0}^{n}PV_{k}^{A}}{P^{A}}$$

$$D^{B}=\frac{\sum_{k=0}^{n}t_{k}PV_{k}^{B}}{P^{B}}$$

因此，

$$P^{A}D^{A}+P^{B}D^{B}=\sum_{k=0}^{n}t_{k}(PV_{k}^{A}+PV_{k}^{B})$$

当除以 $P=P^{A}+P^{B}$ 后，得出：

$$D=\frac{P^{A}D^{A}}{P}+\frac{P^{B}D^{B}}{P}$$

是该组合的久期。因此 D 是单个债券久期的加权平均，单个债券的久期权重与债券价格成正比。该结论可扩展到包含几个债券的资产组合。

⇒**资产组合的久期** *假设有 m 种价格和久期分别为 P_i 和 D_i 的固定收益证券，$i=1, 2, \cdots, m$，所有的债券都以共同的收益率来计算。包含了这些证券总和的资产组合的价格为 P，久期为 D，见下式：*

$$P=P_1+P_2+\cdots+P_m$$

$$D=w_1D_1+w_2D_2+\cdots+w_mD_m$$

这里，$w_i=P_i/P$，$i=1, 2, \cdots, m$。

正如普通的久期衡量单个债券的利率敏感度一样，一个资产组合的久期

衡量该组合对利率的敏感度。也就是，如果该收益率有很小的变动，该资产组合的总价值的变动量将由把价格和（修正的）久期联系起来的这个公式来预测。

如果一个资产组合里的债券有不同的收益率，那么所定义的这个合成的久期仍然可作为一个近似值来用。在这种情况下必须选出单个收益率——可能是平均收益率。然后就可以用这单个收益率的值来计算现值，虽然这些现值并不会恰好等于这些债券的价格。加权平均久期可以用前面公式计算出来，它将给出总现值对所用到的收益率变动的敏感度。

3.6 免疫

现在我们拥有解决具有重要实用价值问题的概念和工具了，也就是，构
63 造抵御利率风险的债券组合。这个程序叫做**免疫**（**immunization**），因为它使资产组合的价值免受利率变动的影响。这种程序，连同对它的各种改进，实际上是投资科学里应用最广泛的分析技巧之一（如果不是最广泛的话），形成了各种包括由养老基金、保险公司、其他金融机构持有的价值上亿美元的固定收益证券的资产组合。

在我们描述该程序之前，让我们更全面地考虑一下它的目的。如果不对其目的进行描述，一个资产组合不可能组合得很有意义。这个目的有助于确定你愿意承担的风险的特征。例如，假设你愿意将用于明年主要家庭开支的资金投资。如果投资于 1 年期的国库券，你明确地知道这些国库券在 1 年以后的价值，因此与你的目的相关的投资没有什么风险。另一方面，如果投资于 10 年期的零息票债券，这种债券从现在开始 1 年后的价值波动很大，这种波动取决于该年利率的变动。对你的目的来说，这项投资就有很高的风险。如果你是存钱来偿还 10 年期的债务，那么情况刚好相反。因此 10 年期的零息票债券将给出完全可以预测的结果，但是 1 年期国库券却会施加**再投**

资风险（reinvestment risk），因为在 1 年后售卖国库券的收入不得不以当时市场利率（它有可能比当前利率低很多）进行再投资。

现假设你面临一系列现金债务，你希望得到一个资产组合，在这些债务到期时用以偿还。（这是寿险公司面临的一种问题）这样做的一种方法就是购买一组期限和面值完全对应于这些单笔债务的零息票债券。但是，如果用到公司债券，这种简单的技巧就不太可行了，因为零息票公司债券很少。（你可能希望用公司债务，因为它们比美国国库券的收益率高。）如果无法进行完美的组合，你可以用一个价值与该系列债务的现值相等的资产组合来取代。每当需要一笔现金来偿还某次债务时，你可以卖掉资产组合中的一部分。或者如果资产组合在一次给定的时间派发的现金超过了所需要的（来源于息票或者面值支付）现金，你可以购买更多的债券。如果收益率不变，资产组合价值将在整个过程中都继续与余下的债务的现值匹配。因此你会完全无误地偿还这些债务。

当收益率不同时，这种现值—匹配（present-value-matching）技巧就会引发一个问题。你的资产组合价值和债务流的现值都会相应变化，但是两者的变动值可能不同。资产组合将不再匹配。

通过匹配久期和现值，免疫解决了这个问题——至少大致解决。如果该资产组合的久期和债务流的久期匹配，那么该资产组合的现金价值和该债务流的现值将会对收益率的变动作相同的一阶反应。特别地，如果收益率上升，资产组合的现值将下降，但是该债务流的现值也会下降大致相同的金额，因此该资产组合的值将仍然足以偿还债务。最好通过一个例子解释这一过程。

例 3.10（X 公司） X 公司有一笔 10 年后偿还的债务 100 万美元。它希望现在投资一笔钱将来能足以偿还这笔债务。 *64*

购买单一的零息票债券是一种解决方法，但是这种零息票债券在要求的期限上并不是总能得到。在本例中我们假设任何一种都不能获得。取而代

之，X公司计划从3种公司债券中选择如表3—7所示。(请注意在这个表格中，并且贯穿整个例子，价格是以一般的十进制来表示的，而不是32分之几的形式。)

表3—7 选择债券

	利率	期限	价格	收益率
债券1	6%	30年	69.04	9.00%
债券2	11%	10年	113.01	9.00%
债券3	9%	20年	100.00	9.00%

有3种债券被考虑选作X公司的免疫资产组合。

这些债券都有相同的收益率9%，在所有的计算中都用这个收益率。X公司首先考虑用债券2和3来组成资产组合。第一步是计算久期分别求得 $D_2=6.54$ 和 $D_3=9.61$。这是一个严重的问题。该笔债务的久期明显是10年，并且用 D_2 和 D_3 的正权数进行加权平均没有办法达到那么多，这时要求一种具有更长久期的债券。因此X公司决定用债券1和2。求得 $D_1=11.44$。(请注意，与久期特征的讨论一致，当收益率为9%的时候很难得到很长的久期——要求有很长的到期期限和低的息票率。)幸好 $D_1>10$，因此债券1和2就可以解决问题了。

然后该笔债务的现值是以9%的利率来计算的。即 $PV=414\,643$ 美元。通过解下面两个关于投资于这两种债券的金额 V_1 和 V_2 的方程得到免疫资产组合。

$$V_1+V_2=PV$$

$$D_1V_1+D_2V_2=10PV$$

第一个方程表示资产组合的总值必须等于债务的总现值。第二个表明该资产组合的久期必须等于该债务的久期(10年)。(这个关系通过两边除以 PV 最容易理解。)这两个方程的解是 $V_1=292\,788.73$ 美元和 $V_2=121\,854.27$ 美元。要买的债券数量就是把每个值除以各个债券的价格。(我们假设面值是

100 美元。）然后对这些数字四舍五人变成整数，以确定资产组合。

结果如表 3—8 所示。请注意，除了四舍五人的一些出入外，该组合的现值确实等于该笔债务的现值。此外，在不同的收益率上（显示了 8%和 10%）该组合的值仍然近似等于债务的现值。事实上，因为价格--收益率曲线的结构，在两种情况下资产组合的值都会一直超过债务的价值。（见本章 65
练习 16。）

表 3—8　　**免疫结果**

	百分比收益率		
	9.0	8.0	10.0
债券 1			
价格	69.04	77.38	62.14
份额	4 241.00	4 241.00	4 241.00
价值	292 798.64	328 168.58	263 535.74
债券 2			
价格	113.01	120.39	106.23
份额	1 078.00	1 078.00	1 078.00
价值	121 824.78	129 780.42	114 515.94
债务价值	414 642.86	456 386.95	376 889.48
余额	−19.44	1 562.05	1 162.20

即使收益率变动，资产组合价值减去债务价值的余额仍然接近于零。

免疫提供了不受收益率变化影响的一种保护。如果购买资产组合以后收益率马上发生变化，理论上该组合的新价值仍然近似等于该笔未来债务的新价值。然而，一旦收益率改变了，新组合不会在新收益率上获得免疫。因此不时需要对该组合进行**再平衡（rebalance）**，或者重新免疫。而且，在实际中将用到不止两种债券，如果包括的债券不是美国国库券，那么部分债券是用来分散违约风险的。

免疫是一种高明的想法，但是它也有缺陷——至少在这种简单的形式下。该种方法假设所有的收益率都相等，然而实际上它们通常是不相等的。事实上假设长的和短的久期的债券有相同的收益率是相当不现实的。通常长期债券比短期债券的收益率要高一些。此外，当收益率变化时，所有债券的收益率变动相同的量也是不太可能的，因此重新平衡也是很困难的。在下一章中我们将考虑免疫的一些重要扩展，在第 5 章中我们会考虑构建债券组合的其他方法。但总的说来在此介绍的技巧是非常实用的。

3.7 凸度★

修正久期衡量了给定点价格—收益率曲线的相对斜率。正如我们已经看到的一样，这得出了对于价格—收益率曲线的线性近似值，作为估计风险的方法以及控制风险的程序都是很有用的。

66 当包括二阶（或者二次的）项之后，会得到更好的近似结果。这个二阶项是基于**凸度**（convexity）的，它是价格—收益率曲线上给定点的相对曲率。特别地，凸度是定义为 C 的值：

$$C=\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}\lambda^2}$$

这可以按照现金流的形式来表示

$$C=\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^2PV_k}{\mathrm{d}\lambda^2}$$

假设每年有 m 张息票（m 个复利计息时期），我们得出：

$$C=\frac{1}{P[1+(\lambda/m)]^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{m^2}\frac{c_k}{[1+(\lambda/m)]^k}$$

请注意凸度的单位是时间单位的平方。凸度是 t_kt_{k+1} 的加权平均，就像久期一样，权重与相应现金流的现值成比例。因此，结果用因子$1/[1+(\lambda/m)]^2$调整。每次息票支付额都相等的情况会得出一个明确的公式。

假设在价格 P 和相应的收益率 λ 上，计算出修正久期 D_M 和凸度 C。那么如果 $\Delta\lambda$ 是 λ 的微小变动，ΔP 是 P 的相应微小变动，我们得到：

$$\Delta P \approx -D_M P \Delta\lambda + \frac{PC}{2}(\Delta\lambda)^2$$

这是价格—收益率曲线的二阶近似值。与一般的免疫相比，当收益率变动时，资产组合价值与债务价值保持更加接近的匹配，在这个意义上凸度可以用来改进免疫。为了在免疫方面说明凸度，你要构建债券组合，使得它的现值、久期、凸度与债务的现值、久期和凸度相匹配。总之，为达到这个目的，至少需要 3 种债券。

3.8 小结

固定收益证券是基本的投资工具，基本上是每个投资组合的组成部分，并且直接反映了利率的市场状况。

有很多种固定收益证券，为各种各样的投资和商业目的而运用。然而固定收益证券里大部分资金投资于抵押契约和债券。

很多固定收益证券都对证券所有者进行每期的支付。特别是，对抵押契约、贷款、年金和债券，情况就是这样。对债券而言，通常每 6 个月支付一 67
次，叫做息票支付。

通常固定收益证券的每期支付金额都相等，并且有关于支付额 A、证券本金 P、单期利率 r 和支付期数 n 的重要公式：

$$P = \frac{A}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

这个公式可以用来估量很多种年金、抵押契约和债券，它还可以用来对资本费用进行摊销。

对一般的投资目的来说，债券是固定收益证券里最重要的类型。重要的

参考债券是美国国库券——短期债券、中期债券、长期债券——有不同的到期期限和息票额。这些债券被认为没有违约风险，因此在有相同的息票率和到期期限的情况下比公司证券的价格要高一些。

一般的息票债券有很多种变动——有赎回特征的、偿债基金、息票率与经济指数关联的债券，等等。另外，市政债券在征税上有特殊的待遇。

债券的一个特殊性质就是购买者通常除了支付要价之外还要支付应计利息。这个应计利息是对前一个债券所有者从上一次支付息票以来已经取得的息票的补偿。

人们通过计算到期收益率频繁地分析债券。到期收益率是当前债券价格隐含的年利率。正是这个利率使债券承诺的各项支付额的现值等于当前债券价格。这个计算收益率的过程可以反过来：债券价格可以作为收益率的函数。这就是价格—收益率关系，画出图形，就是价格—收益率曲线。

价格—收益率曲线的斜率衡量价格对收益率变动的敏感度。因为收益率趋于紧跟市场利率，因此价格—收益率曲线的斜率衡量的是与某种债券相关联的利率风险。一般的规则是：长期债券比短期债券的斜率大，因此长期债券的利率风险也更大。斜率的规范化形式——将斜率除以当前债券价格——由债券的（修正的）久期给出。因此久期（或者，更加确切的，修正久期）是对利率风险的一种便捷的衡量。

免疫是构建没有一阶利率风险的资产组合的过程。该过程频繁地被各种机构应用，比如保险公司和养老基金这些有大笔的未来支付义务的机构，它们希望通过对固定收益证券的合适投资而安排好这些债务。如果它的现值等于该笔债务流的现值，并且它的久期匹配债务的久期，则这个资产组合获得免疫。换句话说，由债务流和固定收益资产组成的净资产组合有零现值和零久期。

练习

1. （摊销）一笔25 000美元的债务要以7%的利率在7年内摊销。那么每月应该支付多少钱才能实现这个目的？ 68

2. （循环和年价值◇）已知一笔现金流 $X=(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$，通过不断重复相应的有限现金流，得出无限长度的现金流 X_∞。利率为 r。设 P 和 A 分别是现金流 X 的现值和年价值。最后，设 P_∞ 是现金流 X_∞ 的现值。根据 P_∞ 求出 A，并且总结出 A 和 P_∞ 一样可以用来估值。

3. （不确定的年金◇）加文（Gavin）的爷爷，琼斯（Joncs）先生，刚刚满90岁并且正在申请每年都支付10 000美元的终生年金，第一年从现在开始，直到他死亡。他要求加文帮他分析。加文发现根据统计数据，琼斯先生在每个年龄死亡的概率如下：

年龄	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101
概率	0.07	0.08	0.09	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.07	0.05	0.04

然后加文（和你）回答下面的问题：

(a) 琼斯先生的预期寿命是多少？

(b) 在利率为8%时，与琼斯先生的预期寿命相等的寿命的年金现值是多少？（对于年数不为整数的年金，用一种平均的方法。）

(c) 年金的期望现值是多少？

4. （APR）表3—1中第二列的抵押契约的总费用是多少？

5. （可赎回债券）Z公司在收益率为10%时发行20年期利率为10%的债券。该债券有一个赎回条款，允许公司强制要求债券持有人以超过面值5%的价值赎回他或她的债券。在5年之后公司发现执行这项赎回条款是有利的。你可推算出那时的收益率大约是什么样子？（假设每年支付一次息票。）

6.（双周抵押契约⊕）有一种提议已经用来作为房屋所有者在抵押契约的支付上节约成千上万美元的方法：用每两周支付一次代替每月支付。特别地，如果每月支付额为 x，专家就建议人们用每两周支付一次 $x/2$ 来代替（每年共支付 26 次）。这就会使偿还抵押契约更快一些，节约利息。这个看似微小的调整使节省的金额惊人地巨大——通常使利息支付减少了 1/3。假设在 10%的利率时一笔金额为 100 000 美元的 30 年期贷款每月按复利计息。

（a）在每月支付的计划下，每月支付额和在 30 年间共需支付的利息为多少？

（b）在执行双周支付的计划时，什么时候贷款将被全部偿还，会比每月支付计划共节省多少利息？（这部分你可以假设每两周进行一次复利计息。）

69 7.（年价值）年价值方法的一个优势就是它简化了对各种重复但周期不同的投资项目之间的比较。考虑例 2.7 中的汽车购买问题。求出两种（单周期）选择的年价值，并直接决定哪一种更可取。

8.（可调节利率的抵押契约⊕）史密斯家刚刚为他们的新住宅获得一项可调节利息的住宅抵押契约。该抵押契约值为 100 000 美元，期限为 30 年，并且初始的利率为 8%。该利率保证在 5 年内不变，5 年之后会根据市场利率进行调整。新利率可以是通过改变支付额或者改变抵押契约的期限而应用到他们的贷款中。

（a）该抵押契约最初的每年支付额应该为多少（假设每年支付一次）？

（b）5 年以后的抵押契约账户余额是多少？

（c）如果 5 年后的抵押契约利率变为 9%，在相同时间终止契约的前提下新的每年支付额为多少？

（d）若如（c）中的利率变化，如果每年支付额保持相同，那么新的期限为多少？

9.（债券价格）一张 18 年期的利率为 8%的债券，其收益率为 9%，这张债券的价格为多少？

10.（久期）求出 10 年期、利率为 8%、以 10%的收益率来交易的债券

的价格和久期。

11.（年金久期◇）求出一笔在每年年初支付金额为 A 的永久年金的久期 D 和修正久期 D_M，从现在起 1 年开始第一笔支付，假设每年以恒久利率 r 进行复利计息。（提示：没有必要估算任何新的总和）

12.（选择债券）考虑每年支付额如表 3—9 所示的 4 种债券。对它们进行交易产生 15%的收益率。

表 3—9

年末支付	债券 A	债券 B	债券 C	债券 D
1 年	100	50	0	0+1 000
2 年	100	50	0	0
3 年	100+1 000	50+1 000	0+1 000	0

(a) 决定每种债券的价格。

(b) 决定每种债券的久期（不是修正久期）。

(c) 哪种债券对收益率变动最敏感?

(d) 假设你在第 2 年年末欠别人 2 000 美元，考虑到利率风险，建议你的包含债券和债务的资产组合应该免疫。如果 V_A，V_B，V_C 和 V_D 分别是购买的 A，B，C 和 D 型债券的总价值，实行免疫的必要约束条件是什么?（提示：有两个方程式（不要解））

(e) 为了对资产组合免疫，你决定用债券 C 和另一种债券。你应该选哪 70
种债券？求出购买每种债券的金额（总价值）。

(f) 在 (e) 中你决定用债券 C 来免疫。其他的选择可能包括一组债券，会得出更低的总成本吗?

13.（连续复利计息◇）在连续复利计息时考虑久期为

$$D = \frac{\sum_{k=0}^{n} t_k e^{-\lambda t_k} c_k}{P}$$

λ 是收益率并且

$$P = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t_k} c_k$$

根据 D 和 P 求 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\lambda$。

14.（久期的极限）当到期期限趋于无穷时，久期的极限值为

$$D \to \frac{1+(\lambda/m)}{\lambda}$$

对表 3—6 中的债券（$\lambda=0.05$ 和 $m=2$）我们得出 $D\to 20.5$。请注意对很大的λ值，这个极限接近 $1/m$，因此收益率高的债券其久期相对来说短些。

15.（凸度值）在连续复利计息（即 $m\to\infty$）时计算在时间 T 到期的零息票债券的凸度。

16.（凸度理论◇）假设用只有非负现金流的债券（就如 X 公司的例子一样）对单期发生的债务进行针对利率变化的免疫。设 $P(\lambda)$ 是求出的免疫资产组合（包括债务）的价值，这时利率为 $r+\lambda$ 并且 r 是当前利率。通过构建 $P(0)=0$ 和 $P'(0)=0$，在这个练习中证明 $P(0)$ 是一个局部极小值，也就是，$P''(0)\geqslant 0$。(这个特征由例 3.10 显示。)

假设惯例为每年进行复利计息。时间 t 的折现因子就是 $d_t(\lambda)=(1+r+\lambda)^{-t}$。设 $d_t=d_t(0)$。为了方便，我们假设该笔债务量为 1，并且在时间 $\bar{t}$ 到期。免疫的条件变成：

$$P(0) = \sum_t c_t d_t - d_{\bar{t}} = 0$$

$$P'(0)(1+r) = \sum_t t c_t d_t - \bar{t} d_{\bar{t}} = 0$$

(a) 证明对所有 α 和 β 值都有：

$$P''(0)(1+r)^2 = \sum_t (t^2+\alpha t+\beta) c_t d_t - (\bar{t}^2+\alpha\bar{t}+\beta) d_{\bar{t}}$$

(b) 证明可以选择 α 和 β 值，使得函数 $t^2+\alpha t+\beta$ 在 $\bar{t}$ 处有极小值且极小值为 1。用这些值来证明 $P''(0)\geqslant 0$

【注释】

[1] 统一证券认证程序协会（CUSIP）对所有的证券指定认证 CUSIP 号码和密码。

【参考文献】 71

货币市场是巨大的，由很多种金融工具和机构组成。可以从很多资料看到具体详细的描述。本章文献［1～5］是很好的基础读物。对收益率曲线更加全面的分析是文献［5～7］。久期的概念由麦考雷（Macaulay）和雷廷顿（Redington）提出，见文献［8～9］。关于将此概念用于免疫的全面的方法论的历史和细节，见文献［10～13］。练习 16 的结果是对费雪－威尔定理（Fisher-Weil theorm）即文献［13］的一种阐述。

1. Cook, T. Q., and T. D. Rowe (1986), *Instruments of the Money Market*, Federal Reserve Bank, Richmond, VA.
2. Fabozzi, F. J., and F. Modigliani (1992), *Capital Markets: Institutions and Instruments*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
3. *Handbook of U. S. Government and Federal Agency Securities and Related Money Market Instruments*, "*The Pink Book*," 34th ed. (1990), The First Boston Corporation, Boston, MA.
4. Wann, P. (1989), *Inside the U$ Treasury Market*, Quorum Books, New York.
5. Livingston, G. D. (1988), *Yield Curve Analysis*, New York Institute of Finance, New York.
6. Fabozzi, F. J., and T. D. Fabozzi, (1989), *Bond Markets, Analysis and Strategies*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
7. Van Horne, J. C. (1990), *Financial Rates and Flows*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
8. Macaulay, F. R. (1938), *Some Theoretical Problems Suggested by the*

Movement of Interest Rate, Bond Yield, and Stock Prices in the United States since 1856, National Bureau of Economic Research, New York.

9. Redington, F. M. (October 1971), "Review of the Principles of Live-Office Valuations," *Journal of the Institute of Actuaries*, 78, no. 3, 286—315.
10. Bierwag, G. O., and G. G. Kaufman (July 1977), "Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: A Note," *Journal of Business*, 50, no. 3, 364—370.
11. Bierwag, G. O., G. G. Kaufman, and A. Toevs (July—August 1983), "Duration: Its Development and Use in Bond Portfolio Management," *Financial Analysts Journal*, 39, no. 4, 15—35.
12. Bierwag, G. O. (1987), *Duration Analysis*, Ballinger Publishing, Cambridge, MA.
13. Fisher, L., and R. L. Weil (1971), "Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Return to Bondholders from Naive and Optimal Strategies," *Journal of Business*, 44, 408—431.

第4章 利率期限结构

与前几章相比，本章讲述更丰富的利率 72
理论。这一丰富的理论考虑到任何时间上的所有利率体系—— 每种到期期限都有不同的利率，提供利率市场更清楚的认识和更加复杂的投资分析技术的基础。

4.1 收益率曲线

任何债券的到期收益率都与固定收益证券市场的总体情况紧密相连，这个市场中的

所有的收益率都趋于协同变化。然而，所有债券的收益率并不是恰好相同。

债券之间收益率的差异在某种程度上可由各种债券具有不同的信用等级来解释。AAA 级债券可能比一种有相同的承诺收入流但却是 B 级的债券有更高的价格（因此有低一些的收益率）。只有高质量比低质量的债券价格更高才是正常的。然而，单是质量并不能完全解释我们观察到的债券收益率的变动。

另一个能部分解释不同债券的收益率差异的是到期期限。一般规则是：长期债券（有很长的到期期限的债券）倾向于比“短期”的有相同质量的债券提供更高的收益率。这种情况在图 4—1 中描述了。在该图中描绘的曲线是**收益率曲线（yield curve）**的一个例子。它显示收益率是到期期限的函数。通过把给定质量级别的各种不同债券的收益率画出来而形成该曲线。图 4—1说明各种政府证券的收益率是到期期限的函数。请注意这些收益率画出来后基本上是一条平滑的曲线，它随着期限上升而逐渐上升。一条上升的曲线是“正常形状”的收益率曲线，通常来说收益率曲线都是这种形状的。然而，收益率曲线随着时间而起伏，就有点像风中的一根树枝，可以想像其他不同的形状。如果碰巧长期债券收益率比短期债券收益率更低，该结果就被称为**倒置的收益率曲线（inverted yield-curve）**。这种倒置的形状倾向
73 于在短期利率迅速上升时出现，并且投资者相信这种上升是暂时的，因此长期利率差不多保持原来的利率水平。

当研究某种债券时，确定收益率和到期期限并且作为该风险级别的债券收益率曲线上的一点是很重要的。这对如何相对于整个市场确定债券价格给出了一个一般的表示方法。如果它离曲线很远，可能存在与特殊情况或者特殊特征（比如债券的赎回特征或者影响发行者的潜在清偿能力的消息）相关的原因。

收益率曲线很有用，但是因为它有点随意，并没有提供对不同收益率的完全令人满意的解释。比如为什么到期日而不是久期应该被用作该曲线的横轴？因此需要一个更加基础的理论，下一节将会介绍这种理论。

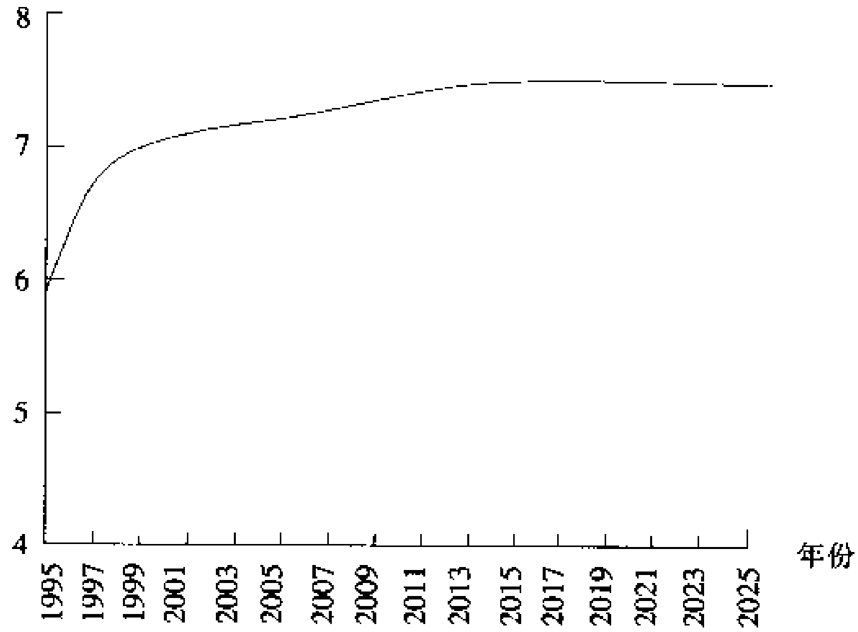


图 4—1 收益率曲线

收益率作为到期时间的函数画出来。该曲线很典型，有一个正常的向上的斜率。
资料来源：Treasury Bulletin，June 1995.

4.2 期限结构

期限结构理论把收益率这个概念放到了一边而关注于纯理论的利率。该理论基于这样一种看法：一般来说，对货币收取（或支付）的利息取决于持有货币的时间长度。比如，当地的银行，可能会对你 3 年期的存款支付比活期存款（它可以在任何时间提取）更高的利率。这个基本的事实，即收取的利率取决于持有资金的时间长度，是期限结构理论的基础，本章讨论这个事实的细节和含义。

即期利率

即期利率（spot rates）是定义期限结构的基本利率。即期利率 s_t 是以

74 年的形式表示的，是对从现在（$t=0$）到时间 t 持有的货币收取的利率。利息和本金都是在时间 t 支付的。因此，特别地，s_1 是一年期的利率，也就是，它是对持有一年的货币支付的利率。类似地，利率 s_2 表示对持有两年的货币支付的利率。然而，它是以年为单位来表示的，因此如果你的银行承诺对金额为 A 的 2 年期存款支付利率为 s_2 并每年复利计息，那么 2 年后实际偿还你的是 $(1+s_2)^2A$，你的钱以 $(1+s_2)^2$ 这个因子增长。

即期利率的定义隐含地做了复利计息规则的假设，并且这个规则会根据当时的目的而变化。前面的讨论假设一年的复利计息规则。每年通常用 m 期，或者连续复利计息。在所有的情况下引用的利率通常是年利率。为了完整起见，我们列出了各种各样的可能性：

(a) **按年复利** 在每年复利计息的规则下，定义即期利率 s_t 使得：

$$(1+s_t)^t$$

是存了 t 年的存款的增长因子。（这里的 t 必须为整数，否则就必须作出调整。）

(b) **每年 m 期复利** 在每年进行 m 次复利计息的规则下，定义即期利率 s_t 使得：

$$(1+s_t/m)^{mt}$$

是相应的增长因子。（这里 mt 必须是整数，因此 t 必须是 $1/m$ 的整数倍数。）

(c) **连续复利** 在连续复利计息的规则下，定义即期利率 s_t 使得 $e^{s_t t}$ 成为相应的增长因子。这个公式直接应用于所有的 t 值。

理论上，连续复利干净利落，因为这个公式不需改变就可适用所有的 t 值。其他方法要求调整复利计息日期的 t 值。每年复利计息的形式是最方便的，并且它是本章中最常用到的复利形式。

即期利率在理论上可以由记录零息票债券的收益率来衡量（为了消除违约风险的影响，最好只考虑国库证券）。因为零息票债券承诺在未来固定的某日支付固定的金额，所以固定的支付金额与现行价格的比率就是该债券持

有到期时的即期利率。通过这个衡量过程我们可以得出**即期利率曲线**（**spot rate curve**），它与收益率曲线相似。这种曲线和相应数据如图 4—2 所示。

年数	即期利率
1	5.571
2	6.088
3	6.555
4	6.978
5	7.361
6	7.707
7	8.020
8	8.304
9	8.561
10	8.793
11	9.003
12	9.193
13	9.365
14	9.520
15	9.661
16	9.789
17	9.904
18	10.008
19	10.103
20	10.188

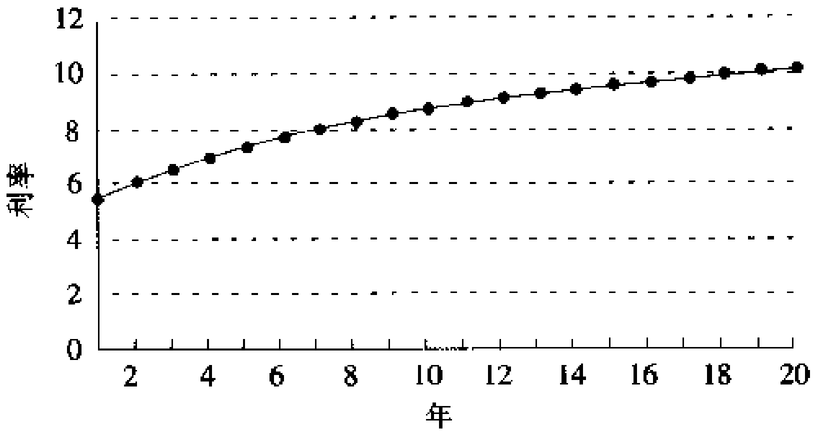


图 4—2　即期利率曲线

年利率取决于持有资金的时期长度。

贴现因子和现值

一旦即期利率确定，很自然就要在每一个时间点上，定义相应的贴现因子（discount factors）d_t。未来现金流必然通过这些因子成倍增加，以得到相当的现值。对于不同的复利计息形式，它们是如下定义的： 75

(a) 每年复利计息时，

$$d_k=\frac{1}{(1+s_k)^k}$$

(b) 每年 m 期复利。对每年 m 期复利计息时，

$$d_k=\frac{1}{(1+s_k/m)^{mk}}.$$

(c) 连续复利计息。对于连续复利计息，

$$d_t=e^{-s_t t}$$

贴现因子把未来现金流直接转化为相对应的现值。因此已知任意现金流 $(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$，相应于市场即期利率，现值是

$$PV=x_0+d_1x_1+d_2x_2+\cdots+d_nx_n$$

贴现因子 d_k 的作用就好像时间 k 收到的现金的价格。通过对该笔现金流的所有单笔现金用“价格乘以数量”的方法全部加总起来，我们确定一笔现金流的值。

76 **例 4.1（10 年期债券的价格）** 用图 4—2 中的即期利率曲线，我们来求在 10 年后到期，息票率为 8%的债券的价值。

一般来说，对于债券，我们用每 6 个月复利计息的利率和公式。但是本例中我们假设只有在每年年末才支付息票，从现在开始起 1 年年末为第一年，并且 1 年的复利计息与我们的一般估值方法一致。我们将现金流和贴现因子写出，求出它们的积，然后加总，如表 4—1 所示。得出该债券的价值为 97.34。

表 4—1　　债券估值

年份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总现值
贴现	0.947	0.889	0.827	0.764	0.701	0.641	0.583	0.528	0.477	0.431	
现金流	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	
现值	7.58	7.11	6.61	6.11	5.61	5.12	4.66	4.22	3.82	46.50	97.34

每笔现金流在它的时间点上以贴现因子进行贴现。

例 4.2（辛普利可金矿） 考虑第 2 章例 2.6 讨论的对辛普利可金矿的租赁，但现在我们假设利率有图 4—2 那样的期限结构。求出该项租赁的现值。

现金流与前面例子中一致，也就是，10 年中每年 200 万美元。因此现值就是前 10 项贴现因子乘以 200 万美元，总额为 1 358 万美元。

即期利率的确定

确定即期利率曲线的简单方法就是求出一系列有不同到期期限的零息票债券的价格，不幸的是可获得的零息票债券的集合相当稀少，并且到目前为止基本上没有长期的“零息票债券”。因此用这种方法来确定一整套即期利率并不总是现实的。然而，零息票债券的存在并不因为即期利率的概念有用才必要，也并不因为需要它们作为数据确定即期利率值而必不可少，它还有其他用途。

即期利率曲线可以从短期债券开始并扩展到长期债券，根据息票债券的价格来确定。我们说明了 1 年期复利计息的过程（并且假设每年只付一次息票）。首先通过直接观察 1 年期利率来确定 s_1——比如，由 1 年期国库券利率确定。然后考虑 2 年期债券。假设债券价格为 P，在每年末支付息票额 C，面值为 F。债券价格应该与现金流的贴现值相等，因此我们可以写出： 77

$$P=\frac{C}{1+s_1}+\frac{C+F}{(1+s_2)^2}$$

因为 s_1 已知，我们可以解此方程得出 s_2。用这种方法向前推，下一步考虑 3 年期债券，然后 4 年期债券，以此类推，我们可以一步一步确定 s_3，s_4，……

通过减法过程也可以确定即期利率。有不同息票率和相同期限的两种债券可以用来构建一种等价的零息票债券。下面这个例子说明了这种方法。

例 4.3（零息票债券的构建） 债券 A 是一张息票率为 10%的 10 年期债券，价格为 $P_A=98.72$。债券 B 是一张息票率为 8%的 10 年期债券，价格为 $P_B=85.89$。两种债券有相等的标准化面值 100。

考虑一个有－0.8 单位债券 A 和 1 单位债券 B 的资产组合。这个资产组合的面值将是 20，价格为 $P=P_B-0.8P_A=6.914$。息票支付相互抵消，因

此这是零息票资产组合。10 年期的即期利率 s_{10} 必须满足 $(1+s_{10})^{10}P=20$，因此 $s_{10}=11.2\%$。

实际上，因为即期利率是理想化了的，并且不同的债券隐含的即期利率相互间有细微差别，因此建议在估计即期利率时调整这些程序，加入求平均值的方法（见练习 4）。

4.3 远期利率

从即期利率的定义中直接浮现的一个美妙而有用的概念，就是远期利率。**远期利率（forward rates）**是现在达成协议，未来两个日期间将要借入货币的利率。

在 2 年期情形下说明这个概念是最简单的。假设 s_1 和 s_2 是已知的。如果我们在一个 2 年期的账户里存入 1 美元，根据定义，2 年期末它将涨至 $(1+s_2)^2$ 美元。另外，我们可以把 1 美元存入一个 1 年期的账户并且同时作出安排：把这个 1 年后将变为 $(1+s_1)$ 的收入，在现在开始的 1 年以后借出去。这笔贷款将以预先安排好的利率（现在就达成了协议的），比如 f 来增值。利率 f 是用这种方法借出的货币的远期利率。在这种复合安排中我们在 2 年年末最终得到的金额是 $(1+s_1)(1+f)$ 美元。

现在我们引用比较原则。目前有两种可选的方法进行 2 年期的 1 美元投资。第一种方法的收益率是 $(1+s_2)^2$；第二种方法的收益率是 $(1+s_1)\cdot$
78 $(1+f)$。它们应该相等，因为两种方法是可随意选择的。[1]因此我们得出：

$$(1+s_2)^2=(1+s_1)(1+f)$$

或者

$$f=\frac{(1+s_2)^2}{1+s_1}-1$$

因此远期利率是由两个即期利率确定的。

我们可以通过**套利论据（arbitrage argument）**来评判比较原则的运用。如果这两种投资货币的方法并没有得到相等的收益，那么就存在谋取套利利润的机会——定义为瞬时利润或者零投资的确定的未来利润。在前述的例子中，如果 $(1+s_1)(1+f)>(1+s_2)^2$，意味着第二种投资方法的收益大于第一种方法，那么套利者就可以反向执行第一个安排（借入 2 年期货币）然后通过把借入的钱进行投资来执行第 2 种安排。这个套利者将是 0 净投资，因为他或她用的仅仅是借入的资本，但是在偿还了贷款后这个套利者将获得利润因数 $(1+s_1)(1+f)-(1+s_2)^2>0$。这个套利计划可以在任何数额上执行，因此，在理论上，套利者可以在没有初始资本的情况下赚得大笔的钱。我们认为不可能在市场上实施这种计划，因为潜在的套利者经常在寻找这种偏差。一旦出现了很小的这种偏差，他们就会利用它，并且这种行为就会趋于缝合这种利率缺口。如果这种不等关系是另一种方向，套利者只需反向操作。因此相等关系一定成立。

套利论据假设没有交易成本——比如经纪费用等等的实际成本或者与发现差额的时间和精力以及与安排交易相关的机会成本。该论据还假设借入和借出的利率相等。如果存在交易成本或不等的利率，那么两种策略的 2 年期利率间将存在一个很小的差值。然而，实际上与高度流动的证券比如美国国库券相关的交易成本是总成本里面极小的部分，特别是投资金额很大的时候尤为如此；而且如果借入和借出的资本额很大，借入和借出利率实际上也非常接近。因此虽然套利论据只表示一种理想化的状态，但实际上它也是个合理的近似。

比较原则可以用来论证即使没有套利者，那两种总的利率也必然是相等的。如果利率间有差额，那么准备把钱贷出 2 年的投资者就会作出最好的选择—— 而借入者也会如此做。市场的力量会趋于使利率相等。

例 4.4　假设 1 年和 2 年期的即期利率分别是 $s_1=7\%$ 和 $s_2=8\%$。然后我们就求出远期利率 $f=(1.08)^2/1.07-1=0.0901=9.01\%$。因此 2 年期

的 8%的利率可以通过直接的 2 年期投资或者第一年以 7%的利率投资然后第二年以 9.01%的利率投资来获得。

79 这个讨论可以推广用来定义其他不同期间的远期利率。前面用到的利率 f 更加完整地被标为 $f_{1,2}$，因为它是在第一年和第二年之间的远期利率。一般地，我们用下面的定义：

⇒***远期利率定义*** *当 $t_1<t_2$ 时，在时间 t_1 和 t_2 之间的远期利率标为 f_{t_1,t_2}。它是对于在时间 t_1 借入而在时间 t_2 偿还（加上利息）的货币收取的利率。*

通常，就像其他的利率一样，除非特别明确指出按其他时间长度计算利率的方法，否则远期利率以年利率表示。

市场上对任何特定的远期都不止一种远期利率。例如，借入的远期利率可能就与借出的远期利率不同。因此，讨论市场利率时必须具体明确。然而，在理论讨论中远期利率的定义是以一组基本的即期利率（它们通常代表一种理想化或者市场状况的平均水平）为基础的。这些计算出的远期利率通常叫做**隐含的远期利率（implied forward rates）**以区分于**市场远期利率（market forward rate）**。

通过前面求 $f_{1,2}$ 值的逻辑扩展可以求出隐含的远期利率。如果我们用 1 年期的复利计息，基本远期利率是在不同的年份间定义的。它们的定义满足下面的等式（对于 $i<j$）：

$$(1+s_j)^j=(1+s_i)^i(1+f_{i,j})^{j-i}$$

该等式的左边是直接将货币投资 j 年时货币增值的因子。这个数额由即期利率 s_j 确定。等式的右边是先把货币投资 i 年然后在第 i 年和第 j 年间投资于一个远期合同（现在就安排好了的）时这笔货币增长的因子。$(1+f_{i,j})$ 项自乘 $(j-i)$ 次幂，因为远期利率是以年为单位表示的。

其他复利计息方式的扩展简单易懂。为了完整起见，这里列出不同复利计息方式下的远期利率（以年利率表示的）。

⇒**远期利率公式：**　*在时间 t_1 和 $t_2>t_1$ 之间的隐含远期利率是在这些时间之间的与已知即期利率曲线相一致的利率。在不同的复利计息方式下，远期利率分别如下：*

(a) 每年复利　对于每年复利计息，$j>i$，远期利率满足：

$$(1+s_j)^j=(1+s_i)^i(1+f_{i,j})^{j-i}$$

因此，

$$f_{i,j}=\left[\frac{(1+s_j)^j}{(1+s_i)^i}\right]^{1/(j-i)}-1$$

(b) 每年 m 期复利　对于每年 m 期的复利计息，$j>i$，远期利率满足： 80

$$(1+s_j/m)^j=(1+s_i/m)^i(1+f_{i,j}/m)^{(j-i)}$$

因此，

$$f_{i,j}=m\left[\frac{(1+s_j/m)^j}{(1+s_i/m)^i}\right]^{1/(j-i)}-m$$

(c) 连续复利　对连续复利计息，远期利率 f_{t_1,t_2} 对所有 $t_2>t_1$ 都成立，并且满足：

$$e^{s_{t_2}t_2}=e^{s_{t_1}t_1}e^{f_{t_1,t_2}(t_2-t_1)}$$

因此，

$$f_{t_1,t_2}=\frac{s_{t_2}t_2-s_{t_1}t_1}{t_2-t_1}$$

请再次注意，连续复利计息情况下的公式最简单。更进一步，当有一个时间点是 0，即当前时间，定义即期利率、贴现因子和远期利率就很有用。因此我们限定 $s_{t_0}=0$，相应地 $d_{t_0}=1$，这里的 t_0 是当前时间。（当时间是以整数期来表示时我们可以用 $s_0=0$ 和 $d_0=1$ 来替代）对于远期利率，我们同样可以这样写 $f_{t_0,t_1}=s_{t_1}$。从零时点开始的远期利率就是相应的即期利率。

有许多远期利率与即期利率相关。事实上，如果有 n 期，就有 n 个即期利率（除了 s_0），并且有 $n(n+1)/2$ 个远期利率（包括基本即期利率）。然

而，所有这些远期利率都得自 n 个基本即期利率。

对远期利率作了部分介绍，因为它们代表实际交易的利率。远期协议事实上起了很重要的对冲作用，这种用处会在第 10 章里面进一步讨论。然而，在这里介绍它们主要是因为它们对于期限结构理论的全面展开很重要。下一节将简要应用期限结构理论并在接下来的章节广泛地运用。

4.4 对利率期限结构的几种解释

通过浏览金融新闻的一系列债券报价，至少可以粗略地观察到收益率曲线。该曲线从来不是平坦的，通常随着期限的增加而逐渐向上倾斜。即期利率曲线有类似的特征。通常，它也是在期限较短的时候迅速向上倾斜，而后继续往上倾斜，随着到期期限延长，收益率曲线上升得更加缓慢。要问这种典型的形状是否存在简单解释是很自然的。该曲线在共同的利率水平下为什么不是刚好平坦的呢？

对期限结构有三种标准的解释（或者理论），每种解释都提出了一些重要观点。本节我们简要地阐明这些理论。

预期理论

81 第一种解释为即期利率由未来利率的预期值决定。为了使这个过程形象化，假设即期利率曲线如通常情况一样向上倾斜，利率随着期限的上升而增加。2 年期利率比 1 年期利率高。它们认为这是因为市场（也就是在利率市场上交易的所有人的集合）相信一年期利率在下一年很有可能上涨。（比如，这种看法可能是因为，大多数人相信通胀率会上涨，因此保持相同的实际利率，名义利率就必须上升。）这种相信利率上升的大众观点就转变为市场预期。预期仅仅是平均的推断，它并不是确定的信息——因为没有人敢肯定明年要发生什么事情。但是根据本解释，人们一般会假设利率会上涨。

这个论据通过用远期利率表示预期而变得更加具体。更准确的阐述就是**预期假设（expectations hypothesis）**。为了阐明这个假设，考虑远期利率 $f_{1,2}$，它是在 1 年以后再将货币贷出 1 年的隐含利率。根据预期假设，这个远期利率恰好等于 1 年以后 1 年期即期利率的市场预期。因此可以从现行的利率推导出预期值。

之前我们考虑过 $s_1=7\%$ 和 $s_2=8\%$ 的情形。我们得出隐含的远期利率为 $f_{1,2}=9.01\%$。根据无偏预期假设，这个 9.01%的值是下一年的 1 年期即期利率 s'_1 的市场预期值。

相同的论点也可以用于其他利率。当考虑其他即期利率时，这些利率定义相应的下一年的远期利率。特别地，s_1，s_2 和 s_3 一起决定远期利率 $f_{1,2}$ 和 $f_{1,3}$。$f_{1,3}$ 是从明年开始借 2 年期的货币的远期利率。假设这个利率与 1 年后的 2 年期即期利率 s'_2 的预期相等。那么，通常情况下，当前的即期利率曲线导出一组远期利率 $f_{1,2}$，$f_{1,3}$，…，$f_{1,n}$，它们定义明年的预期即期利率 s'_1，s'_2，…，s'_{n-1}。预期值是当前的即期利率结构中固有的数值。

有两种方法看待这种构造。一种方法是当前的即期利率隐含了关于明年的即期利率曲线的预期。另一种方法是倒过来看这种观点，认为对明年曲线的预期决定现在的即期利率曲线。两种观点是互相交织的，对未来利率的预期是现在的市场的一部分并影响现在的利率。

尽管有一些重要的缺陷但这个理论或者假设是对即期利率曲线一种很好的解释，主要的缺陷在于，根据这种解释，只要即期利率曲线向上倾斜，市场就会预期利率上涨，而且几乎一直都是如此的。因此即使在一般水平上预期也不可能是正确的，因为利率不像预期那样经常地上涨。然而，这些解释是有道理的，虽然预期本身有可能都是偏离的。

期限结构的预期解释可以（不严密地）认为是以比较原则为基础的。为了明白这一点，再次考虑 2 年的情形。一个投资者可以投资 2 年期的金融工具或者投资 1 年期的金融工具以后再投资 1 年。有两种方法来执行后续投资：可以按远期利率为 $f_{1,2}$ 的远期合同安排这个投资，或者简单地在 1 年以 82

后以当时的市场利率再投资。一个高明的投资者会比较这两种策略。如果投资者预期下一年的1年期利率会与现在的$f_{1,2}$相等，那么他或者她就认为这两种投资策略没什么区别。事实上，这两种策略都可行这一事实就暗示它们看起来必须（近似地）相等。

流动性偏好理论

流动性偏好认为，相对于长期证券，投资者通常更偏好短期固定收益证券。最简单的理由就是投资者不喜欢把资本冻结于长期证券，因为到期日之前可能需要这些资金。投资者希望他们的资金是**流动的（liquid）**而不是冻结的。然而，在这个讨论中用到的流动性（liquidity）这一术语不是很标准。大公司的债券和国库券有很多活跃的市场，因此一个人很容易卖出所持有的这类证券。这种债券的短期和长期债券具有相同的流动性。

在解释期限结构形状时用到流动性是为了表明这一事实：大多数投资者偏好于短期债券而非长期债券。这种偏好的原因是投资者预期他们可能需要尽快地卖出他们的债券，并且他们也认识到长期债券对利率变动比短期债券更加敏感。因此在1年左右的时间里就需要资金的投资者不太情愿将这些资金投资于长期债券，因为与这种债券相关的接近到期的风险相对较高。为了减少风险，这种投资者更喜欢短期投资。因此为了引导投资者投资于长期金融工具，就必须对长期债券提供更高的利率。根据此理论，即期利率曲线向上倾斜。

市场分割理论

期限结构的市场分割解释认为，固定收益证券的市场根据到期期限彼此分割。这个论点假设投资者基于他们对未来资金的计划需求或者他们的风险偏好而对于他们需要的期限有清楚的认识。这种论点断定：长期债券市场里相互竞争的投资者群体不同于短期债券市场里的投资者群体。因此这两种金融工具的价格（由利率定义）之间没有必要有什么联系。短期和长期利率相

当独立地变化。一种极端的观点认为即期利率曲线上所有的点都是相互独立的。它们都由各自的市场供需力量决定。

这种解释较温和的认识是：虽然市场基本是分割的，但当邻近的市场比其主要的目标市场利率更具有吸引力时，那么个人投资者愿意改变投资市 83
场。互相接近的利率不可能有显著的差异。因此事实上即期利率曲线必然是一条曲线而非一团杂乱无章的离散点。但是这条曲线可以根据市场力量而向不同的方向弯曲。

讨论

当然，前面每种解释都包含了正确的元素。将所有这些解释组合起来可能就是一个完全正确的理论。

预期理论是这三种理论中最具有解析性的，它提供了预期的具体数值，因此可以检验。检验结果显示它用起来很有效，而其偏差可以解释成流动性偏好。因此预期理论加上流动性偏好理论考虑的风险因素看起来提供了一种简单可靠的解释。

4.5 期望动态

前一节介绍的市场预期概念对即期利率曲线形状的解释可以根据自身的性质发展成一种有用的工具。这种工具可以用来形成将来利率的可行**预测**(**forecast**)。

即期利率预测

这种方法的基本思想就是：假设由当前的即期利率曲线暗含的预期实际上是可以实现的。在这个假设前提下，我们可以从当前的即期利率曲线预测下一年的即期利率曲线。而这条新的曲线又暗含了下一年的一组预期。如果

我们假设这些期望都是可以实现的，那么可以再次往前预测。以此类推，所有未来的即期利率曲线都可以预期。当然，可以理解，这些预测的即期利率曲线是基于这样的假设：人们的预期可以实现（而我们认识到这可能不会实现），但是一旦作出了假设，该假设就提供了符合逻辑的预测。

让我们进行详细的推导。我们从当前的即期利率曲线 s_1，s_2，…，s_n 开始，并希望估计出下一年的即期利率曲线 s'_1，s'_2，…，s'_{n-1}。当前的远期利率 $f_{1,j}$ 可以被认为是对下一年利率的预期——衡量的是从下一年的当前时间到之后的（$j-1$）年之间的远期利率，换句话说，$f_{1,j}$ 是下一年的即期利率 s'_{j-1}。显然地[2]，

$$s'_{j-1}=f_{1,j}=\left[\frac{(1+s_j)^j}{1+s_1}\right]^{1/(j-1)}-1 \tag{4—1}$$

84 对 $1<j\leqslant n$ 成立。这是在假设预期能实现的前提下得到新的一条即期利率曲线的基本公式。从当前曲线开始，我们得到下一年曲线的估计。

我们把这种转化称为预期动态，因为它在预期假设的基础上给出了即期利率曲线一个明显的动态特征。其他的假设当然也是可能的。例如，我们可以假设即期利率曲线保持不变，或者它会向上移动固定的量，等等。然而，预期动态有美妙的逻辑上的吸引力。

预期过程可以在另一步中执行，以获得第三年的即期利率曲线，等等。但请注意，如果原来的曲线长度极为有限，那么接下来的每一条曲线就会因为少一项而变短一些，因此该曲线最后就变得相当短。这个问题可以通过最初假设一条非常长的（或者无限长的）即期利率曲线来矫正，或者通过每年增加一项 s_n，这后一种方法要求多一条假设。

例 4.5（简单的预测） 我们认为下表中第一行显示的是即期利率曲线。那么第二行就是在预期动态下对下一年的即期利率曲线的预测。这一行是通过式（4—1）得出的。

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
当前	6.00	6.45	6.80	7.10	7.36	7.56	7.77
预测	6.90	7.20	7.47	7.70	7.88	8.06	

第二行的前两项是这样计算出来的：

$$f_{1,2}=\frac{(1.064\,5)^2}{1.06}-1=0.069$$

$$f_{1,3}=\left[\frac{(1.068)^3}{1.06}\right]^{1/2}-1=0.072$$

通过将与初始即期利率曲线相关的所有远期利率列出，可以显示出初始即期利率曲线隐含的所有未来即期利率曲线，列出来后呈三角阵形状：

$$\begin{array}{lllllll}
f_{0,1} & f_{0,2} & f_{0,3} & \cdots & f_{0,n-2} & f_{0,n-1} & f_{0,n} \\
f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots & f_{1,n-1} & f_{1,n} & \\
f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} & \cdots & f_{2,n} & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
f_{n-2,n-1} & f_{n-2,n-1} & & & & & \\
f_{n-1,n} & & & & & &
\end{array}$$

该排列的第一行显示的是从初始时间开始的远期利率。它们与即期利率值本身相等，也就是，对于所有满足 $0<j\leqslant n$ 的 j 都有 $s_j=f_{0,j}$。第二行显示从 85
时间点 1 开始的远期利率。根据预期动态，它们将是下一年的即期利率。第三行将是第三年的即期利率，以此类推。

贴现因子

另外一个重要的概念就是在两个时间之间的**贴现因子**（**discount factor**）。贴现因子当然是在现值计算中用到的基本量。

就如远期利率一样，贴现因子用双指数体系是很有用的。相应地，符号 $d_{j,k}$ 表示将时间点 k 收到的现金**贴现**成时间点 j 的相应金额的**贴现因子**。时间点 0 的正常贴现因子是 $d_1=d_{0,1}$，$d_2=d_{0,2}$，…，$d_n=d_{0,n}$。贴现因子可以

用远期利率来表示：

$$d_{j,k}=\left[\frac{1}{1+f_{j,k}}\right]^{k-j}$$

贴现因子通过复利计息原则相互关联，从时间点 k 贴现到时间点 i，你可以先从时间点 k 贴现到中间的时间点 j 然后再从时间点 j 贴现到时间点 i。换句话说，对所有的 $i<j<k$ 有 $d_{i,k}=d_{i,j}d_{j,k}$。

⇒**贴现因子关系** *在时间 i 和 j 之间的贴现因子定义如下：*

$$d_{i,j}=\left[\frac{1}{1+f_{i,j}}\right]^{j-i}$$

这些因子满足复利计息规则

$$d_{i,k}=d_{i,j}d_{j,k}$$

其中 $i<j<k$。

短期利率

短期利率是跨越单期的远期利率。时间 k 的短期利率相应的就是 $r_k=f_{k,k+1}$；也就是说，它是从 k 到 $k+1$ 的远期利率。短期利率可以被看作与即期利率一样重要，因为一组完整的短期利率完全地确定了期限结构。

由短期利率能得出即期利率 s_k，因为从时间 0 到时间 k 的利息将等于从年初开始每年进行再投资得到的利息。得出：

$$(1+s_k)^k=(1+r_0)(1+r_1)\cdots(1+r_{k-1})$$

86 这种关系可推广，因为所有的远期利率都可以通过相似的方法得出。所以有：

$$(1+f_{i,j})^{j-i}=(1+r_i)(1+r_{i+1})\cdots(1+r_{j-1})$$

因此短期利率形成了产生所有其他利率的便捷基础。

短期利率在预期动态里尤其引人注意，因为它们不会每年都变动，而即期利率却每年都变化。已知初始短期利率 r_0，r_1，r_2，…，r_{n-1}，下一年

（在预期动态下）的短期利率将是 r_1，r_2，…，r_{n-1}。具体的某年短期利率不会变化，然而，该年是更接近于正在流逝的现在时间的一年。例如，如果我们处于 2020 年初，短期利率 r_4 就是在 2024 年 1 月开始计的那一年利率。1 年以后，2021 年，新 r_3 就会是 2024 年的利率并且这个短期利率会与前面的 r_4 相等（在预期动态下）。

一组完整的远期利率、贴现因子和短期利率的例子如表 4—2 所示。这里的各行代表给定某年的利率或因子。每个数列阵的第一行包含了未来 7 年的初始利率或因子。远期利率数列阵就如讨论中一样等于即期利率阵。因此基本即期利率曲线是由远期利率阵的第一行决定的。其他所有数据也都是由那一行得出来的。贴现因子数列阵里的第一行是当前的贴现因子。它们是用来求出未来现金流现值的。请注意短期利率表里面后续行只不过是将其上一行移动了一下。在固定时间里，短期利率保持不变。

表 4—2　　远期利率，贴现因子和短期利率

远期利率							短期利率						
6.00	6.45	6.80	7.10	7.36	7.56	7.77	6.00	6.90	7.50	8.00	8.40	8.60	9.00
6.90	7.20	7.47	7.70	7.88	8.06		6.90	7.50	8.00	8.40	8.60	9.00	
7.50	7.75	7.97	8.12	8.30			7.50	8.00	8.40	8.60	9.00		
8.00	8.20	8.33	8.50				8.00	8.40	8.60	9.00			
8.40	8.50	8.67					8.40	8.60	9.00				
8.60	8.80						8.60	9.00					
9.00							9.00						
0.943	0.883	0.821	0.760	0.701	0.646	0.592							
0.935	0.870	0.806	0.743	0.684	0.628								
0.930	0.861	0.795	0.732	0.671									
0.926	0.854	0.787	0.722										
0.923	0.849	0.779											
0.921	0.845												
0.917													

原来的即期利率曲线是由远期利率阵里面的第一行决定的。其他所有项也都是由这一行决定的。

不变性定理

87 假设你有一笔钱投资于固定收益证券，在 n 期（比如，n 年）内你不会抽回这些资金。你会只投资于国库证券，且这些证券的当前即期利率曲线是已知的。你有很多选择去用你手中的钱构建一个资产组合。可以选择一些长期债券、一些零息票债券和一些短期债券。如果你选择这些证券的组合，那么随着时间的增长，将从息票和短期债券的偿还中获得收入。你可能也会在到期日之前提前卖出一些债券。当收入按这些方法产生时，你会把收入再投资于其他债券，又再次有大量的选择。最后你将在第 n 期收回所有现金，为了在最后得到最大金额你应该如何进行投资呢?

为了解决这个问题，你必须建立中间年份利率如何变化的模型，因为未来的利率将决定你提前售出的债券和你将收入再投资时买入的债券的价格。有大量模型供你选择（它们中有些可能会涉及随机性，如第 14 章中讨论的)，其中简单的选择就是假设预期动态——因此我们作出此假设。我们假设初始即期利率曲线在 1 年以后依照前面提出的新公式转变为一条新的曲线。这个更新每年都在进行。现在，你该如何进行投资?

答案已经由这一小节的题目所揭示。如何进行投资得出的结果绝对没有区别（只要你是全额投资)。所有的选择得出的结果恰好一样。特别是，只投资于零息票债券将产生这一不变的量，相应的就是你初始投资额的 $(1+s_n)^n$ 倍。这个结果是由下面的定理阐明的：

⇒**不变性定理（Invariance theorem）** *假设利率是根据预期动态而逐步演化的。那么（假设是每年复利计息的方式）一笔投资于利率市场的钱经过 n 年后将按因子 $(1+s_n)^n$ 增长，而与投资和再投资策略无关（只要所有的资金都全部投资了）。*

证明：从前面用到过的一个例子最容易得出这个结论。假设 $n=2$。你有两种基本的投资选择。你可以投资 2 年期的零息票债券，或者投资 1 年期

的债券然后在第 1 年年末将所有收入进行再投资。在预期动态下，1 年后的再投资利率等于目前的远期利率 $f_{1,2}$。两种选择得出的结果都是增长 $(1+s_2)^2$。所有其他的投资，比如进行息票支付的 2 年期债券投资，它在第 1 年年末支付的息票额必须进行再投资，就相当于这两种基本策略的组合。很显然，相似的论证适用于任意 n 期。

将这个结果内在化的最简单方法是用短期利率来思考。每一种投资在它的久期间获得相应的短期利率。10 年期零息票债券获得前面定义的 10 期短期利率。10 年里不断滚动的投资也碰巧获得 10 年的短期利率。在预期动态下，短期利率不变，也就是说，初始时隐含的未来特定时期的利率将在那一期到来时实现。因此不管初始投资如何进行，它会通过每期的短期利率一步一步推进。 88

这个定理在讨论如何构建实际的资产组合时非常有用。它表明选择一组债券的动机必须要根据预期动态的预期偏差——实现的短期利率与原先隐含的利率值的偏差。因此，预期动态在某种意义上说是对将来的最简单假设，因为它暗示资产组合的增长不会因为投资策略的变化而变化。

4.6 连续现值

在期限结构的框架中很容易计算一笔现金流的现值。你只需简单地将每期现金流乘以相应的贴现因子，然后将这些贴现值加总，也就是，通过合理地将所有未来现金流贴现就得出现值。

有另一种特别的方法计算现值，它有些时候用起来特别方便，并且有一个有用的解释，这种不同的方法叫做**连续现值**（**running present value**）。它用递归方法从最后一笔现金流开始向后推至现在来计算现值。虽然用这种方法时没有必要假设利率实际上满足预期动态形式，但是它还是用到了前面介绍的预期动态的概念。虽然在这种情况下提出这种方法只是作为标准的计算

方法的替代，但在以后的章节中首先选择它作为——真正标准的——计算方法。

为了设计这个过程，假设（x_0，x_1，x_1，…，x_n）是一笔现金流。我们定义这笔现金流的现值为 $PV(0)$，意即在时间点 0 时的现值。现在假设已经过了 k 期，并且我们预期余下的现金流为（x_k，x_{k+1}，…，x_n）。我们可以用在那个时候适用的贴现因子计算现值（在时间点 k 时的）。定义这个现值为 $PV(k)$。通常，我们可以想像一段时间的连续现值——每期的值都是余下的现金流的现值。这些连续现值以简单的方式相互关联，这是这一方法的基础。

最初的现值可以明确地表示为：

$$PV(0)=x_0+d_1x_1+d_2x_2+\cdots+d_nx_n$$

这里的 d_k 是在时间 0 的贴现因子。这个公式可以写成另一种形式：

$$PV(0)=x_0+d_1[x_1+(d_2/d_1)x_2+\cdots+(d_n/d_1)x_n] \qquad (4\text{—}2)$$

89 值 $d_k/d_1(k=2, 3, \cdots, n)$ 是在预期动态假设下（下面会说明）从现在起 1 年的贴现因子。因此，

$$PV(0)=x_0+d_1PV(1)$$

为了说明对任意时间点这种方法通常如何运用，我们将前面介绍过的双指数系统应用于贴现因子。在时间点 k 的现值是：

$$PV(k)=x_k+d_{k,k+1}x_{k+1}+d_{k,k+2}x_{k+2}+\cdots+d_{k,n}x_n$$

用贴现复利公式，有 $d_{k,k+j}=d_{k,k+1}d_{k+1,k+j}$，因此我们可以将此等式写成

$$PV(k)=x_k+d_{k,k+1}(x_{k+1}+d_{k+1,k+2}x_{k+2}+\cdots+d_{k+1,n}x_n)$$

因此我们可以写出

$$PV(k)=x_k+d_{k,k+1}PV(k+1)$$

这个等式表明在时间点 k 的现值是当前现金流和下一年现值的单期贴现值之和。请注意，$d_{k,k+1}=1/(1+f_{k,k+1})$ 这里的 $f_{k,k+1}$ 是在时间点 k 的短期利率。因此在这种方法中贴现通常用短期利率来确定贴现因子。

⇒**现值更新** *连续现值满足递归式*

$$PV(k)=x_k+d_{k,k+1}PV(k+1)$$

这里的 $d_{k,k+1}=1/(1+f_{k,k+1})$ *是用时间点* k *的短期利率确定的贴现因子。*

为了用递归的方式进行计算，该过程从最末时间点开始。你首先计算 $PV(n)$，$PV(n)=x_n$，然后 $PV(n-1)=x_{n-1}+d_{n-1,n}PV(n)$，等等，直到求出 $PV(0)$。

你可以将这个过程看作有 n 个人站成一排，站在一条时间线上。你站排首，在时间点 0。每个人只能看见在他自己的时间点上发生的现金流，因此你只能观察到当前的时间点 0 的现金流。你如何计算现值呢？用连续的方法。

最后一个人，第 n 个人，计算他看见的现值然后把那个值传给第 $n-1$ 个人。那个人，用他那个时间点的短期利率，将第 n 个人通知的值进行贴现，然后将自己在时间点 $n-1$ 观察到的现金流加上去并且把新的现值传递给第 $n-2$ 人。这个过程一直继续下去，每个人根据他们的短期利率进行贴现，直到连续现值传递给你。一旦你听到你后面的那个人宣布的现值，你就用第一期的短期利率进行贴现再加上当前现金流。那就是总现值。

当然，连续现值 $PV(k)$ 在某种程度上是虚构的。只有当利率满足预期动态时，它才会是时间点 k 的余下现金流的实际现值。否则，在那个时间点将应用完全不同的贴现率。然而，计算在时间点 0 的现值时，也就是，计算 90
$PV(0)$ 时，可以应用连续现值方法，因为它是一个数学恒等式。

例 4.6（不变的连续利率） 假设即期利率曲线是平坦的，$s_k=r(k=1,2,\cdots,n)$。令 $(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一笔现金流。在平坦的情况下，所有的远期利率也等于 r。（见练习 9。）因此现值可以如下计算：

$$PV(n)=x_n$$

$$PV(k)=x_k+\frac{1}{1+r}PV(k+1)$$

这个递归是从结束时间反推计算至 $k=0$ 的。

例 4.7（一般的连续） 表 4—3 中显示的是现值计算的一个例子。基本的现金流如表第一行所示。我们假设当前的期限结构如表 4—2 所示，合适的单期贴现率（如表 4—2 的贴现因子表的第一列所示）在表 4—3 的第二行给出。

表 4—3　　　　连续现值的一个例子

	第 k 年							
	0	1	2	3	4	5	6	7
现金流	20	25	30	35	40	30	20	10
贴现	0.943	0.935	0.93	0.926	0.923	0.921	0.917	
PV (k)	168.95	157.96	142.20	120.64	92.49	56.87	29.17	10.00

从结束时间开始向后推计算得出现值，每期贴现一次。

任意一年 k 的现值是通过将该年对应的贴现因子乘以下一年的现值，然后加上第 k 年的现金流。这是从最后一年开始并后推直到时间点 0。因此我们首先得出 $PV(7)=10.00$。然后 $PV(6)=20+0.917\times10.00=29.17$，$PV(5)=30+0.921\times29.17=56.87$，等等。整个现金流的现值为 $PV(0)=168.95$。

4.7　浮动利率债券

浮动利率票据或债券有固定的面值和固定的到期日，但是它的息票支付额与当期（短期）利率相关联。例如，考虑一张每 6 个月支付一次息票的浮动利率债券。发行债券时，前 6 个月支付的第一张息票率等于当前的半年期

91 利率。6 个月月末息票就以该利率支付，特别地，息票就是该利率乘以面值

后的值除以 2（因为是半年支付一次）。那么，在这笔支付之后，就会**重新安排**（**reset**）利率。这个过程一直延续至到期日。

显然，未来息票的确切支付额直到 6 个月后应支付息票之前是不确定的。因此，估算这种债券的价值看起来很难。事实上，在重新安排时间上，很容易推出该值——它等于平价。我们突出这一重要结论。

⇒***定理 4.1（浮动利率债券的价值）*** *在任意重新安排的时点，浮动利率债券的价值等于平价。*

证明： 通过应用连续现值论点反推计算，很容易证明这一点。首先看最后一个重新安排点，在到期日之前的 6 个月。我们知道 6 个月后的最终的支付将是面值加上这个金额的半年利息。最后一个重新安排时点的现值是通过把总的最后支付额用半年期利率贴现过来——得出面值——因此现值在那一时点是平价。现在再往后移动 6 个月回到前面重新安排的时点。此时的现值是通过将下一笔现值和下一笔息票额的总和贴现得出的，再次得出平价。我们可以继续这一讨论一直到时间点 0。

4.8 久期

第 3 章 3.5 节提出的久期概念可以扩展到期限结构框架。我们回忆久期是衡量利率敏感度的，前面的阐述中表示为关于收益率的敏感度。在期限结构框架中，收益率不是一个基本量，但它可构建为不同但相似的风险度量工具。

另外，考虑即期利率曲线的平行移动。特别地，已知即期利率 s_1，s_2，…，s_n，我们设想这些利率同时变动了增量 λ。因此新的即期利率曲线就是 $s_1+\lambda$，$s_2+\lambda$，…，$s_n+\lambda$。这是一种假设的瞬时（instantaneous）变

化，因为它们是和前面同样时期的新即期利率。即期利率曲线的平移概括了收益率的变化，因为如果即期利率曲线是水平的，所有即期利率将等于一个共同的收益率。图 4—3 显示了连续型即期利率曲线的平移。

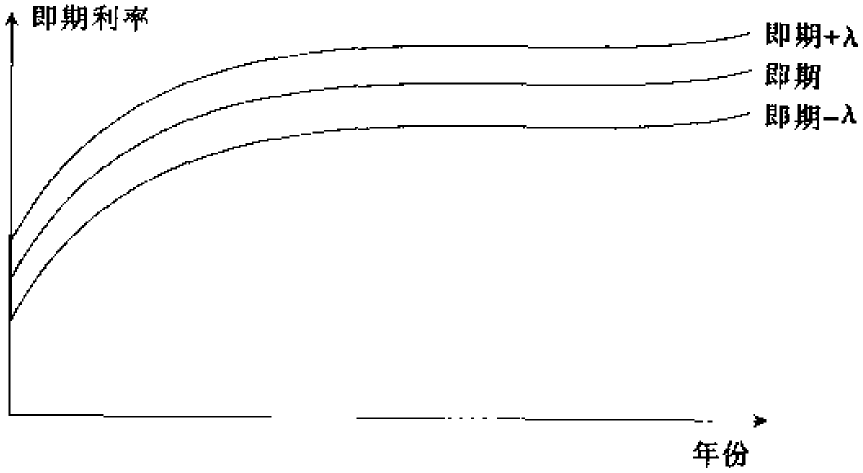


图 4—3　即期利率曲线的平移

最初的即期利率曲线是中间那条曲线。这条曲线向上和向下移动 λ，分别得到另外两条曲线。对于值很小的 λ，有可能使资产组合价值获得免疫。

已知即期利率的这种潜在变动，然后我们就可以衡量价格对这种变化的敏感度。

费雪－威尔久期

对于连续复利计息，上面这种论述最有效，因此我们会首先介绍这种情

92 形。已知一笔现金流（x_{t_0}，x_{t_1}，x_{t_2}，…，x_{t_n}），即期利率曲线为 s_t，$t_0 \leqslant t \leqslant t_n$，现值为

$$PV = \sum_{i=0}^{n} x_{t_i} e^{-s_{t_i} t_i}$$

费雪－威尔久期（Fisher-Weil duration）就定义为

$$D_{FW} = \frac{1}{PV} \sum_{i=0}^{n} t_i x_{t_i} e^{-s_{t_i} t_i}$$

请注意它恰好相当于现金流时间以现值为权重求加权平均值的一般久期概

念，显然 D_{FW} 以时间为单位，并对所有 $x_{t_i} \geqslant 0$，满足 $t_0 \leqslant D \leqslant t_n$。

现在我们考虑价格（现值）对收益率曲线平移的敏感度，并证明它由费雪 - 威尔久期决定。对于任意的 λ，价格为：

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} x_{t_i} e^{-(s_{t_i}+\lambda)t_i}$$

然后进行微分得出

$$\left.\frac{\mathrm{d}P(\lambda)}{\mathrm{d}(\lambda)}\right|_{\lambda=0} = -\sum_{i=0}^{n} t_i x_{t_i} e^{\ s_{t_i} t_i}$$

因此我们立即得出相对**价格敏感度**（**relative price sensitivity**）为：

$$\frac{1}{P(0)} \frac{\mathrm{d}P(0)}{\mathrm{d}\lambda} = -D_{FW}$$

它基本上是第 3 章提出的收益率敏感度公式的复制。

⇒***费雪 - 威尔公式（Fisher-Weil formulas）*** *在连续复利情况下，一笔现金流* $(x_{t_0}, x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n})$ *的费雪 - 威尔久期是：*

$$D_{FW} = \frac{1}{PV} \sum_{i=0}^{n} t_i x_{t_i} e^{-s_{t_i} t_i}$$

PV 表示现金流的现值。如果所有的即期利率变为 $s_{t_i} + \lambda$ $(i = 0, 1, 2, \cdots,$ 93
$n)$，*相应的现值函数* $P(\lambda)$ *满足：*

$$\frac{1}{P(0)} \frac{\mathrm{d}P\ (0)}{\mathrm{d}\lambda} = -D_{FW}$$

离散时间复利计息*

现在，我们在每年复利计息 m 次的方式下展开详述。第 k 期的即期利率为 s_k（表述为年利率）。再次，我们有现金流 $(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$（这里根据期限标定指数）。价格为：

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} x_k \left(1 + \frac{s_k + \lambda}{m}\right)^{-k}$$

然后我们就得出：

$$\frac{\mathrm{d}P(0)}{\mathrm{d}\lambda}\equiv\frac{\mathrm{d}P(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_0=\sum_{k=1}^{n}-\left(\frac{k}{m}\right)x_k\left(1+\frac{s_k}{m}\right)^{-(k+1)}$$

可以两边除以$-P$（0）将它与久期相联系。因此我们定义：

$$D_Q\equiv-\frac{1}{P(0)}\frac{\mathrm{d}P(0)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(k/m)x_k(1+s_k/m)^{-(k+1)}}{\sum_{i=0}^{n}x_k(1+s_k/m)^{-k}}\qquad(4—3)$$

我们称 D_Q 为**半修正久期（quasi-modified duration）**。它确实以时间为单位，然而，它并不恰好是现金流时间的加权平均，因为分子是（$1+s_k/m$）$^{-(k+1)}$而不是（$1+s_k/m$）$^{-k}$，而（$1+s_k/m$）$^{-k}$是贴现因子。分子的每一项都有额外的因子（$1+s_k/m$）$^{-1}$。在前面的情形中，对于所有 k，s_k 都不变，可以将这个额外项提到求和符号外面，得出修正久期。而这里不可能有这一步，因为这个额外项因 k 不同而不同，因此我们把这个相当烦琐的表述叫一个同样烦琐的名字——半修正久期。它给出关于即期利率曲线平移的相对价格敏感度。下一节会给出一个例子。

*⇒**半修正久期** 在每年m次复利计息的情形下，一笔现金流（x_0，x_1，…，x_n）的半修正久期为：*

$$D_Q=\frac{1}{PV}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{m}\right)x_k\left(1+\frac{s_k}{m}\right)^{-(k+1)}$$

这里PV是现金流的现值。如果所有的即期利率变为$s_k+\lambda$（$k=1$，2，…，n），相应的现值函数P（λ）满足

$$\frac{1}{P\ (0)}\frac{\mathrm{d}P\ (0)}{\mathrm{d}\lambda}=-D_Q$$

久期被投资者和债券资产组合的专业经理广泛地应用。它是利率风险的
94 方便和精确的替代。投资机构经常规定久期不能超过某一特定水平或有时事先规定一个目标久期。

4.9 免疫

利率期限结构直接给出了一种新的更有效的资产组合免疫方法。这种新方法并不像第 3 章一样取决于选择具有共同收益率的债券，事实上，这种计算甚至都不需要收益率。通过一个例子就可以明白地解释这个过程。

例 4.8（100 万美元的债务） 假设我们在 5 年后要偿还 100 万美元，希望现在投资足够的钱以在未来偿付债务。我们希望这样做的同时能提供一种抵御利率风险的测量方法。为了解决这个问题，首先确定即期利率曲线。在表 4—4 里标有**即期（spot）**的一栏显示了一条假设的即期利率曲线 s_k。

表 4—4　　解决免疫问题的工作表格

年	即期	d	B_1	PV_1	$-PV_1'$	B_2	PV_2	$-PV_2'$
1	7.67	0.929	6	5.57	5.18	10	9.29	8.63
2	8.27	0.853	6	5.12	9.45	10	8.53	15.76
3	8.81	0.776	6	4.66	12.84	10	7.76	21.40
4	9.31	0.700	6	4.20	15.38	10	7.00	25.63
5	9.75	0.628	6	3.77	17.17	110	69.08	314.73
6	10.16	0.560	6	3.36	18.29			
7	10.52	0.496	6	2.98	18.87			
8	10.85	0.439	6	2.63	18.99			
9	11.15	0.386	6	2.32	18.76			
10	11.42	0.339	6	2.03	18.26			
11	11.67	0.297	6	1.78	17.55			
12	11.89	0.260	106	27.53	295.26			
总计				65.95	466.00		101.66	386.15
久期					7.07			3.80

两种债券的现值和久期通过现金流转化而来。

为了在表中节省空间，本例中我们用每年复利计息的方式。我们决定投资于2种债券，描述如下：B_1 是价格为65.95（十进制形式），利率为6%的12年期债券，B_2 是价格为101.66，利率为10%的5年期债券。这些债券的价格与即期利率一致。价格计算的详细过程如表4—4。现金流乘以贴现因子（d 栏），结果在 PV_1 和 PV_2 栏列出，并对抬头有 PV_1 和 PV_2 的两种债券求和。

95 我们决定对即期利率曲线的平移进行免疫。通过把每期现金流乘以 t 和 $(1+s_t)^{-(t+1)}$，然后将结果加总，计算 $dP/d\lambda$，在表4—4中用 $-PV'$ 表示，那么半修正久期就是这两个数字的商。也就是说，它等于 $-(1/P)\ dP/d\lambda$。相应地，债券1的半修正久期为466/65.95=7.07。

我们也求出该债务的现值为627 903.01美元，相应的半修正久期是 $5/(1+s_5)=4.56$。

要确定合适的资产组合，我们令 x_1 和 x_2 分别为债券1和债券2在资产组合中占有的量（为了简化，假设面值为100美元）。然后解这两个方程式[3]

$$P_1x_1+P_2x_2=PV$$

$$P_1D_1x_1+P_2D_2x_2=PV\times D$$

这里的 D 是半修正久期。得出 $x_1=2\ 208.17$ 和 $x_2=4\ 744.03$。我们将解四舍五入就可确定资产组合。在表4—5里的第一列里显示了结果，很明显，在四舍五入误差的范围内，满足现值的条件。

为了检查这个组合的免疫特性，我们把表4—4的第一列中的即期利率都加1%。用这些新的即期利率，又可计算所有的现值。同样地，我们把各个即期利率减去1%并计算现值。在表4—5的最后两列中显示了这些结果。这些结果显示了免疫的特性不变：现值的变化仅仅是二阶效应。当然，债券
96 组合仅仅对即期利率曲线平移获得免疫。很容易发展其他的免疫程序，来抵御其他种类的平移。这种免疫程序在练习中讨论。

表 4—5　　免疫的结果

	λ		
	0	1%	−1%
债券 1			
份额	2 208.00	2 208.00	2 208.00
价格	65.94	51.00	70.84
价值	145 602.14	135 805.94	156 420.00
债券 2			
份额	4 744.00	4 744.00	4 744.00
价格	101.65	97.89	105.62
价值	482 248.51	464 392.47	501 042.18
债务价值	627 903.01	600 063.63	657 306.77
债券减债务	− $52.37	$134.78	$155.40

债券的资产组合与债务都对即期利率曲线平移免疫。

4.10　小结

如果观察到的收益率是固定的风险等级里各种债券的到期期限的函数，则其结果是一些可以近似为一条曲线（收益率曲线）的分散点。这条曲线随到期日增长而逐渐上升，反映了这一事实：长期债券比短期债券提供的收益率高。收益率曲线的形状不断变化，偶尔它的形状是倒置的，而这时收益率随着到期日的增长而下降。

通过利率期限结构这一概念最容易理解固定收益证券。在这个结构里，任何时间点上每个到期日都有特定的利率。这就是应用于有特定期限的零息票债券的利率，该利率以年为基础。这些基本的利率称为即期利率，如果将它们描绘成到期时间的函数，它们就确定出一条即期利率曲线，特征与收益率曲线相似。然而，即期利率是整个利率市场的基础——不像收益率一样取

决于用于计算收益率的特定债券的支付形式。一旦确定了即期利率，定义每期的贴现因子就简单了，然后用合适的贴现因子将未来现金流贴现，求得该现金流的现值。同样，将单个现金流的现值求和得到一笔现金流的现值。

从即期利率曲线可以推出一系列的远期利率。在未来时间点 t_1 和 t_2 之间的远期利率是对在时间点 t_1 借入而在 t_2 偿还的货币收取的利息，但借款条件是现在就安排好的。这些远期利率是期限结构理论重要的组成部分。

即期利率曲线向上倾斜的特征有 3 种主要的理论解释。第一种是预期理论。它认为当前隐含的 1 年后的远期利率，也就是，下一年到未来的远期利率，是对下一年的即期利率的可靠估计。如果这些估计值比当前的值高，则当前的即期利率曲线必然向上倾斜。第二种解释是流动性偏好理论。它认为相对于长期债券，人们更偏好短期债券，因为短期债券的利率风险更低。这种偏好驱使短期债券的价格上升。第三种解释是市场分割理论。根据这个理论，在每一种到期期限的市场里，供需互不相关，价格由单个市场里的供需决定。因此任何一种到期期限的市场里，利率或多或少独立于别的市场的利率。总之，人们认为这三种解释里的因素都对确定所观察到的即期利率曲线起了作用。

预期理论形成了预期动态概念的基础，这是描述即期利率如何随着时间而变化的特定模型。根据预期动态，下一年的即期利率等于当前隐含的 1 年
97 以后的远期利率——在下一年和未来年份之间的利率。换句话说，1 年以后的远期利率实际上在 1 年以后会实现。这种预测在下一年可以重复，以此类推。这意味着所有未来的即期利率都由当前的远期利率确定。预期动态仅仅是一个模型，远期利率多半会偏离预期动态所推导的值，但是它提供了一个对未来利率符合逻辑的简单预测。特殊的情形是，如果当前的即期利率曲线是平坦的——比如，为 12%，那么根据预期动态，下一年的即期利率曲线也同样是平坦的，为 12%。不变性定理说明如果即期利率根据预期动态而变化，那么在利率市场进行几年投资所得的利息与如何投资这些资金无关。

现值可以通过连续方法计算，它从最后一笔现金流开始，向后倒推到第

一笔现金流。在该过程的任何一步 k，现值都是将下一年的现值用期限结构隐含的时间 k 的短期利率贴现得到的。这种倒推估值方法是投资科学的各个领域里更高深的计算方法的基础。

久期可以扩展到期限结构框架。关键的思想是考虑即期利率曲线的平移，平移是在每期的即期利率上加上常量 λ。那么久期就定义为求 $\lambda=0$ 时的 $(-1/p)\ \mathrm{d}P/\mathrm{d}\lambda$ 的值。费雪－威尔久期基于连续型复利计息，推出了一个简单公式。在离散时间，合适而稍微复杂的公式称为半修正久期。

一旦定义了久期，就可以把免疫的过程扩展到期限结构理论。分别将资产与债务的久期和现值匹配，用于偿还一笔债务流的资产组合可以对即期利率曲线的平移获得免疫。

练习

1. （远期利率）如果第 1 年和第 2 年的即期利率为 $s_1=6.3\%$ 和 $s_2=6.9\%$，远期利率 $f_{1,2}$ 为多少？

2. （即期利率更新）已知（年）即期利率曲线 $s=(5.0, 5.3, 5.6, 5.8, 6.0, 6.1)$，求下一年的即期利率曲线。

3. （构建 0 组合）考虑 2 种 5 年期债券：一种的息票率为 9%，卖价为 101.00；另一种息票率为 7%，卖价为 93.20。求一张 5 年期的零息票债券的价格。

4. （即期利率计划⊕）现在是 2011 年的 11 月 5 日。表 4—6 中标价的债券是可以买到的。假设所有的债券是半年支付一次息票，在满半年的该月 15 日支付。债券价格的小数部分用 32 分之几报价。用 4 次多项式的形式估计（连续时间的）期限结构，

$$r(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4$$

这里的 t 是从今天计起以年为单位的时间。相应的时点 t 时的现金流的贴现

率为 $d(t)=e^{-r(t)t}$。回忆前面讲过的应计利息必须加入报价才能得到总价格。通过使总价格与根据估计的期限结构曲线预测的价格之间误差的平方和最小化来估计该多项式的系数。画出该曲线并求出多项式的 5 个系数。

表 4—6　　债券报价

息票	到期	要价
$6\frac{5}{8}$	2012 年 2 月	100 : 0
$9\frac{1}{8}$	2012 年 2 月	100 : 22
$7\frac{7}{8}$	2012 年 8 月	100 : 24
$8\frac{1}{4}$	2012 年 8 月	101 : 1
$8\frac{1}{4}$	2013 年 2 月	100 : 7
$8\frac{3}{8}$	2013 年 2 月	101 : 12
8	2013 年 8 月	100 : 26
$8\frac{3}{4}$	2013 年 8 月	102 : 1
$6\frac{7}{8}$	2014 年 2 月	98 : 5
$8\frac{7}{8}$	2014 年 2 月	102 : 9
$6\frac{7}{8}$	2014 年 8 月	97 : 13
$8\frac{5}{8}$	2014 年 8 月	101 : 23
$7\frac{3}{4}$	2015 年 2 月	99 : 5
$11\frac{1}{4}$	2015 年 2 月	109 : 4
$8\frac{1}{2}$	2015 年 8 月	101 : 13
$10\frac{1}{2}$	2015 年 8 月	107 : 27
$7\frac{7}{8}$	2016 年 2 月	99 : 13
$8\frac{7}{8}$	2016 年 2 月	103 : 0

5. （瞬时利率）令 $s(t)$（$0\leqslant t\leqslant\infty$）为即期利率曲线，也就是说，在 t 时收到的 1 美元的现值为 $e^{-s(t)t}$。对于 $t_1<t_2$，令 $f(t_1,\ t_2)$ 为给定的即期利率曲线隐含的在 t_1 和 t_2 之间的远期利率。

(a) 求 $f(t_1,\ t_2)$ 的表达式。

(b) 令 $r(t)=\lim_{t_2\to t}f(t,\ t_2)$。我们可以称 $r(t)$ 为时间 t 时的瞬时利率。证明 $r(t)=s(t)+s'(t)\ t$。

(c) 假设在 $t=0$ 时将一笔金额为 x_0 的钱存入银行，银行在所有的时间 t 时支付瞬时利率 $r(t)$（复利计息）。那么该银行账户 $x(t)$ 满足 $\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t=r(t)x(t)$。求 $x(t)$ 的表达式。（提示：回忆等式 $y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}y=\mathrm{d}\ (yz)$）

6. （贴现转化）在时间点 0，已知单期贴现率为 $d_{0,1}$，$d_{1,2}$，$d_{2,3}$，…，$d_{5,6}$ 为 0.950，0.940，0.925，0.919，0.913。求时间点 0 的贴现因子 $d_{0,1}$，$d_{0,2}$，…，$d_{0,6}$。

7. （债券税）一个投资者在考虑购买 10 年期的美国国库债券并计划持 99
有至到期日。在收到息票的年份里必须支付对息票征收的联邦税，在到期日还必须支付资本所得税（资本所得是面值和原价之间的差）。对联邦债券不征收地方税。这个投资者的联邦税率级别为 $t=30\%$，大多数投资者都在这个征税级别。有 2 种债券满足投资者的要求。债券 1 是 10 年期，息票率为 10%，价格 $P_1=92.21$（十进制）。债券 2 为 10 年期，息票率为 7%，价格 $P_2=75.84$。基于包含在这两种债券价格里的信息，投资者将计算一张假设的 10 年期零息票债券的理论价格，这张债券无息票并且只在到期日才要求征收一笔等于实现的资本所得（面值减去初始价格）的 30% 的税。这个理论价格应该使债券 1 和债券 2 的税后价格一致。求这个理论价格，并证明它与税率 t 的大小无关（假设所有现金流都发生在每年年末）。

8. （真实的零息票）对真实的零息票债券是要征税的，把它看作每年（或者每半年）都有隐含的息票支付，因此尽管没有收到息票支付金，但每年都要交税。n 年期债券的隐含息票率是 $(100-P_0)\ /n$，这里的 P_0 是购买价。如果将债券持有至到期日，就没有实现的资本利得，因为所有的资本利

得都成为隐含的息票支付额了。计算一张真实的 10 年期零息票债券的理论价格。这个价格与练习 7 中的债券 1 和债券 2 的税后价格一致。

9.（平坦的远期利率）如果所有的即期利率曲线都是平坦的（对任意 k，有 $s(k)=r$），请明确证明所有的远期利率也同样为 r。

10.（橙县的忧郁）橙县管理着一项投资池，其中包含几种市政短期投资。这个投资池投入了 75 亿美元，这笔钱用来购买证券。用这些证券作担保，该投资池从华尔街经纪人那里借入 125 亿美元，这些资金也用来购买更多的证券。这 200 亿美元主要投资于长期固定收益证券以获得比短期固定收益证券更高的收益率。另外，当利率逐渐下降，就如 1992—1994 年间一样，它们能获得更高的收益率。而这种情形在 1994 年里骤然转变，利率急剧上升。

假想地，假设最初该投资组合的久期是 10 年，短期利率是 6%，资产组合的平均息票率是面值的 8.5%，华尔街资金的成本为 7%，短期利率每年下降 $\frac{1}{2}$%。

(a) 该投资池的投资者在早期得到的收益率为多少？它是否比投资于短期证券的投资者一般能得到的 6%的收益率高很多？

(b) 当利率下降 2 个百分点并开始每年上涨 2%时，该投资池的收益率是多少？

11.（连续现值例子）一笔（每年的）现金流为 $x=(-40, 10, 10, 10, 10, 10, 10)$。即期利率为练习 2 中的即期利率。

(a) 求当前的贴现因子 $d_{0,k}$ 并用它们来确定该现金流的（净）现值。

100 (b) 求出一系列预期动态的短期贴现因子并用连续现值方法对现金流估值。

12.（纯久期◇）有时在即期利率中引人不同于可加变动量的变动是很有用的。令 $s^0=(s_1^0, s_2^0, s_3^0, \cdots, s_n^0)$ 是初始的即期利率（每年有 m 期）。令 $s(\lambda)=(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 是参数为 λ 的即期利率，这里

$$1+s_k/m=e^{\lambda/m}(1+s_k^0/m) \quad k=1,2,\cdots,n$$

假设债券价格 P (λ) 由这些即期利率确定，证明

$$-\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda}=D$$

是一个纯久期，也就是说，求 D 并用语言来描述它。

13. (现金流免疫) 一家公司在未来 8 年面临着一笔由下图所示的债务流，单位是千美元。即期利率曲线是例 4.8 中的。求一个资产组合，由该例中的 2 种债券组成，这个组合与债务流有相同的现值并对即期利率曲线的平移免疫。

年	1	2	3	4	5	6	7	8
	500	900	600	500	100	100	100	50

14. (抵押分割) 通常抵押的支付流是分为本金支付流和利息支付流的，这两种现金流分开售出。我们将检验这两部分的值。考虑一个标准的抵押，其初始值 $M=M(0)$，每期相等的支付额为 B。如果每期的利率为 r，那么该抵押本金在第 k 次支付以后满足

$$M(k)=(1+r)M(k-1)-B, k=0,1,\cdots$$

这个方程的解为

$$M(k)=(1+r)^k M-\left[\frac{(1+r)^k-1}{r}\right]B$$

我们假设该抵押有 n 期，并选择 B 使得 $M(n)=0$，即

$$B=\frac{r(1+r)^n M}{(1+r)^n-1}$$

第 k 期支付的利息部分为

$$I(k)=rM(k-1)$$

本金部分为

$$P(k)=B-rM(k-1)$$

(a) 用 B，r，n，M 求出本金支付流的现值 V (利率为 r)。

101 (b) 仅用 r，n，M 来求出 V。

(c) 求利息支付流的现值 W。

(d) 求当 $n\to\infty$ 时的 V。

(e) 你认为哪笔现金流的久期更大，本金还是利息？

15. (短期利率敏感度) 加文·琼斯有时会冒出很聪明的想法。他问他的导师，久期是否衡量价格对短期利率曲线平移（也就是，$r_k\to r_k+\lambda$）的敏感度。他的导师微笑后让他去求一下。刚开始他没有成功，因为他的公式非常复杂。最后他发现了一个基于连续现值方法的简单解。特别地，令 P_k 为 k 时的现值，$S_k=\mathrm{d}P_k/\mathrm{d}\lambda\mid_{\lambda=0}$。$S_k$ 可以通过公式 $S_{k-1}=-a_kP_k+b_kS_k$ 的形式逆推出来，通过连续的方法就得到 P_k。求 a_k 和 b_k。

【注释】

[1] 这种远期协议实际上通过运用国库证券的期货协议来实施，就如第10章中解释的一样。它们高度流动，因此这种远期很容易获得。

[2] 回忆计算 $f_{i,j}$ 的公式是4.3节中给出的。它是由关系式 $(1+s_j)^j=(1+f_{1,j})^{j-1}(1+s_1)$ 得出的。

[3] 同样地，你可以解方程式 $V_1+V_2=PV$ 和 $D_1V_1+D_2V_2=PV\times D$，然后令 $x_1=V_1/P_1$ 和 $x_2=V_2/P_2$。

【参考文献】

对于期限结构理论一般的讨论，见文献［1～3］。预期理论的重要分析包含在文献［4～5］。在文献［6］中展开了对流动性偏好的讨论。文献［7］最早讨论在期限结构背景下的免疫。

1. Fabozzi, F. J., and F. Modigliani (1992), *Capital Markets: Institutions and Instruments*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

2. Homer, S., and M. Liebowitz (1972), *Inside the Yield Book: New Tools for Bond Market Strategy*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

3. Van Horne, J.C. (1990), *Financial Market Rates & Flows*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
4. Russell, S. (July/August 1992), "Understanding the Term Structure of Interest Rates: The Expectations Theory," *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, 36—51
5. Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross (September 1981), "A Reexamination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 36, 769—99.
6. Fama, E. (1984), "The Information in the Term Structure," *Journal of Financial Ecnomics*, 13, 509—28
7. Fisher, L., and R. L. Weil (October 1977), "Coping with the Risk of Market—Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Na? ve and

第5章 应用利率分析

102 从根本上说，投资科学的实际目的是为了改善投资过程。这个过程包括鉴别、选择、组合和不断发展的管理。在理想的情形下，这个过程的组成部分是相互联系的，并且处理起来像一门技术——一门植根于科学原理和有意义的经验的技术，通过直觉和正规的解决问题的程序和组合来实施。本章主要阐述构建投资的正规程序。

前几章为分析广泛的投资问题提供了基础。事实上，单是利率理论就提供了大量的实际投资研究的基础。因此对前几章的熟练

掌握就足够应付很多种投资情形，并且可以用简单实用的工具进行合理的分析，比如电子表格程序或者更复杂的工具，像并行处理程序。为了说明用前面几章的理论可以对这一系列问题进行有意义的研究，本章考虑一些典型的问题。我们对这些问题的研究仅仅是一个介绍，因为每一个问题都有专门的教科书。然而，前几章的坚固的基础使我们可以在一个相对高的水平上研究它们，并快速地表达问题的本质。我们考虑资本预算、债券组合的构建、动态投资管理、根据会计数据对公司估值。这些都是重要的投资问题。

为了用量化方法解决投资问题，则必须首先用公式表示成某一具体问题。通常有很多种解决方法，但最好的表述时常是**最优化**（**optimization**）形式。它与一般的投资目标完全一致，这些目标是尽量设计出“理想化”的资产组合，选择最“好”的项目组合来管理一项投资，以获得“最有利的”产出，或者对资产套期保值以到达“最小的”风险暴露。它们都是对最优化的一种表述，至少是不严格的说法。事实上，最优化和投资看起来好像是完美的搭档。在本章中我们开始探讨这种完美搭配的可能性。

5.1 资本预算

资本配置问题由在许多投资或项目之间分配（通常是固定的）预算而形 *103*
成。我们将这里的**资本预算**（**capital budgeting**）区别于下一节的**组合问题**（**portfolio problem**），虽然这两者是有联系的。资本预算通常指在投资或项目间配置资金，这些投资或项目不存在运行完善的市场，而且这些项目要求离散的整付现金。（这与证券相反，在证券市场上实际上可以购买任意大小的份额。）

在公司里常常会有资本预算的问题，因为有几个拟议的项目同时在争取资金。这些项目的规模，资金需求和收益可能相差很大。然而，关键的问题是即使所有的项目都有诱人的收益，也不能对它们都进行投资，因为有预算

约束。我们在第 2 章里学过的投资选择，是关注于预算不固定的情形，并且这些选择是相互排斥的，就像在红色和绿色的汽车间作出选择。在资本预算中的选择就不一定是相互排斥的，而预算却是一个确定的限额。

独立的项目

最简单和经典的资本预算问题就是从一系列独立的项目中作出选择。如果选择某些项目的任意组合都是合理的，从这个意义上讲，这些项目互不相关。它并不是从红色和绿色汽车中作出选择的问题，如果有足够的预算，我们可以两种车都买。同样地，一个项目的值并不依赖于其他同样投资了的项目。这个标准的资本预算问题很容易公式化。

假设有 m 个可能的项目。令 b_i 为第 i 个项目的总收益（通常为净现值），令 c_i 表示它的初始成本。最后，令 C 为可得的总资本——预算。对每个 $i=1, 2, \cdots, m$，我们引入 **0—1 变量（zero-one variable）** x_i，当项目被拒绝时为 0 而接受时为 1。这个问题就变为解方程

$$\max \sum_{i=1}^{m} b_i x_i$$

$$s.t. \ \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \leqslant C$$

$$x_i = 0 \text{ 或 } 1 \quad i=1, 2, \cdots, m$$

这叫做 **0—1 规划问题（zero-one programming problem）**，因为变量为 0—1。对于可以选择也可以拒绝的项目，对那些选中的项目，其收益和成本都可直接相加这一事实，它是一种正规化的表述。

对这一问题有一种很简单的方法来得到近似解，它在很多情形中都相当准确。在假设（这个假设可以弱化）每个项目要求初始的资金流出（负现金
104 流）和接下来的收益流（正现金流）后，我们将描述这种方法。我们定义**收益—成本比率（benefit-cost ratio）**为所有收益的现值与初始成本的比率。然后根据这个收益—成本比率来对项目排序。有最高比率的项目对每美元投

入提供最高的回报（the biggest “bang for the buck”）并因此是最后入选的项目单里最好的候选项目。一旦将项目排列好后，一次选择一个项目，按排列顺序，直到在给定的预算内不能再增加项目为止。这种方法在所花费的金额下将产生最大的价值。然而，尽管它有这种特性，但这种近似方法得出的解并不常常是最优的，因为它有可能没有把全部的预算用完。通过略掉一些高成本项目以使其他具有一样高的收益—成本比率的项目可以入选，可以得出更优的解。为了得到最优解，0—1 最优化问题可以通过软件程序来解出最优的答案。然而，基于收益－成本比率的简化方法在初期学习中是很有用的。（有些电子表格数据包有适合中型问题的整数规划程序。）

例 5.1（选择问题） 在年度预算会议上，一个小型的计算机公司确定了几种在下一年开始的相互独立的项目的提议。这些项目包括购买设备、设计新产品、租赁新设施，等等。这些项目在下一年都要求一笔初始的资本费用。该公司的管理层认为至多向这些项目提供 50 万美元。这些项目的财务情况如表 5—1 所示。

表 5—1　　项目选择

项目	费用（1 000 美元）	现值（1 000 美元）	收益—成本比率
1	100	300	3.00
2	20	50	2.50
3	150	350	2.33
4	50	110	2.20
5	50	100	2.00
6	150	250	1.67
7	150	200	1.33

费用是立即发生的，现值是未来收益的现值。高收益—成本比率的项目更受欢迎。

每个项目的初始资金流出、收益总现值（在初始流出之后的剩余现金流

的现值)、两者的比率都在表中显示了。这些项目根据收益—成本比率的递减的顺序排列。根据前面提到的近似方法，该公司会选择项目 1，2，3，4
105 和 5，总的花费为 37 万美元，而总净现值为 91 万美元－37 万美元＝54 万美元。然而，这个解并不是最优的。

更合适的解决方法是将这个问题当作 0—1 最优化问题列出公式来解决。相应地，我们定义变量 x_i，$i=1, 2, \cdots, 7$，当它被选择就为 1，否则为 0。那么这个问题就为

$$\max \quad 200x_1+30x_2+200x_3+60x_4+50x_5+100x_6+50x_7$$

$$\text{s. t. } 100x_1+20x_2+150x_3+50x_4+50x_5+150x_6+150x_7\leqslant 500$$

$$\text{对于每个 } i,\ x_i=0 \text{ 或 } 1$$

请注意最大化的目标函数项是现值（present worth）减去费用（outlay）——净现值（net present value）（此处原文为 present value，疑似笔误。——译者注）。

该问题和它的解在图 5—1 中用表列出，可看出解为选择项目 1、3、4、5 和 6，总的费用是 500 千美元，总净现值为 610 千美元。而近似的方法无法解释用项目 2 而排除使用成本较高但收益更大的项目 6 这一事实。特别地，通过将 2 换成 6，就可以充分利用资本预算，达到一个更大的总收益。

单位：千美元

工程	费用	现值	净现值	最优 x 值	成本	最优现值
1	100	300	200	1	100	200
2	20	50	30	0	0	0
3	150	350	200	1	150	200
4	50	110	60	1	50	60
5	50	100	50	1	50	50
6	150	200	50	0	0	0
总计					500	610

图 5—1 项目选择的电子表格

x 值在第一栏里面列出了。这些值乘以相应的费用和净现值就得出总的一揽子项目的成本和最优现值。用一个 0—1 规划（用电子表格）调整这些 x 值以得出最优集。

相互依赖的项目*

有时候各种项目是相互依赖的，某个项目是否可行取决于其他的项目是否被执行。我们假设有几个相互独立的目标，但是每个目标不止有一个可能的实施方法，这样用公式来表示此类问题。正是这些实施的选择方法定义了项目。这种公式化阐述把第 2 章中学过的问题一般化，在第 2 章中的那个问题仅有 1 个目标（比如买一辆车）但有几种解决办法。更加一般化的问题可以作为 0—1 规划问题处理。

举一个用公式阐述目标和项目的例子。假设交通当局希望在两个城市间建一条公路。相应的项目就会讨论是用沥青还是混凝土，两道还是四道，等等。另外一个独立的目标可能是对一座桥进行改进。

通常，假设有 m 个目标，并且与第 i 个目标相关的可能项目有 n_i 个。每个目标中只能选择一个项目。如前所述，可以得到的预算是固定的。 106

我们通过引入 0—1 变量 x_{ij}，（$i=1, 2, \cdots, m$ 且 $j=1, 2, \cdots, n$）来用公式阐述这种问题。变量 x_{ij} 在目标 i 被选定并实施 j 项目时为 1，否则为 0。那么该问题就变成

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}x_{ij} \\
\text{s. t.}\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}x_{ij} \leqslant C \\
& \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \leqslant 1 \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\
& x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \quad \text{对于所有 } i \text{ 和 } j\text{。}
\end{aligned}
$$

项目之间相互排斥性通过第二组约束条件表示出来：每个目标都有一个约束。这个约束条件 x_{ij} 表示变量的和（对应于与目标 j 相关的项目的变量之和）不能超过 1。因为所有的变量非 0 即 1，这意味着对于任意 i 至多有一个 x_{ij} 变量可以为 1。换句话说，与目标 j 相关的项目至多只能选一个。

通常这是一个比独立项目难度更高的 0—1 规划问题。这个新问题有更

多的约束，因此很难观察出解。特别是，基于收益 成本比率的近似解不适用。然而，用先进的计算机甚至可以解出规模更大的问题。

例 5.2（县城的交通选择） 假设由县交通当局正在考虑的目标和具体的项目如表 5—2 所示。

表 5—2　　交通运输选择

	成本（1 000 美元）	净现值（1 000 美元）
尤金和伯格间的公路		
1 混凝土路面，2 车道	2 000	4 000
2 混凝土路面，4 车道	3 000	5 000
3 沥青路面，2 车道	1 500	3 000
4 沥青路面，4 车道	2 200	4 300
沙洲路大桥		
5 道路维修	500	1 000
6 增加新车道	1 500	1 500
7 新结构	2 500	2 500
道恩伯格的交通控制		
8 交通管理色灯	100	300
9 转弯道	600	1 000
10 地下通道	1 000	2 000

每个目标最多只能选择 1 个项目

有三个独立的目标，一共有 10 个项目。表 5—2 显示了每个项目的成本和净现值（扣除成本以后的）。可用的总预算是 500 万美元。为了构造这个问题，对每个项目我们都引入 0—1 变量。（然而，为了简化我们把这些变量连续地编为从 1 到 10，而不是用前面公式通常用的双指数编排法）这个问题用公式可以表述为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 4x_1+5x_2+3x_3+4.3x_4+x_5+1.5x_6+2.5x_7+0.3x_8+x_9+2x_{10} \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1+3x_2+1.5x_3+2.2x_4+0.5x_5+1.5x_6+2.5x_7+0.1x_8+ \\
& 0.6x_9+x_{10}\leqslant 5 \\
& x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 1 \\
& x_5+x_6+x_7\leqslant 1 \\
& x_8+x_9+x_{10}\leqslant 1 \\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}=0 \text{ 或 } 1
\end{aligned}
$$

这个问题和它的解可以通过电子表格明显地显示，如图 5—2 所示。这 107
个解是选择项目 2，5 和 10，成本为 450 万美元，总现值为 800 万美元。

	工程	成本	净现值	最优 x 值	成本	净现值	目标
1	混凝土路面，2 车道	2 000	4 000	0	0	0	
2	混凝土路面，4 车道	3 000	5 000	1	3 000	5 000	
3	沥青路面，2 车道	1 500	3 000	0	0	0	
4	沥青路面，4 车道	2 200	4 300	0	0		1
5	道路维修	500	1 000	1	500	1 000	
6	增加车道	1 500	1 500	0	0	0	
7	新结构	2 500	2 000	0	0	0	1
8	交通管理色灯	100	300	0	0	0	
9	转弯道	600	1 000	0	0	0	
10	地下通道	1 000	2 000	1	1 000	2 000	1
总计					4 500	8 000	

图 5—2 交通问题的电子表格

第一栏是 x 值，相应的成本和净现值在接着的两栏里显示。最后一栏给出了每个目标选择的项目数。这些数字必须小于或者等于 1。最优的 x 值通过 0—1 规划数据包得出。

这种处理项目依赖关系的方法可以扩展到优先关系的应用（也就是，在另一个项目也同样入选的条件下才能选择某个项目）和有附加资本约束的资
108 本预算问题。通常，这些更一般的问题仅仅在各变量上施加额外的约束条件。

虽然资本预算是一个有用的概念，但是基本的公式化阐述在某种程度上有缺陷。硬预算约束与投资者（或者机构）可以在某个给定的利率上借入无限的资金这个基本假设不一致。确实，我们可以在理论上执行所有正的净现值的项目。然而，实际上，这种在给定的利率上可以获得无限资金供应的假设并不成立。银行可能会实行信贷限额，或者大机构中的投资决策会通过把预算传递给下一级机构单位而被分散化。因此解决资本预算问题实际上是有用的。然而，解决具有不同值的预算问题来衡量收益对于预算水平的敏感度通常是很有价值的。

5.2 最优资产组合

资产组合最优化是另一个资本配置问题，它与资本预算相似。**最优资产组合（optimal portfolio）**通常是指构造金融证券组合。然而，它也涉及更加广泛意义的金融资产组合的构造，包括项目的“资产组合”。当各种资产都在市场上自由地交易时，适用于这些资产的价格关系可能不适用于不能在市场上交易的更加普遍的资产。运用**资产组合最优化（portfolio optimization）**来解决涉及证券的资产组合问题，这个特征被突出了。

这一节仅仅考虑固定收益金融工具的资产组合。我们都知道，在已知的时间点得到现金收益的固定收益金融工具，可以通过列出承诺支付的现金流（如果有的话，还加上未来的现金流出）来描述。可以把这种金融工具看作是一个数列或者向量，把每笔支付额看作分量，从而来定义相关的现金流。资产组合就正好是这种现金流的组合，可以描述成表示这些证券的单个数列

或者向量的组合。电子表格为处理这种组合提供了一种便捷的办法。

现金匹配问题

一个简单的最优资产组合问题就是**现金匹配问题（cash matching problem）**。为了描述这个问题，假设我们面临一系列已知的未来货币债务。（如果我们管理一个养老基金，这些债务可以表示必要的年金支付）我们希望现在投资以使未来的债务在发生时得到偿付，相应地，我们计划购买有不同到期日的债券，用它们的息票和本金偿付债务。最简单的解决方法就是设计一个未来不发生变动的资产组合来提供必要的现金。

为了将这个问题公式化，首先确定单位时期长度，而现金流发生在每期 109
期末。例如，以半年为单位。我们的债务是这样的现金流 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，从现在开始的半年为第一期。（我们用黑体字来表示整个现金流。）同样，每种债券都会收到一笔相关的现金流，从现在开始计第一期。如果有 m 种债券，我们将与一单位债券 j 相关的现金流表示为 $c_j=(c_{1j}, c_{2j}, \cdots, c_{nj})$。债券 j 的价格表示为 p_j。用 x_j 表示我们在资产组合中持有债券 j 的份额。现金匹配问题就是在保证能够偿付债务的前提下求出使总成本最小的 x_j。具体地，

$$\min \sum_{j=1}^{m} p_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j \geqslant y_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

目标函数是使资产组合的总成本最小，它等于每种债券的价格与购买数额乘积的和。主要的约束集是现金匹配约束。对于已知的 i，相应的约束可以表述为：在第 i 期从所有的 m 种债券产生的现金流总额至少要等于在第 i 期的债务。第二个约束是排除卖空债券的可能性。

这个问题在电子表格中用数字矩阵可以很清楚地看出来，就如下面这个

例子。

例 5.3 (6 年期的匹配) 我们希望在 6 年里面匹配现金债务。我们选择 10 种债券(为了简化,所有的会计账目都是以年为基础的)。每种债券的现金流结构在表 5—3 中相应的栏目显示。在该栏的下面是债券的当前价格。例如,第一栏表示 6 年底到期,息票率为 10%的债券。这个债券卖价为 109。倒数第二栏显示的是要求每年资产组合应该产生的现金(或者说债务)。我们将这个标准的现金匹配问题构造成一个线性规划问题,并解出最优资产组合。(用一个标准的线性规划数据包,比如在一些电子表格程序里的数据包,可以很容易地得出解。)解在表 5—3 的最后一行得出。由资产组合产生的实际现金在表格的最右端一栏显示。该栏是由每一栏的债券 j 乘以它的解 x_j 并加总后得出的。表中还显示了该组合的最小成本。

表 5—3 **现金匹配例子**

年	债券										现金需求	实际现金
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	10	7	8	6	7	5	10	8	7	100	100	171.74
2	10	7	8	6	7	5	10	8	107		200	200.00
3	10	7	8	6	7	5	110	108			800	800.00
4	10	7	8	6	7	105					100	119.34
5	10	7	8	106	107						800	800.00
6	110	107	108								1 200	1 200.00
p	109	94.8	99.5	93.1	97.2	92.9	110	104	102	95.2	2 381.14	
x	0	11.2	0	6.81	0	0	0	6.3	0.28	0	成本	

电子表格清楚地显示了该问题及其解。本例中,10 种不同债券的现金流一年接一年地显示在数列阵中的 10 栏。每种现金流的下面是债券的当前价格,价格下面显示包含在资产组合中的债券量。要求资产组合必须产生的现金流显示在倒数第二栏,而最后一栏是实际产生的现金流。

请注意这六年里有两年产生了超过必需的现金的额外的现金。这是因为

有些年份的需求额很大，因此必须购买大量的在那个时候到期的债券，然而，这些债券在前几年产生的息票只需要一部分来偿还债务。更加平稳的现 110
金必需量就不会导致这种盈余。

这里构造的现金匹配问题有一个根本的缺陷，我们这个例子中产生的盈余就说明了这个问题。这些盈余相当于额外的现金，基本上被浪费掉了，因为没有用它们来偿还债务，也没有将它们进行再投资。在现实中，这种盈余会立即用来再投资于当时可以买到的金融工具。对这种问题的公式做稍微的调整就可以适应再投资问题，但同时要引入一些对未来投资机会特征的假设。最简单的就是假设额外的现金可以按 0 利率结转，可以这么说，就是把这笔现金放到床垫下面，在需要它的时候才拿出来。通过引入虚构的债券，它具有现金流的形式（0，…，0，−1，1，0，…，0），因此才具有灵活性。这种债券在购买当年是−1（因为它要吸收资金）而在下一年被赎回。更好的公式化阐述是允许盈余现金被投资到实际债券中，但是要在这种特征里面引入一个关于未来利率（或者说，关于未来债券价格）的假设。一种符合逻辑的方法就是假设价格满足基于即期利率曲线的期望动态。那么如果 r' 是对 1 年以后的 1 年期利率的估计，在期望动态中它是现在的远期利率 $f_{1,2}$，就可以引入一种形式为（0，−1，$1+r'$，0，…，0）的债券。这种未来债券的引入允许将盈余进行再投资，将得出与前面给出的简单现金匹配问题不同的答案。

对基本的现金匹配问题作出其他调整也是有可能的。例如，如果涉及的总额不大，就可以对计算结果要求整数性质。也就是，可能会限制变量必须 111
是整数。其他的调整包含对现金匹配的免疫。

5.3 动态现金流过程

为了产生很好的结果，许多投资都要求精心持续的管理。例如，公司里

一个项目的过程可能是通过一系列经营决策来指导的。同样地，金融工具的组合在整个过程中可能会（也应该是）被系统性地调整。动态管理问题就是一系列影响投资的现金流的合适行为的选择。

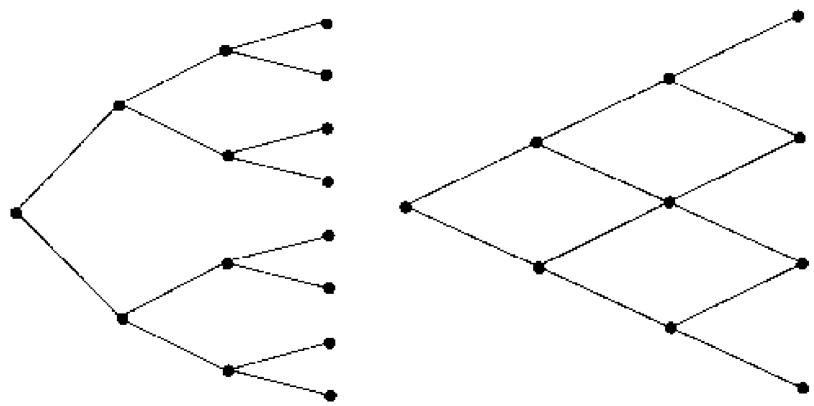
例如，设想你购买了一个油井。这是一个投资项目，为了得到好的结果，你必须对它进行完善的管理。这种情形下你必须在每个月决定是否从油井中抽取原油。如果抽取原油，这将发生经营成本，并且从原油销售中得到收入，产生利润，但同时你的原油储备也减少了。你当前抽取的决策显然会影响未来产出的可能性。如果你认为现在的油价很低，可能现在会很明智地不抽取，而是在油价更高的时候进行。

在确定性现金流的背景下讨论这种问题是相当有用的——既因为它是一种重要的问题，又因为解决这种问题的方法，就是在第三部分也要用到的**动态规划（dynamic programming）**。这个简单背景为以后的学习提供了一个良好的基础。

动态决策的表达方法

一项确定性的投资是由它的现金流来定义的，比如，$x=(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$，但是每笔现金流量通常依赖于复杂的管理决策。为了解决动态管理问题，我们需要用一种方法来表达每期各种可能的决策及其对未来现金流产生的效果。简而言之，就是需要一个**动态模型（dynamic model）**。有几种数学结构可以用来构建这种模型，但是最简单的是用一个**图表（graph）**。在这种结构中，现金流发生的时间点照常由水平方向的点来表示。在这种时间点的垂直方向上画出了一组**节点（nodes）**，它表示在那个时间点上各种可能的**状态（states）**或者情形。从一个时间到另一个时间的节点是由**分枝（branches）**或者**弧（arcs）**来连接的。一个分枝表示从一个节点到下一个节点的可能路径。不同的分枝对应于不同的管理行为，而管理行为又引导投资过程。这种图表的简单例子就是**二叉树（binomial tree）**和**二项式网格（binomial lattice）**，如图5－3（a）和（b）。在这种树形结构里，每个节点刚好发出两条分枝。最

左边的节点表示初始点的情形，紧接着的一对垂直的节点表示在时间点 1 的两种可能情形，等等。（在图中仅显示了 4 个时间点。） 112



（a）二叉树　　　　（b）二项式网格

图 5—3　图表表示法

二叉树是表示动态决策的一般方法。

通过一个例子来描述二叉树的意义是最好的方法。让我们再次考虑对最近购买的油井的管理。你在任何时间都可以自由决定是否抽取原油。在二叉树中的一个节点表示油井的状况，由它的储备规模、修理状况等等来定义。要把你的决策建立成一个二叉树模型，应该从该树的最左端的节点开始。在该点你仅有两种选择：抽取还是不抽取。将这两种决策中的一种向上画而另一个向下：假设抽取对应的是向上的分枝而不抽取对应的是向下的分枝。在下一时间点你的油井就处于两个节点之一。你再次作出决策，向上或者向下运动。当你做决策时，你从左到右，从一个节点到下一个节点，你沿着某条分枝路径穿过了整个二叉树。这个路径是由你的决策而惟一确定的，也就是说，整个时期内油井的状况以及总利润额都是由你的决策决定，并且由二叉树中这条特定的路径来表示的。

特别地，假设该油井的初始储备量是 1 000 万桶原油。每年从油井中可能会抽出当时储备的 10%，这样的话就必须雇佣一批员工并支付工资。然而，如果之前已经雇佣了员工，他们是前一年使用的员工，也就省去了雇佣

的费用。因此，要计算每年可获得的利润，有必要知道储备水平和是否已经雇佣了员工。因此我们在每一个节点标上储备水平和员工状态。例如，标号（9，是）意味着储备为900万桶和已经雇佣了员工。跨越两期的二叉树如图5—3（a）所示。

如果可以不支付工资地组织员工，就没有必要记录员工状态。因此我们可以从节点标号中去除这部分，并只保留储备水平。如果这样做了，一些原来并不相同的标号现在就变得一样了。在图5—4的例子中，在最后时间点上两个节点具有同样储备水平（意指900万桶）。因为标号相同，我们可以将两个节点合并为一个节点，如图5—4（b）所示。如果这个二叉树推广到

113 其他时期，这种组合效应会频繁发生，结果二叉树就会变成一个二项式网格。一种典型的二项式网格如图5—3（b）所示。在这种图中，先向上运动然后向下运动与先向下运动再向上运动到达的是同一个节点。二项式网格中的节点比二叉树的节点少。

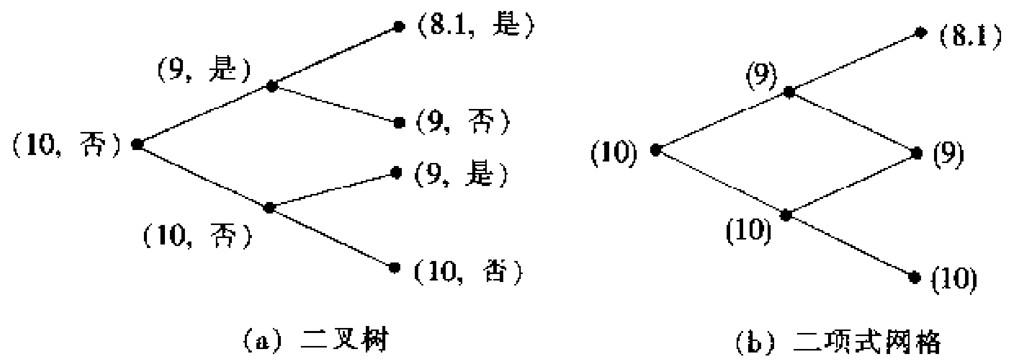


图5—4　油井状态树

抽取对应向上运动，不抽取对应向下运动。在（a）中的树显示储备水平和员工状况。如果只有储备水平对利润有影响，就形成一个二项式网格，如（b）所示。

在油井这个例子中，如果储备水平是决定利润的惟一相关因素，很显然从任何一个节点出发，二叉树里的先向上运动（对应于抽取原油）然后再向下运动（对应于不抽取）与先向下运动再向上运动对储备产生的影响是一样的。两种组合都使储备减少相同数额。因此二项式网格可以用来表示管理决

策，如图 5—4（b)。

我们在油井的例子中用二叉树或者二项式网格来分析，这适合于每个时间点上只有两种选择的情形。如果有 3 个选择，我们可以构造**三叉树**（**trinomial tree**）或者**三项式网格**（**trinomial lattice**），从每个节点发散出三个分枝。显然，这种方法也适用于数目有限的选择。（在纸上只有画比较小的树才是合理的，然而计算机可以在一定程度内有效地处理很大的树。）

现金流图表

将图表中的节点描述为在一个过程中所处的状态仅仅是表现动态投资情形的一个中间步骤。最终表示法的基本步骤是在图中把现金流分配于不同的分枝上。这些现金流用来评估管理决策。

在第 1 个油井例子中，员工雇佣成本为 0，而现在假设雇佣成本为10 万美元。（这只表示初始雇佣成本，并不指支付的工资。）假设生产原油的利润为每桶 5 美元。最后，假设油井每年年初的储备水平为 x。那么如果必须雇佣员工的话，生产一年的净利润是 5 美元×0. 10×x－100 000 美元，如果之前已经雇佣了员工，则为 5 美元×0. 10×x。我们可以在二叉树的分枝上输入这些值，表明如果选择该分枝会得到多大利润。这些值在图 5—5 中以百万美元为单位显示。 114

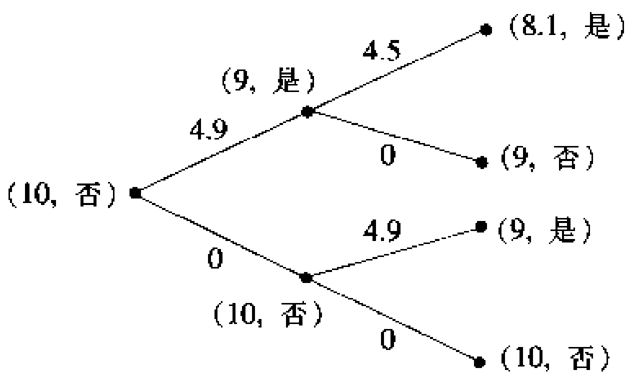


图 5—5 油井的现金流树

对应于一个决策的现金流列于与该决策相应的分枝上。现金流价值取决于节点状态和该决策。

既然只有分枝上的现金流的值对分析有重要作用，就可以（概念上的）跳过将节点描述为过程的状态这一步骤。然而，实际上节点描述也很重要，因为这些现金流的值是从这些描述中计算出来的。如果我们得到的二叉树在其分枝上已经标明了现金流价值，那么这就足够了，就不需要节点描述了。实际上，必须有人首先描述节点，如我们前面做的那样，这样才能确定现金流。

在这种表述中，同时还必须说明一个分枝上的现金流是在相对应时期的期初还是期末发生的。在现实中，一个分枝的现金流通常在整个时期分期发生，但是该模型在一个期末或者另一个期末（或者，有时候一部分在期初，另一部分在期末）赋予一个总值。决策会随着被表达情形的变化而变化。

有些情形下，现金流与过程的终点相关，其价值根据最后实现的节点变化而变化。这就是**最终回报（final reward）**或者**残值（salvage value）**。这些值处于图表中相应的最终节点上。在油井的例子中，最终的价值可能是油井被售出的价值。

5.4 最优化管理

一旦用图表表示与投资相关的现金流过程，我们就可以将前几章的原理用于确定最优管理计划。决策树中的每一条路径都会确定一个特定的现金流，因此只需要选择一条最好的路径，通常这是有最大现值的路径。因此解这种问题的一种方法就是将对应于所有可能路径的所有可能的现金流列出，计算它们各自的现值，并选择最大的一个。然后我们就按照对应于最大现值的路径来管理投资。

虽然这种方法对于小问题很有效，但对大问题可能会被**指数式增长（curse of dimensionality）**的计算量所困扰。二叉树里可能路径的数目会随着期数增加而指数性地增长。例如，在一个 n 期的二叉树里，节点的数目为

$2^{n+1}-1$ 个。因此如果 $n=12$（比如，1 年里每个月都决策一次），那么就有 8191 种可能路径。如果每个月有 10 种可能的选择，该数就会上升到 $10^{13}-1$，这就超过了我们直接计算的能力范围。我们可以用动态规划（dynamic programming）的计算机程序来更有效地求值。 115

连续动态规划

动态规划是逐步解决问题的，从终结时间点开始向后推算到初始时间点。因为这个原因，有时候用这句话来概括动态规划——“它倒着解决问题”。

动态规划的一个特殊形式，是基于 4.6 节的连续现值方法，对于解决投资问题尤其方便。我们称这种方法为**连续动态规划（running dynamic programming）**。我们在此讲述这种方法，并且在全书中都会用到它。

假设用前面描述的图表表示具有动态现金流的投资。为了简化，我们假设时期以年为单位，以年为单位复利计息。一个贯穿图表的路径产生现金流 c_0，c_1，…，c_{n-1}，（每笔现金流发生于期初），每笔现金流对应于它通过的弧，并且这个路径同样还决定了在最后一个节点的终结现金流 V_n。这笔完整的现金流的现值为：

$$PV=c_0+\frac{c_1}{1+s_1}+\frac{c_2}{(1+s_2)^2}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{(1+s_{n-1})^{n-1}}+\frac{V_n}{(1+s_n)^n}$$

这里 s_k 是即期利率。路径是通过一系列特定的决策来确定的——每个节点有一个决策。我们希望确定那些能使最终的现金流最大的决策。

在连续方法中，我们使用单期贴现因子 $d_k=1/(1+r_k)$，这里 r_k 是短期利率并且 $r_k=f_{k,k+1}$，我们一步一步地估算现值。特别地，在连续动态规划中，我们在每个节点上指定一个与该点所能获得的最大流动现值相等的数值，而忽略之前所有的现金流。对时间点 k 的第 i 个节点，标为 (k, i)，最大的连续现值称为 V_{ki}。我们把这些值称为 V 值。

在最后的那些节点上的 V 值就恰好是该投资过程的最终价值。这些价

值显然是这种现值——在时间 n 考虑的——可以忽略不计而求得的。因此求最后节点上的 V 值已经成为该问题的部分描述。

然后动态规划过程接着分析时间 $n-1$ 的节点。对时间 $n-1$ 的任意节点，我们假设基本投资过程已经处于那个节点了。前面所有节点已经作出了决策，前面的相应现金流 c_0，c_1，…，c_{n-2}已经发生。仅剩下 1 个决策要做：我们必须决定经节点（$n-1$，i）后走哪条弧到达时间 n 的最终节点。既然我们对过去的决策无计可施（从这里的假设观点看），很明显应该选择能使时间点 $n-1$ 上的现值（连续现值）最大化的弧。特别地，如果我们将到达时间为 n 的弧标上节点数 a，应该考虑值 $c_{n-1}^a+d_nV_{n,a}$。（这里 c_{n-1}^a是与弧 a
116 相关的现金流，而 $V_{n,a}$是弧线 a 到达的节点上的 V 值。）在求出从节点（$n-1$，i）发出的每一条弧 a 上的这种和之后，我们选择其中最大的值并标为 $V_{n-1,i}$。这是节点（$n-1$，i）上能得到的最大连续现值，因此就是正确的 V 值。图 5—6 中说明了这个过程，在时间点 $n-1$ 上每一个节点都重复一遍。

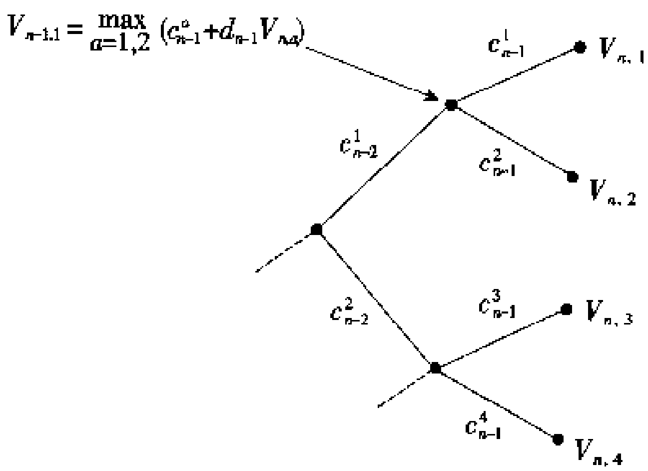


图 5—6 动态规划递归的第一步

假设该过程的前 $n-1$ 步都已经完成了，我们求出最后一步的最优选择。在时间点 $n-1$ 的每个节点上我们求出最大的连续现值。

在时间点 $n-2$ 紧接着执行相同的程序。我们假设投资过程在某个特定的节点（$n-2$，i）。从该节点发出的每一条分枝 a 产生一笔现金流

并经过投资过程后到达时间 $n-1$ 的相应节点 a。如果 c_{n-2}^{a} 是与此决策相关的现金流，那么考虑将来的现金流后，总的（连续）现值是 $c_{n-2}^{a}+d_{n-2}V_{n-1,a}$，因为连续现值等于当时的现金流加上下一期的连续现值的贴现值。我们把所有可能的弧对应的新值计算出来，并选出最大值。这个最大值定义为 $V_{n-2,i}$。如图 5—7 所示，在时间 $n-2$ 的所有节点上执行这个程序。

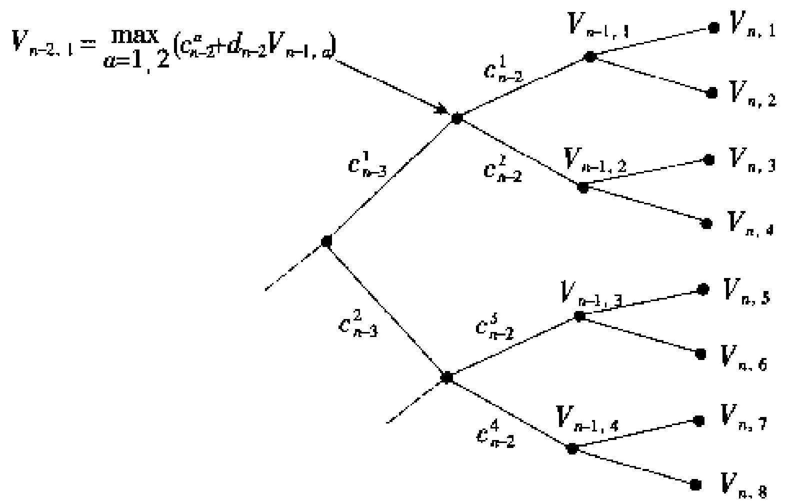


图 5—7　动态规划的第二步

假设该过程的前 $n-2$ 个步骤已经完成，我们估计剩余两步的连续现值。

这个程序一直持续，直到执行到时间点 0，那时只有 1 个节点。在那里确定的 V 值是在时间点 0 时最优的现值，因此它就是总的最大值。最优决策和现金流可以用动态规划过程轻易地确定，或者在计算节点 V 值时记录 117
下它们，或者用已知的未来 V 值向前推算而得到。

连续动态规划方法可以通过一种重复关系简洁地表达。定义 c_k^a 为从节点（k，i）到节点（$k+1$，a）过程中产生的现金流。这个重复发生的过程是：

$$V_k=\max_{a}(c_k^a+d_kV_{k+1,a})$$

举一个例子就会使这一切看起来豁然开朗。

几个例子

例 5.4（捕鱼问题） 假设你拥有一个湖泊和一条渔船作为一项投资。你打算从湖里捕鱼来营利。每个季节你决定是否捕鱼。如果不捕鱼，湖中的鱼群会繁殖，并且事实上鱼的数目会在下一季翻一番。如果捕鱼了，你会从湖中捕季初鱼群的 70%。没有被捕的鱼（和一些鱼在被捕之前）会繁殖，然而在下一季初，鱼的数目将与本季季初相等。因此对应于你捕鱼或者放弃捕鱼，鱼的数目会翻倍或者保持不变，你或者没有收获或者得到季初的鱼群数目的 70%。初始的鱼群数量为 10 吨。利润是每吨 1 美元。利率一直保持不变，为 25%，这意味着每年的贴现因子都为 0.80。不幸的是，你仅仅有 3 季能够捕鱼。管理问题就是要确定在这些季节中你应该在哪季捕鱼。

这种情形可以用如图 5—8 的二项式网格来描述。节点用鱼的数目来标明。这里适合用一个网格，而不是一个二项树，因为任何时候只有在湖中的鱼的数目才是相关的。用何种方式来达到这么多的鱼群数对未来的现金流没
118 有影响。分枝上的值表示与该分枝相关的捕鱼量（并且因此就是现金流）。水平的分枝表示没有捕鱼，并且没有现金流，而向下的分枝对应于捕鱼。

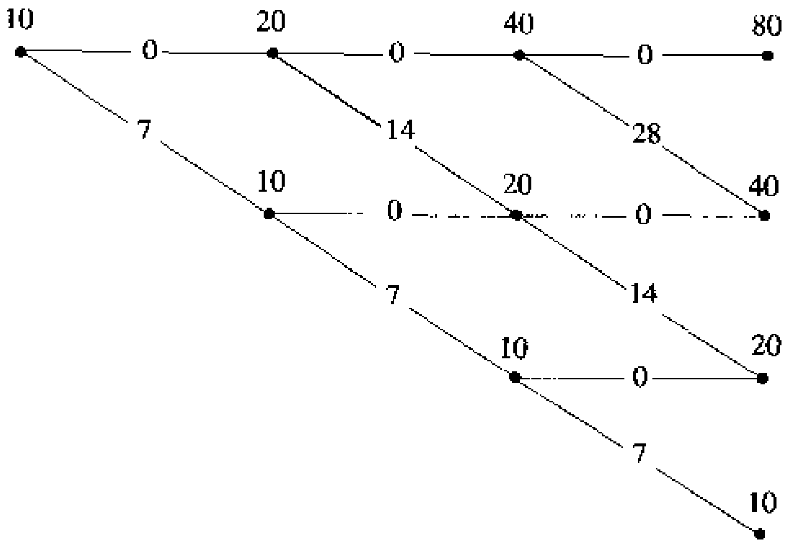


图 5—8 捕鱼问题

节点上的值是湖中鱼的吨数，分枝的值是现金流。

通过倒推计算可以解决这个问题。我们在最后时间的每一个节点指定价值0，因为我们一旦处于那一点就不能捕鱼了。然后在这每一个节点上倒推着计算一步，以确定出最大的可能现金流。（显然地，在每一种情形下我们都捕鱼）这就决定了在那一季获得的现金流，我们假设在该季初得到现金流。因此不对利润进行贴现。从那个时间点看，我们获得的值就是（连续）现值。这些值显示在图5—9的二项式网格里。

接着我们再倒推一期，并计算该时间的最大现值。例如，对紧靠初始节点右边的节点，我们有：

$$V=\max(0.8\times28,\ 14+0.8\times14)$$

第二个选择得出的现值最大，它对应于向下的分枝，也就是$V=14+0.8\times14=25.2$。因为即期利率曲线是平坦的（见4.6节），所以每一步用的贴现率都是$1/1.25=0.8$。最后，初始点上也进行相似的计算。那样给出的现值就是最大的。最优路径是由这个程序中发现的最优决策所决定的。本例中的最优路径由图5—9中的黑色粗线表示。用语言表达，得出的解就是在第一季不捕鱼（让鱼群数目增加），然后在接下来的两季捕鱼（收获鱼群）。

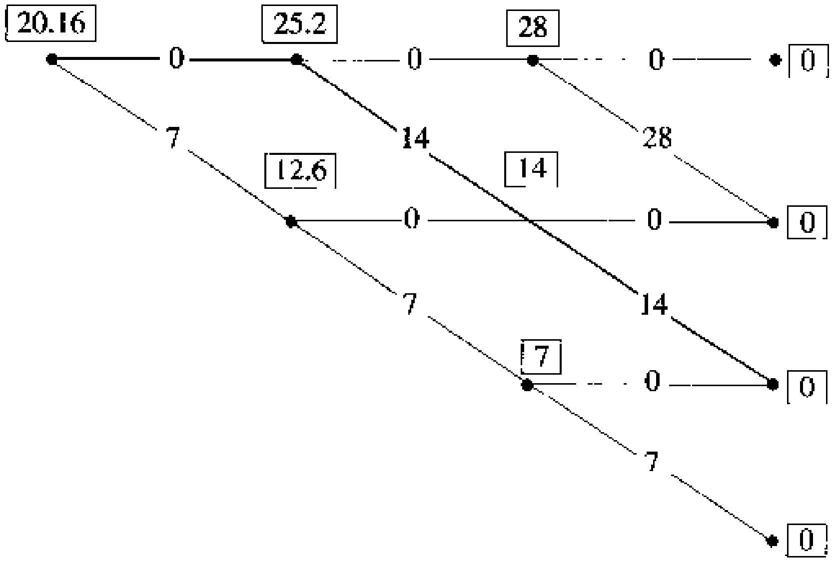


图5—9 计算捕鱼问题

现在节点上的值是最优连续现值，通过从最后的时间点倒着计算而得出。分枝的值是现金流。

该网格结构可以适用于从一个节点发出任意有限数量的分枝的情形。这种结构的限制条件是连续网格，每一步有连续一体的节点，而在每一个节点上有连续一体的可能决策。例如，在前一节讨论的油井的例子中，你可以从
119 储备 R 中抽取任意量 z，比如 0 和 M 之间，剩下的新储备量为 $R-z$。你的选择 z 是连续的，储备水平也是连续的。这种网格在图 5—10 中示意性地画出来了。这里每条垂直的线表示在特定时间点上所有可能的连续一体的节点。(在初始时间点只有一个节点。) 从一个节点发出来的扇形表示到下一个节点的所有可能性形成的扇形。每个时间点上只显示了 1 个扇形，而实际上在每条垂线的每个点上都会发出这样一个扇形。这种动态结构的过程很像有限节点的情形：该过程从初始节点开始，然后在所有可能的选择中有一个被选中。这样就确定了下一时间的垂线的一个特定节点，然后这种过程继续下去。用动态规划使这种过程最优化则反向推算，就如节点有限的情形一样，但是运算起来会更加困难，因为必须将 V 值指定到节点垂线的每一点。因此 V 就是定义在该垂线上的一个函数。有时候这个函数有一个简单的解析形式，可以简明地执行动态规划过程。下一个例子中说明了这种情况，顺便提一下，这也是以前讲过的一系列金矿例子的延续。

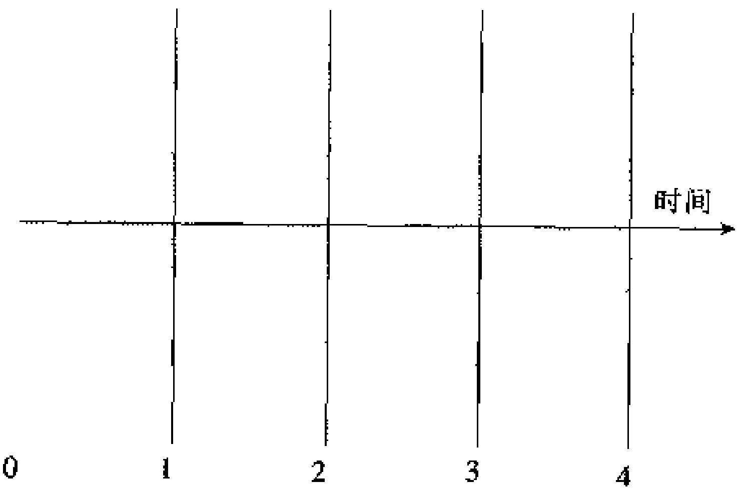


图 5—10　连续型网格

连续型网格是表示每期有连续一体的可能选择的情形的强有力的方法。

例5.5（康普莱科斯克金矿） 康普莱科斯克金矿用于出租。这个金矿已经开采过度，并且接近枯竭。要开采丰富的金矿变得越来越难。事实上，如果 x 是金矿在一年年初余下的黄金量，那么开采 $z<x$ 盎司黄金的成本就是 $500z^2/x$ 美元。（请注意随着 x 减少，开采黄金就越来越困难。）估计矿山中现存的黄金量是 $x_0=50\,000$ 盎司。金价是400美元/盎司。我们计划购买10年期的金矿租赁权。利率是10%。这项租赁权值多少呢？

要解答这个问题，我们必须知道在10年里怎样进行最优化的管理。特别是，我们必须确定每年开采多少黄金，以使现值最大化。为了得出最优管理计划，我们用连续型表格表示金矿，任何时间的每个节点表示每年年初金矿里余下的黄金量。我们用 x 表示这个量，它确定了从那个时间点开始剩余金矿的租赁权的最大值。

从实行租赁权开始，我们把每个时间点标为年数。初始时间是0，第一年年末是1，以此类推。该租赁期末是时间10。为了简化，我们同样假设，每年年初从金矿经营中获得现金流。 120

我们从时间9开始确定该金矿租赁权的值，那时余下的黄金是 x_9。该租赁权还有1年，因此通过使那年的利润最大化来得到租赁权的值。如果我们提炼 z_9 盎司黄金，从黄金销售中获得的收益为 gz_9，这里的 g 是金价，采矿的成本是 $500z_9^2/x_9$。因此，如果 x_9 是余下的储备水平，那么在时间9的最优值是：

$$V_9(x_9)=\max_{z_9}(gz_9-500z_9^2/x_9)$$

通过对 z_9 求导后令该式等于零，我们得出最大值。得出[1]

$$z_9=gx_9/1\,000$$

将这个值代入前一个式子得出：

$$V_9(x_9)=\frac{g^2z_9}{1\,000}-\frac{500g^2x_9}{1\,000\times1\,000}=\frac{g^2x_9}{2\,000}$$

我们将这个值写成 $V_9(x_9)=K_9x_9$，这里 $K_9=g^2/2\,000$ 是一个常量。因此该租赁权的值就直接与矿山里余下的黄金量成比例，比例系数是 K_9。

接下来我们倒推，并解出 $V_8(x_8)$。在我们的公式里包含第 9 年产生的利润和在该年末该租赁权的值——这个值取决于矿山中余下多少黄金。因此，

$$V_8(x_8)=\max_{z_8}[gz_8-500z_8^2/x_8+dV_9(x_8-z_8)]$$

请注意我们把与金矿下一年相关的值用贴现因子 d 进行了贴现。就如前面的那些例子一样，贴现率是不变的，因为即期利率曲线是平坦的。这里 $d=1/1.1$。

用函数 V_9 的简化形式，我们可以写成：

$$V_8(x_8)=\max_{z_8}[gz_8-500z_8^2/x_8+dK_9(x_8-z_8)]$$

我们再次对 z_8 求导并令该式为 0，得出：

$$z_8=\frac{(g-dK_9)x_8}{1\,000}$$

可将这个值代人 V_8 的表达式，得到：

$$V_8(x_8)=\left[\frac{(g-dK_9)^2}{2\,000}+dK_9\right]x_8$$

它与 x_8 成比例，我们可以写成 $V_8(x_8)=K_8x_8$。

121 我们可以用这种方法继续倒推，确定函数 V_7，V_6，…，V_0。这些函数的形式都是 $V_j(x_j)=K_jx_j$。显然，应该在每一步都应用同样的代数运算，因此我们有逆推公式：

$$K_j=\frac{(g-dK_{j+1})^2}{2\,000}+dK_{j+1}$$

如果我们用特定值 $g=400$ 和 $d=1/1.1$，从 $K_9=g^2/2\,000=80$ 开始倒推。那么我们可以轻易地将其他值都算出来，如表 5—4 所示，从底部开始算到顶部。

正是计算出来的最后一个值（也就是 K_0）决定原来租赁权的值。这个值是在剩下 50 000 盎司黄金时求出租赁权的值而得到的。因此 $V_0(50\,000)=213.82\times50\,000=10\,691\,000$ 美元。

表 5—4 康普莱科斯克金矿的 K 值

年	K 值
0	213.81
1	211.45
2	208.17
3	203.58
4	197.13
5	187.96
6	174.79
7	155.47
8	126.28
9	80.00

最优方案是作为动态规划过程的副产品被确定的。在任意时间 j，要提炼的黄金量是在最优化问题中求出的 z_j。因此 $z_9=gx_9/1\ 000$，$z_8=(g-dK_9)x_8/1\ 000$。总之，$z_j=(g-dK_{j+1})x_j/1\ 000$。

用连续网格的动态规划问题并不是总能像上面这个例子一样有效，因为并不是总能找到一个 V 函数的简单表达式。（在金矿例子中那种特定的成本函数形式产生 V 函数的线性形式。）但动态规划是解决问题的一种常用技术，它有很多种变形和应用。其一般思想在第二和第四部分里面反复地运用。

5.5 一致性定理*

我们知道，在选择投资机会时运用的现值标准和内部收益率标准之间是有区别的，并且假如要估计整个投资期间现金流的价值，理论家强烈地相信 122

现值标准是两者中更好的一种。但是如果要求你考虑固定金额的投资（比如，对你的朋友的创业进行投资），你可能不会用现值来评估这项投资，你将对潜在收益率更加关注。事实上，如果作出了这项投资，你就会鼓励你的朋友使你投资收益率最大化，而不是公司的现值最大化。而你的朋友却执意要使现值最大化。这样存在冲突吗？

通过对一个假设的情形进行分析，我们将尽力阐明这个重要问题。假设你的朋友发明了一种新玩意，并拥有专利权。要从这项发明中获利，他必须筹集资金，进行经营。经营成本是立即发生的，而在年末才会有回报。换句话说，现金流由两部分组成：现在的负现金流和年末的正现金流。

你的朋友知道有很多种方法来经营，并且相应的有不同的成本和回报。因此对应于不同的经营计划就有很多种可能的现金流，他必须选择 1 个。这些不同的可能性可以用图上的点来表示，纵轴表示回报（发生在年末），横轴表示当前的经营成本，如图 5—11（a）。你朋友可以从这些点中选择任意一个。

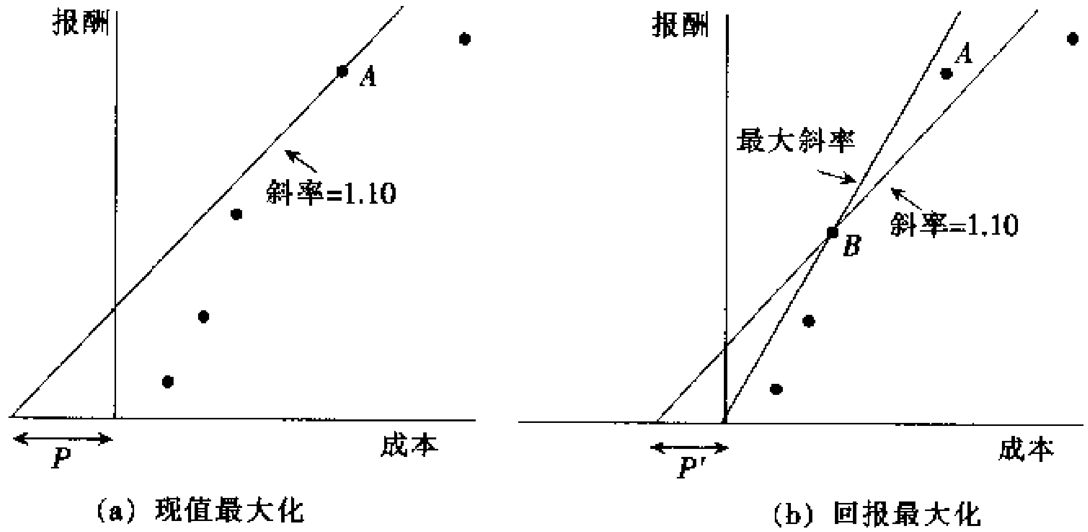


图 5—11　标准的比较

（a）计划 A 被选中，因为它的现值最大。它对应斜率等于 1.1 的最高的直线。（b）计划 B 被选中，因为它是从原点出发的直线里使斜率最大的点。如文中说明的一样，（b）的分析是不完善的，矫正以后，收益率最大化标准与现值标准一致。

同样假设 1 年期利率 $r=10\%$。将钱存人银行的可能性可以在图中用一条斜率为1.1的直线来表示：现在的存款是成本，而回报就是成本的 1.1 倍。这个斜率将被用来评估现金流的现值。

如果你的朋友决定使他的创业投资的现值最大化，他将画一条斜率为 123
$1+r=1.10$的直线，并求出一条通过可能的经营计划的最高的直线。位于那条直线的计划就是最优的。这条最优直线和计划如图 5—11（a）所示：计划 A 是最优的。利用一个银行贷款，就有可能沿着穿过 A 的直线移动。特别地，有可能一直移动到横轴上。在这一点上，下一年不会收到钱，但是现在能获得一笔净利润 P。

假设你的朋友请你对他的企业进行投资，提供一部分经营成本，并且会得到那一部分成本的回报。你会衡量你的投资收益。将一条直线以原点为轴向上旋转，到达使斜率最大的经营点，这个经营点就具有最高的回报。这个过程如图 5—11（b）所示。根据这个原则得到的最优点是图中的 B 点。最大的收益率就是这条斜率最大的直线的斜率。请注意，这条直线的斜率大于110%。因此 B 点比 A 点的收益率高。然而，它的现值，仅仅为 P'，比 P 小。这看起来似乎是一种矛盾。

这里说明怎么解决这个冲突。现在你的朋友拥有他的新发明的所有权。他没有对这项经营投人一分钱，但是他的现值分析表明，他可以去银行，贷出一笔足以支付计划 A 成本的款项，然后，在该年末，偿还贷款并得到 1.10P 的收益（A 计划现在值 P）。他并不关心收益率，因为他并没有投资 1 分钱，他仅仅是贷了一笔款。同样地，他可以向你借钱，但是他只会向你支付当前的利率而不会支付的更多。

但是并没有人要你将钱贷出，只是请你对这个企业进行投资——来对它拥有所有权。一个极端的情形是假设你的朋友让你将整个企业投资买下。那么你就拥有他的新发明的所有权。他愿意留下来经营这项投资（如果你提供必要的经营成本的话），而你却拥有采用哪个经营计划的决定权。

如果你的朋友将这项创业投资卖给你，他会向你收取金额 P，因为如果他保留所有权的话，他的发明对他来说具有的价值是 P。因此如果你决定购买该企业的话，现在经营计划的总费用是 P 加上实际的经营成本。如果你想使你的收益率最大化，你就要使收益/（成本＋P）最大化。将一条直线以点 $-P$ 为轴向上旋转，到达一个使它的斜率最大的经营点，可以求出新的最佳经营计划。该点将为 A 点，是使现值最大的点。（再次参看图 5—11(a)。）同样地，一旦你是所有者，你可能考虑使现值最大化。这同样会得出点 A。因此如果你决定购买这个企业，你支付全部值 P，你将按计划 A 经营，从而使投资收益率最高，而你的收益率将是 110%。（如果你是借入经营成本而不是你自己注入资金，这没有关系，你仍然会希望在 A 点经营，收益率仍然为 110%。）

将上面的讨论概括成一般结论，我们称之为**一致性定理（harmony theorem）**。它表明当估算所有权的价值时，现值标准和收益率标准是一致的。

124 ⇒**一致性定理（harmony theorem）** *一项投资的当前所有者希望通过经营使它的现金流的现值最大化。很可能支付这项创业投资的预期份额的全部价值的潜在的新所有者，为了使他们投资的收益率达到最大化，将希望该公司以同样的方式经营。*

一致性定理认为：按照使现金流的现值最大化的方式经营一项投资（比如一个公司）是合理的。当前所有者和潜在投资者都会赞同这一政策。

本节的讨论仅考虑发生两次现金流的确定性现金流。一致性定理同样可以扩展到多期和随机现金流——在确定的条件下。在练习 10 中讨论了一个对多期的推广形式。

5.6 公司的估值*

现金流分析的原理可以用来评估一个公开交易公司的价值，事实上，几乎所有分析价值的方法都用到了某种形式的现金流分析。然而，听起来可能很简单，但是总的思想可以有种种解释，每一种解释都会得出不同的结果。这些差异是由应该用哪些现金流形成分析的基础这一问题引发的：它们应该是股票持有人的股利、公司的净收益，还是拥有公司并能根据公司政策而自由地提取现金的个人或者团体得到的现金流？如果这些不同的数额是由标准的会计准则定义的，它们会得出有显著差异的估测公司值。

对这种分析的另一种弱化就是它是基于这样的假设的：未来现金流是确定知道的，而这当然并不能总是如此。在分析中通常也认识到了不确定性，但是以一种简化的方法来处理（例如，将用来贴现的利率提高到无风险利率之上）。我们在后面的各章中将讨论不确定情形下其他的基础更牢固的估值方法。本节假设现金流是确定的。

股利贴现模型

公司里的股票所有者会期待每期得到股利。假设已知第 k 年（$k=1, 2, \cdots$）会收到股利 D_k。如果利率（或者贴现率）固定为 r，将这些股利流的现值作为公司对股票持有者分派的价值就是合理的，即：

$$V_0=\frac{D_1}{1+r}+\frac{D_2}{(1+r)^2}+\frac{D_3}{(1+r)^3}+\cdots$$

这个公式很简明，但是它要求未来现金流是确定的。

详细说明股利的常用方法是**固定增长股利贴现模型（constant-growth dividend model）**，这里股利以一个不变的比率 g 增长，特别地，已知 D_1 和关系式 $D_{k+1}=(1+g)D_k$，股利流的现值为 125

$$V_0=\frac{D_1}{1+r}+\frac{D_1(1+g)}{(1+r)^2}+\frac{D_1(1+g)^2}{(1+r)^3}+\cdots=D_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+g)^{k-1}}{(1+r)^k}$$

除了分子中多出来的增长项，这个算法与年金的算法相似。只有当股利增长率小于贴现率，即 $g<r$ 时，这个和的值才是有限的。在这种情况下我们有简明的**戈登公式（Gordon formula）**（见练习 11）。

$$V_0=\frac{D_1}{r-g} \tag{5—1}$$

请注意，根据这个公式，如果 g 上升，当前的股利 D_1 上升，或者贴现率下降，公司股票的价值将上升。这些性质直观地看就很明显。

如果从当前股利（已经支付）D_0 得出 D_1，我们可以将（5—1）改写为包含了第一年增长的形式。下面我们突出地说明这个问题。

*⇒**贴现增长公式（discounted growth formula）** 考虑一笔每期增长率为 g 的股利现金流。令 $r>g$ 为每期的贴现率。那么从现在开始计第一期，股利为 D_1 的现金流的现值为：*

$$V_0=\frac{(1+g)\ D_0}{r-g} \tag{5—2}$$

这里的 D_0 是现在的股利。

在用固定增长股利贴现模型时，你必须估计增长率 g 并对贴现率 r 赋予一个合适的值。对 g 的估计可以基于公司股利过去的情况和未来的预期。对 r 赋予的值通常比实际无风险利率高，表明不确定现金流应该比确定的现金流贴现得更多。（在第 15 和 16 章里，我们会学习考虑不确定性情况的更好的方法。）

例 5.6（XX 公司） XX 公司已经支付了 137 万美元的股利。该公司在可预见的将来会以 10%的增长率增长，因此多数分析师都预测股利有相同的增长率。这种公司用的贴现率为 15%。在 XX 公司里一股股票的价值是

多少？

所有股票的总价值由（5—2）得出。因此这个值为：

$$V_0=\frac{1\,370\,000\times1.10}{0.15-0.10}=30\,140\,000\text{ 美元}$$

假设有 100 万股发行在外。根据这个分析，每股价值 30.14 美元。

自由现金流*

股利贴现模型的一个概念上的困难就是股利率由公司的董事会决定，而 126
这个比率有可能并不代表公司的财务状况。另一种可能的估值方法是假设你单独拥有该公司，并可以在产生现金流时将其取出。从这种假设得出的公司价值就是净收入流的贴现值。

公司的净收入是由会计准则来定义的。最简单的做法是收入减去成本，再减去税收。但是事情往往很少有这么简单的。价值估算必须考虑厂房和设备的折旧、债务利息支付、税收和其他因素。最后的净收入数字可能就与可以从公司里提取的现金流关系很小了。

在确定性方法的限定下，公司估值的最好方法是确定可以从公司中提取并分配给所有者的有最大现值的现金流。任何一年的相应的这种现金流叫做该年的**自由现金流（free cash flow，FCF）**，粗略地说，自由现金流是经营产生的现金流减去维持经营以及增长所必要的投资后得出的。

很难得到对自由现金流的准确衡量。首先，有必要评估公司在不同政策下产生现金流的各种可能性。其次，有必要确定投资的最优比率，即产生具有最大现值的现金流的比率。通常这个最优比率仅仅是估计值，但是由于增长率和现值之间的关系很复杂，这个估计的比率也许与真实的最优比率偏离很大。我们将用一个高度理想化的例子来说明这个理想的过程。

假设一个公司在第 n 年的总收入为 Y_n，并决定每年用这笔金额的一定比例 u 来投资，以达到收入的增长。增长率由函数 $g(u)$ 确定，这是该公司的特征之一。在（简化的）会计基础上，折旧是当前资本账户的一定比率 α

（例如，$\alpha \approx 0.10$）。在这个情形中资本 C_n 满足公式 $C_{n+1}=(1-\alpha)\ C_n+uY_n$。根据这些设想我们可以为公司建立总收入的财务报表，如表 5—5 所示。

表 5—5　　　　自由现金流

财务收入报表	
经营的税前现金流	Y_n
折旧	αC_n
税前收入	$Y_n-\alpha C_n$
税收（34%）	$0.34(Y_n-\alpha C_n)$
税后收入	$0.66(Y_n-\alpha C_n)$
税后现金流（税后收入＋折旧）	$0.66(Y_n-\alpha C_n)+\alpha C_n$
持续投资	uY_n
自由现金流	$0.66(Y_n-\alpha C_n)+\alpha C_n-uY_n$

例 5.7（最优增长） 我们可以将前面的分析向前推进一步，计算并用明确的公式求出 Y_n 和 C_n。因为 $Y_{n+1}=[1+g(u)]\ Y_n$，所以我们很容易明白 $Y_n=[1+g(u)]^nY_0$。同样，可以证明：

$$C_n=(1-\alpha)^nC_0+uY_0\left\{\frac{-(1-\alpha)^n+[1+g(u)^n]}{g(u)+\alpha}\right\}$$

如果略掉含有 $(1-\alpha)^n$ 的两项（因为它们将几乎抵消掉），我们有：

$$C_n=\frac{uY_0[1+g(u)]^n}{g(u)+\alpha} \tag{5—3}$$

127　将 Y_n 和 C_n 的表达式代入表 5—5 的最后一行，我们得出时间 n 的自由现金流是：

$$FCF=\left[0.66+0.34\frac{\alpha u}{g(u)+\alpha}-u\right][1+g(u)]^nY_0 \tag{5—4}$$

这是一个递增的几何级数。我们可以用戈登公式计算它在利率为 r 时的现值，得出：

$$PV=\left[0.66+0.34\frac{\alpha u}{g(u)+\alpha}-u\right]\frac{1}{r-g(u)}Y_0 \qquad (5—5)$$

只通过观察是不容易看出哪个 u 值最好的。让我们来看另一个例子。

例 5.8（XX 公司） 假设 XX 公司当前的收入是 $Y_0=10\,000\,000$ 美元，初始资本额[2]为 $C_0=19\,800\,000$ 美元。利率 $r=15\%$，折旧因子为 $\alpha=0.10$。投资率和增长率之间的关系为 $g(u)=0.12[1-e^{5(\alpha-u)}]$。请注意 $g(\alpha)=0$，表明投资率 α 乘以收入刚好跟上资本折旧水平。

利用式（5—5）我们可以求出选择各种投资率 u 的公司价值。例如，对于 $u=0$，即没有投资，这个公司将逐渐萎缩，在此政策下公司的现值为 29 000 000美元。如果 $u=0.10$，该公司将恰好保持当前的水平，在该计划下公司的现值将为 39 600 000 美元。当 $u=0.50$ 时，现值将为 52 000 000 美元。

有可能使式（5—5）最大化（通过试错法或者通过电子表格数据包的简单最优化程序）。解为 $u=37.7\%$ 和 $g(u)=9.0\%$。相应的现值是 58 300 000 美元。这就是公司的价值。

这里有一个需要仔细考虑的问题。假设第一年，公司根据这个计划经营，用总收入的 37.7%进行新的投资。为了简化，假设该年没有股利。该公司 1 年后的价值为多少？回忆在这一年里，资本和收入扩张了 9%。你会猜想公司的价值同样也增长了 9%吗？回想一致性定理。事实上，公司价值的增长率是利息率，为 15%。投资者应该得到这个利率，并且事实确实如此。其原因是因为假设没有支付过股利，这个理由看起来可能会很奇怪。产生出来但没有从公司提出的自由现金流，在该年被公司持有（它的收益为 15%），而这部分价值在计算未来现金流的现值时必须加入。如果第一年产生的自由现金流作为股利派出，该公司的价值就会增长 9%，但是投资者的总收益，包括股利和价值增长，也将是 15%。 128

尽管这个例子高度理想化了，但它显示了一个（在确定性的假设下）完

整定价过程的特征。自由现金流必须安排用于未来的投资。另外，这笔现金流必须通过选择合适的资本投资政策来达到最大化。因为当前投资对未来自由现金流的影响是复杂的，有效的最优化要求运用严谨的模型和最优化技术。

5.7 小结

利率理论可能是应用最广泛的金融工具。它用来确定项目的价值，在各个项目之间配置资金，设计复杂的债券组合，确定如何有效地管理投资，甚至于决定一个公司的价值。

当与一般的解决问题的方法，特别是最优化方法结合时，利率理论是最有用的。辅以这些方法，利率理论提供的就不仅是对价值的一个静态衡量，它将指导我们求出具有最高价值的决策或者结构。

可以用这些方法的组合解决的一类问题就是资本预算问题。在其中，最典型的问题是，要在一组相互独立的项目之间配置固定的预算资金，以使净现值最大化。解决这一问题的近似方法是选择具有最高收益—成本比率的项目。而将它构建成 0—1 最优化问题，并利用整数规划数据包可以精确地解决这个问题。项目之间有依赖关系的更复杂的资本预算问题同样也可以用 0—1 规划方法求解。

选择一个债券组合来满足某种要求的问题可以便捷地构成一个最优化问题，但是可能的构造方法有几种。这里面一个尤其简单的问题就是现金匹配问题，这里要构建资产组合以期每期产生所要求的现金流。这个构造的弱点
129 就是在某些时期可能会产生超过要求的额外现金流，这些额外现金流基本上浪费了。更复杂的构建就没有这种弱点。

为了产生卓越的成果，很多投资都要求精心的持续管理。一系列管理决策和得出的现金流之间的关系可以用图表来建立模型。（尤其有用的图表类

型是树和网格。）在这种图表里，节点对应于过程的状态，而由某个节点发出的一个分枝对应于该节点作出的某种选择。与每个分枝相关的是一次现金流价值。

最优动态管理是由图表中沿着特定的产生最大现值的弧形成的路径组成的。这个最优路径通过动态规划方法能够有效地求得。投资问题中一种特别有用的动态规划方法是利用连续方法估量现金流。

动态规划是按时间倒推的。对 n 期问题，该过程的连续型方法是通过求出时间点$n-1$上每个节点 i 的最好决策，并赋予一个 V 值，在每个节点上标为 $V_{n-1,i}$。如果投资从该节点开始，这个 V 值是能获得的最优现值。要求出这个值，需要考察从节点 i 发出的每个可能的弧。弧上的现金流与该弧到达的节点的单期贴现 V 值之和被估算出来。原节点 i 的 V 值是那些和里最大的一个。在完成了时间点 $n-1$ 的所有节点的计算程序后，该程序就倒推到时间点 $n-2$ 的所有节点。求那些节点上的最优 V 值用的程序与时间点 $n-1$ 上的节点用的程序完全类似。该程序继续倒推贯穿所有时期，在赋予时间点 0 上的初始节点一个最优 V 值时结束。

当经营一项创业投资时，使现值最大化是合理的。另一方面，投资者也许对收益率很感兴趣。这些标准可能看起来存在矛盾，但一致性定理表明，在假设投资者对他们拥有的该创业投资支付全值时，这两个标准是等价的。

现值分析通常用来评估一个公司的价值。这样的程序之一就是股利贴现模型，它假设股票持有人拥有的价值等于未来股利支付额的现值。如果假设股利每年增长率为 g，就得出计算现金流现值的简单公式。

公司估值的更好方法基于对自由现金流的估值。自由现金流是维持最优经营和投资策略时可以从公司提取的现金额。在理想化的形式中，这种方法要求在各种可能的管理决策中——特别是那些与导致收人增长的投资相关的决策——使自由现金流的现值最大化。

基于现值的估值方法的缺陷是未来现金流被看作是确定的，而事实上未来现金流通常是不确定的。因此确定性理论是不够的。这个缺陷被广泛地认

识到。为了弥补这个缺陷，普遍的做法是将预测的但不确定的现金流以高于
130 无风险利率的利率贴现。这有理论上的合理性，但是解决不确定性问题的完全适合的一种方法更加精湛。投资学里令人兴奋的不确定性的阐述将在下一章开始，并贯穿本书的剩余部分。

练习

1. （资本预算）一家公司正在考虑对如表 5—6 中列出具有各自财务特征的几个推荐项目进行投资。可用的预算为 600 000 美元。基于收益—成本比率的近似方法会推荐什么样的项目组合？最优项目组合是什么？

表 5—6　　推荐项目的财务特征

项目	费用（支出）(1 000 美元)	现值（1 000 美元）
1	100	200
2	300	500
3	200	300
4	150	200
5	150	250

2. （公路⊕）参考例 5.2 中的交通选择问题。在 Cay 路上的桥实际上是尤金和伯格之间公路的一部分。桥上的车道数少于道路本身的车道数是不合理的。这意味着如果执行项目 2 或 4，那么就必须执行项目 6 或 7。构建一个包含了这种额外要求的 0—1 规划问题。解该问题。

3. （两期预算⊕）一个公司已经确认了一些看好的项目，如表 5—7 所
131 示。前 2 年的现金流如表中所示（它们都为负）。以后的现金流为正，每个项目的净现值如表所示。该公司经理已经决定他们可以在前两年中每年对这些项目投入至多 250 000 美元。

表5—7 一系列项目

现金流			
项目	1	2	NPV
1	−90	−58	150
2	−80	−80	200
3	−50	−100	100
4	−20	−64	100
5	−40	−50	120
6	−80	−20	150
7	−80	−100	240

如果第1年用的资金少于250 000美元，余额可以在10%的收益率上投资，并用来扩大第二年的预算，应该对哪些项目投资？

4.（债券矩阵◇）现金匹配和其他一些问题可以很方便地用矩阵形式表达。假设有 m 种债券。我们用与其相关的正现金流（列）向量 c_j 定义债券 j，列向量是 n 维的。每年的债务同样用 n 维列向量 y 来表示。我们可以将这些向量一列一列排好形成债券矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的各列。最后令 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 为 m 维的列向量。现金匹配问题可以表示为：

$$\min \mathbf{p}^T\mathbf{x}$$

$$\text{s. t.}\ \mathbf{Cx} \geqslant \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} \geqslant 0$$

(a) 在表5—3中确认 $\mathbf{C}$、$\mathbf{y}$、$\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{x}$。

(b) 证明如果所有的债券都是根据共同的利率期限结构来定价的，则存在一个向量 $\mathbf{v}$ 满足：

$$\mathbf{C}^T\mathbf{v}=\mathbf{p}$$

$\mathbf{v}$ 里的分量是多少？

(c) 假设 $\mathbf{b}$ 是一个列向量，其分量代表每期的债务。请证明一个刚好可

偿付这些债务的资产组合恰好满足：

$$\mathbf{Cx}=\mathbf{b}$$

x 和 **v** 如前面定义，请证明资产组合 **x** 的价格为 $\mathbf{v}^T\mathbf{b}$。解释这一结果。

5.（三项式网格）一个三项式网格是三项树的一个特例。从每个节点出发有三种可能的运动：上、中、下。这种网格的特殊特征是某一对运动将在未来 2 期后到达相同的节点。我们可以把这些等价表达为：

上一下＝下一上＝中一中

中一下＝下一中

中一上＝上一中

画一个跨度为 3 期的三项式网格。它包含多少节点？在有相同时期的三项树里包含多少节点呢？

6.（债券项目⊕）你是 XYZ 养老基金的经理。在 2011 年 11 月 5 日，XYZ 必须购买美国国库券的一个组合来偿付基金未来的预期债务。在这个时间可获得的债券是第 4 章中练习 4 里的那些。卖空是不允许的。按照前面练习的程序，构造的期限结构估计的 4 阶多项式为 $r(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\alpha_4 t^4$。XYZ 的债务如表 5—8 所示。

132 表 5—8 XYZ 养老基金的债务

债务	发生于 15 日
2012 年 2 月	2 000 美元
2012 年 8 月	20 000 美元
2013 年 2 月	0 美元
2013 年 8 月	25 000 美元
2014 年 2 月	1 000 美元
2014 年 8 月	0 美元
2015 年 2 月	20 000 美元
2015 年 8 月	1 000 美元
2016 年 2 月	15 000 美元

(a)(简单现金匹配)假设每期的超额现金流只能以 0 利率持有来偿付未来债务，用购买的国库债券构建一个最小成本的债务匹配资产组合。

(b)(复杂现金匹配)假设每期的超额现金流可以在期望利率(由当前期限结构隐含的)水平上被再投资以偿付未来债务，用购买的国库债券构建一个最小成本的债务匹配资产组合。不能借入。

(c)(久期匹配)构建一个现值等于债务流现值的最小成本资产组合。对期限结构参数变化进行免疫。在 5 种情况下进行这种计算。第 1 种情况是对 α_1 的变化免疫，第 2 种情况是对 α_1 和 α_2 的变动免疫，以此类推。

7.(捕鱼问题)当利率为 33%时求例 5.4 中捕鱼问题的解。决策会与利率为 25%时的决策不同吗？在贴现率为哪个关键值时，解会改变？

8.(康普莱科斯克金矿⊕)考虑康普莱科斯克金矿并假设 10%的常数利率。同样假设金价恒定为 400 美元/盎司。

(a)如果当前的矿藏储备为 x_0，求该金矿的价值(不是指 10 年期的租赁)。特别地，当最初 $x_0=50\ 000$ 盎司时，该金矿值多少？(提示：考虑当 $k\to\infty$时 K_k 的回归方程式。)

(b)对于前面正文中考虑的 10 年期租赁，在租赁权结束时剩余多少黄金？该矿山在那时值多少？

(c)如果该金矿没有出租，而是由所有者进行最优化经营，在 10 年后该金矿值多少？

9.(小熊油井)你已经购买了小熊油井的租赁权。这个油井最初有 100 000桶原油的储备。每年你对如何经营油井都有 3 种选择：(a)你不能抽取原油，这样就没有经营成本，原油储备不变；(b)你可以正常地抽取原油，这样经营成本是 50 000 美元，你会抽取出该年初储备的 20%； 133
(c)你可以采用利用水压的高级抽取技术，这样经营成本为 120 000 美元而你会抽取出该年初原油储备的 36%。油价为每桶 10 美元。假设你的经营成本和收入都发生在年初(通过提前预卖)。你的租赁权保持 3 年。

(a)说明如何建立一个三项式网格来表示原油储备的可能状态。

(b) 你的利润的最大现值为多少？相应的最优抽取策略是什么？

10. (多期一致性定理◇) 一个公司的价值是它的可能现金流的最大现值。这可以表述为：

$$V_0=\max\left[x_0+\frac{x_1}{1+s_1}+\frac{x_2}{(1+s_2)^2}+\cdots+\frac{x_n}{(1+s_n)^n}\right]$$

这里的最大化是针对所有可能的现金流的 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$，s_i 是即期利率。令 x_0^* 是最优计划里的第一笔现金流。如果公司选择任意项计划导致的最初现金流为 x_0（分派给所有者的），该公司在 1 年后的价值为：

$$V_1(x_0)=\max\left[x_1+\frac{x_2}{1+s'_1}+\frac{x_3}{(1+s'_2)^2}+\cdots+\frac{x_n}{(1+s'_n)^{n-1}}\right]$$

这里的最大化是针对以 x_0 开始的所有可行现金流的，s'_i 是 1 年后的即期利率。一个以完全公正的价格购买该公司的投资者有初始现金流 x_0-V_0，并在 1 年后达到价值 $V_1(x_0)$。因此投资者得到的 1 年期总收益率为：

$$R=\frac{V_1(x_0)}{V_0-x_0}$$

这个投资者将尽力选择使 R 最大化的 x_0。称这个值为 $\overline{x}_0$。假设利率满足期望动态，并且 $V_1(\overline{x}_0)>0$，说明最大值 R 是 $1+s_1$，并且这个收益率由决定 V_0 的同样的 x_0^* 达到。

11. (增长型年金) 证明对于 $g<r$，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+g)^{k-1}}{(1+r)^k}=\frac{1}{r-g}$$

(提示：令 S 为总和。请注意 $S=1/(1+r)+S(1+g)/(1+r)$。)

12. (两阶段增长) 在证券分析中通常将基本股利增长模型做些修改，考虑不止一个阶段的增长，不同增长阶段的增长因子不等。例如考虑公司 Z，当前是每年派发 10 000 000 美元的股利。接下来的 5 年预期股利每年以 10%的比率增长，以后每年增长 5%。

(a) 用利率为 15%的股利贴现方法计算出公司价值为多少？

(b) 求出一个适合两阶段增长模型的计算公司价值的通用的公式。假设有 k 年的增长率为 G，接下来的增长率为 g，初始股利为 D_1。

【注释】

[1] 我们应该检验 $z_9 \leqslant x_9$，它符合我们使用的值。

[2] C_0 值将使推导式（5—3）时相互抵消的各项刚好抵消。

【参考文献】 134

资本预算在财务计划里是一个典型的主题。文献［1～4］是很好的教材。文献［5］和［6］是很好的评述。在文献［6～8］及第3章和第4章给出的一些参考文献里考虑了债券组合的构建。贝尔曼（Bellman）发展了动态规划（见文献［9～10］)。股票估值的经典文献见［11］。其他的介绍见文献［12～16］。文献［17］对20世纪80年代那些不合适的分析技术如何导致灾难性的过高估价这个问题进行了激烈的讨论。

1. Dean, J. (1951), *Capital Budgeting*, Columbia University Press, New York.

2. Brealey, R., and S. Myers (1984), *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill, New York.

3. Bierman, H., Jr., and S. Smidt (1984), *The Capital Budgeting Decision*, 6th ed., Macmillan, New York.

4. Martin, J. D., S. H. Cox, Jr., and R. D. MacMinn (1988), *The Theory of Finance, Evidence and Applications*, Dryden Press, Chicago, IL.

5. Schall, L. D., G. L. Sundem, and W. R. Geijsbeek (1978), "Survey and Analysis of Capital Budgeting Methods," *Journal of Finance*, 33, 281—287.

6. Weingarter, H. M. (1966), "Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis," *Management Science*, 12, 485—516.

7. Bierwag, G. O., G. G. Kaufman, R. Schweitzer, and A. Toevs (1981), "The art of Risk Management in Bond Portfolios," *Journal of Portfolio Management*, 7, 27—36.

8. Fabozzi, F. J., and T. D. Fabozzi (1989), *Bond Markets, Analysis and Strategies*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

9. Bellman, R. (1957), *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

10. Bellman, R., and S. Dreyfus (1962), *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

11. Graham, B., D. L. Dodd, and S. Cottle (1962), *Security Analysis*, McGraw-Hill, New York.

12. Williams, J. B. (1938), *The Theory of Investment Value*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.

13. Gordon, N. J. (1959), "Dividends, Earnings, and Stock Prices," *Review of Economics and Statistics*, 41, 99—195.

14. Molodovsky, N., C. May, and S. Chottiner (1965), "Common Stock Valuation: Principles, Tables and Application," *Financial Analysts Journal*, 21, 104—123.

15. Foster, G. (1986), *Financial Statement Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

16. Black, F. (1980), "The Magic in Earnings: Economic Earnings versus Accounting Earnings," *Financial Analysts Journal*, 36, 19—24.

17. Klarman, S. A. (1991), *Margin of Safety: Risk-Averse Value Investing Strategies for the Thoughtful Investor*, Harper Business.

第6章 均值—方差资产组合理论

通常地，对于投资来说，初始的投资支 137
出是已知的，而将要获得的收益则是不确定的。本书这一部分主要研究这一类投资。而且本部分仅限于讨论只有一个投资期的情形：即资金在期初投入，并在期末获得收益。

我们假定投资只有一期在有些时候是一个很好的近似。一个例子是持有至到期日的零息票债券投资，另一个例子是投资于一个不完成就没有报酬的有形工程。然而，许多大众化的投资，比如公开交易的股票，并非

只有一期，因为它们可以任意地变现，而且每期均有股利收入，然而这些类型的投资经常可以简单化地以单期投资为基础进行分析，但是这种简单分析仅仅是第三和第四部分的前奏，在第三和第四部分我们会有更详细和综合的研究。

本部分运用三种不同的数学方法分析不确定性：（1）均值—方差分析；（2）效用函数分析；（3）套利（或比较）分析。所有这些分析方法都是投资科学的重要组成部分。

第二部分第一章用均值—方差分析讨论不确定性，这种方法少许地运用了概率理论，推出了一些简便的数学表达式和结果，均值—方差分析是第 7 章讨论的重要的资本资产定价模型的基础。

6.1 资产收益

任何一种可以被频繁交易的投资工具被称为资产，下面介绍一个关于资产的基本概念。

138 假设你在时间 0 购买了一项资产，一年后卖掉此项资产，投资**总收益**（**total return**）被定义如下：

$$总收益=\frac{收益额}{投资额}$$

或者，若以 X_0 和 X_1 分别表示投资额和收益额，R 表示总收益，于是

$$R=\frac{X_1}{X_0}$$

总收益经常被简称为收益。

收益率（**rate of return**）被定义为：

$$收益率=\frac{收益额-投资额}{投资额}$$

或者，若以 X_0 与 X_1 分别表示投资额和收益额，r 表示收益率，于是

$$r=\frac{X_1-X_0}{X_0} \tag{6—1}$$

收益率经常也被简称为收益。

我们一般以大小写字母来区别这两个定义，比如 R 和 r，分别表示总收益和收益率。而且当我们使用简称的收益时，上下语境会告诉我们它指的是总收益还是收益率。

显然上述两个概念有如下关系：

$$R=1+r$$

所以式（6—1）可以表达如下：

$$X_1=(1+r)X_0$$

这表明收益率的作用类似于利率。

卖空

我们可以通过**卖空**（**short selling or shorting**）机制出售我们并不拥有的资产。首先，你可以从资产的拥有者（如经纪公司）那里借到资产，然后将其出售给他人，获得金额 X_0。过一段时期后，你可以购买此项资产并将其还给出借者，假设此时购买此项资产花费金额 X_1，若 X_1 低于 X_0，你就可以获得盈利 X_0-X_1，因此，卖空可以在资产价格下降时获利。

卖空通常被许多投资者认为是风险非常高的，甚至是危险的。原因是潜在的损失是无限的。如果资产价格上升，损失就是 X_1-X_0。由于 X_1 可以无限上升，从而损失也是可以无限增加的。正是因为如此，一些特定的金融机构被禁止进行卖空活动，而且许多个人和机构有意避免进行卖空交易。但卖空也不是被完全禁止了，实际上股票市场上的卖空活动还是达到了相当大 139
的规模。

当你卖空一只股票时，实质上你是在复制股票发行公司的角色。你出售股票以筹得即时的资本。如果在你借股票的期间内，这只股票支付股利的话，你也必须向借给你股票的人支付相同的股利。

在实际中，单纯的卖空过程会附加一些特定的限制和保护。（例如，你必须在借给你股票的经纪人处存入一定的证券保证金。）但是对于理论工作来讲，我们一般假定单纯的卖空是允许的。

让我们来确定有关卖空的收益率，初始时我们获得 X_0，并在一段时间后支付 X_1，所以支出是 $-X_0$，而最后的收益是 $-X_1$，于是可得总收益是

$$R=\frac{-X_1}{-X_0}=\frac{X_1}{X_0}$$

负号可以一同消去，所以我们得到与购买此资产时一样的总收益表达式，因此，从数值上，R 可以同时表示购买和卖空的收益率。我们可以表达为

$$-X_1=-X_0R=-X_0(1+r)$$

上式显示最后收益同初始支出相关。

例 6.1（卖空） 假设我决定卖空 100 股 CBA 公司的股票。当前此股票售价为每股 10 美元，我从经纪人处借得 100 股并在股票市场上出售，获得 1 000 美元。年末此股票股价降至每股 9 美元，我用 900 美元购得 100 股，并将其还给我的经纪人。由于股价的下降，此次交易对我有利，我从中盈利 100 美元。

如果有人在年初购买此股并在期末出售，则他将损失 100 美元，可以很轻松地计算得出：

$$R=\frac{900}{1\,000}=0.90$$

或

$$r=\frac{900-1\,000}{1\,000}=-0.10$$

收益率显然为负，其数值为 -0.10。卖空能将负收益率转换成盈利是因为初始投资也是负的。由于我的卖空活动使得我的初始投资为 $-1\,000$ 美元，所以我的盈利为 $-1\,000$ 美元 $\times r=100$ 美元。

将收益率同理想化的卖空过程联系起来多少有些奇怪，因为它并不需要初始资源投入。然而，卖空是一个恰当的概念。实际上，卖空确实需要初始保证金投入，而且出售股票所得的收益也要被保留到卖空头寸结清时为止。这种调整过的卖空活动将会有不同的收益率（见练习 1）。但对于基础的理论研究，我们经常假设理想化的卖空过程是可行的。 140

投资组合收益

假设现在有 n 种不同的资产，我们可以用这 n 种资产构建一个**集成资产或者投资组合**（**portfolio**）。假设构建投资组合时我们将总金额 X_0 分配于这 n 种资产，选择 X_{0i}，（$i=1, 2, \cdots, n$）使得 $\sum_{i=1}^{n} X_{0i}=X_0$，这里 X_{0i} 表示投资于第 i 种资产的金额。如果我们允许卖空，则某些 X_{0i} 值可以为负，否则我们要限定 X_{0i} 为非负。

投资于各项资产的金额可以表示总金额的一部分，于是有：

$$X_{0i}=\omega_i X_0, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

其中 ω_i 是第 i 种资产在投资组合中的**权重**（**weight**），显然有：

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i=1$$

如果卖空被允许的话，其中某些 ω_i 可以为负。

以 R_i 表示资产 i 的总收益，则期末第 i 种资产产生的收益额为 $R_i X_{0i}=R_i\omega_i X_0$，从而期末组合的收益总额为 $\sum_{i=1}^{n} R_i\omega_i X_0$。因此投资组合的总收益为：

$$R=\frac{\sum_{i=1}^{n} R_i\omega_i X_0}{X_0}=\sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i$$

同样地，由于 $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$，我们有：

$$r=\sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i$$

这是关于收益的一个基本结论，所以我们在这里重点强调：

⇒**投资组合收益（portfolio return）** *不论投资组合总收益还是收益率都等于相应的单个资产收益的加权总和，而每项资产的权重是其在投资组合中（购买时的支出）的相对权重。即：*

$$R=\sum_{i=1}^{n}\omega_i R_i,\qquad r=\sum_{i=1}^{n}\omega_i r_i$$

在表 6—1 中我们举了一个计算投资组合权重及相应的期望收益的例子。

141 **表 6—1** **资产组合收益的计算**

证券	股份数量	价格	总成本	组合权数
爵士公司	100	\$40	\$4 000	0.25
古典公司	400	\$20	\$8 000	0.50
摇滚公司	200	\$20	\$4 000	0.25
组合总价值			\$16 000	1.00

证券	组合权数	回报率	加权利率
爵士公司	0.25	17%	4.25%
古典公司	0.50	13%	6.50%
摇滚公司	0.25	23%	5.75%
组合回报率			16.50%

一种证券在资产组合中的权重是它与总成本的比率，如表格上方所示。这些权重决定该组合的收益率，如表格下方所示。

6.2 随机变量

在购买一项资产时，你经常并不知道将来出售此项资产的收益。在这种

情况下，收益是随机的，并且可以用概率论的术语描述。在学习随机收益之前，让我们先简单介绍一些有关概率论的概念。（更详细的概率基础理论，参见附录A。）

假设 x 是一个随机量，它的取值可以是有限个具体值 x_1，x_2，…，x_m 中的任意一个。进一步假设与每个可能的 x_i 相关的概率为 p_i，它表示 x_i 出现的可能性。p_i 满足 $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$，且对于任意 i 有 $p_i \geqslant 0$。p_i 可以理解为观察 x 的实验无限重复后，x_i 出现的相对频率。在知道它的值之前用这种方法表示的值 x，叫做**随机变量（random variable）**。

一个简单的例子是掷一个六面的普通骰子，x 表示掷得的点数，显然 x 的可能取值是1，2，3，4，5，6，而且每个取值发生的可能性是1/6。

通常可以用概率密度以图示的方式将与某随机变量 x 相关的概率值表示出来，x 的各取值在横轴上显示，各点相应的垂线高度表示此点的概率。在图6—1中举了一些例子。图6—1（a）显示了掷骰子点数的概率密度，显然六个可能取值均有概率1/6。图6—1（b）是一个更加普通的例子，在这个例子中，随机变量各个取值出现的概率不同。 142

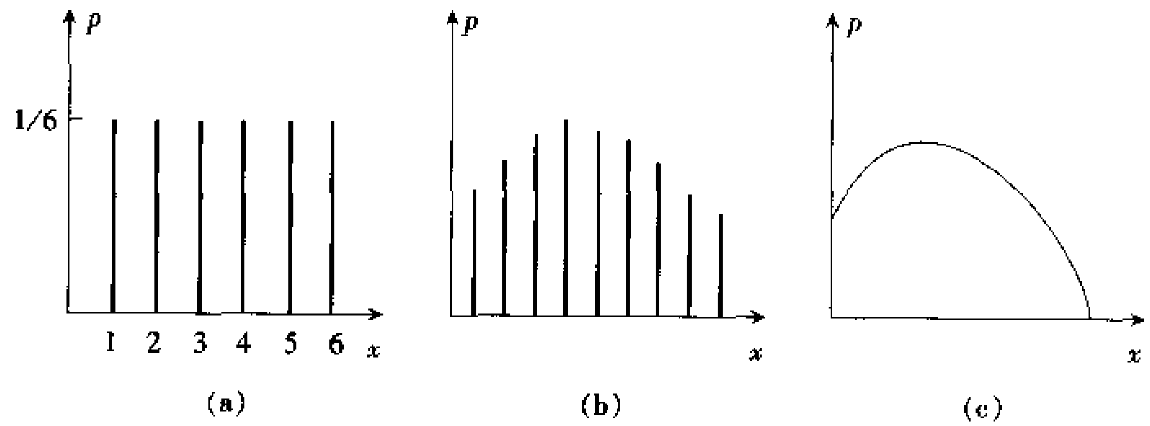


图6—1 概率分布

（a）图是一个掷骰子的概率分布；（b）图是另一个有限个可能结果的随机变量概率分布；（c）图是连续型随机变量的概率分布。

如某随机变量可以取一个区间内的任意实数值，如室内温度等，则**概率密度函数（probability density function）**可以用来描写其概率。此随机变量在区间内任一线段取值的概率等于图像上此线段同概率密度曲线所围成的垂直区域的面积。图 6—1(c) 就是这种随机变量的一个很好的例子。

期望值

随机变量 x 的期望值（expected value）是以概率为权重所得的加权平均值。对于一个只有有限个取值可能的随机变量，可以表示为：

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

为了简便，常用 $\bar{x}$ 表示 E（x），另外术语**平均值（mean）**或**均值（mean value）**也经常被用来表示期望值的概念，所以我们说 x 具有均值 $\bar{x}$。

例 6.2（掷骰子）计算掷骰子所出现点数的期望值为：

$$\frac{1}{6}（1+2+3+4+5+6）=3.5$$

这表明期望值并不必然是变量的某一个取值。

期望值的运算是概率计算中的较主要的计算内容，所以有必要描述一下它的基本特征：

1. **确定值（certain value）**如果 y 是一个已知的数值（非随机），则 $E(y)=y$。这说明对一个非随机量，其期望值等于本身。

143 2. **线性（linearity）**若 y 与 z 是随机变量，则对任意的实数 α 和 β，有 $E(\alpha y+\beta z)=\alpha E(y)+\beta E(z)$。

这表明两随机变量之和的期望（平均）值等于它们各自的均值之和，从而可以推出随机变量的倍数的期望值等于随机变量期望值的相同倍数，比如，掷两颗骰子所得总点数之和的期望值是 3.5+3.5=7。

3. **非负性（Nonnegativity）** 若随机变量 x 所有取值都不小于 0，则 $E(x)\geqslant 0$。

这是一个保号性。

方差

随机变量的期望值为变量的概率特性提供了一个有用的概括，然而，除此之外，我们通常还想对随机变量各个取值与均值的偏离程度进行度量。其中的一种度量方法就是**方差（variance）**。

假定随机变量 y 有期望值 $\bar{y}$，则 $y-\bar{y}$ 也是随机变量，但是期望值为 0。（这是因为 $E(y-\bar{y})=E(y)-E(\bar{y})=\bar{y}-\bar{y}=0$。）而 $(y-\bar{y})^2$ 是非负的，而且其值在 y 严重地偏离 $\bar{y}$ 时，$(y-\bar{y})^2$ 很大；而 y 接近 $\bar{y}$ 越小时，$(y-\bar{y})^2$ 很小。这个平方随机变量 $(y-\bar{y})^2$ 的期望值是用来表示 y 偏离均值程度的有效度量方法。

总之，对于任一随机变量 y，其方差被定义为：

$$\mathrm{var}(y)=E[(y-\bar{y})^2]$$

在数学表达中，方差用 σ^2 来表示，所以我们写成 $\sigma_y^2=\mathrm{var}(y)$，或者在读者已经熟悉时，可以简单表示为 $\sigma^2=\mathrm{var}(y)$。

我们常用方差的平方根，即 σ 来表示**标准差（standard deviation）**，它与 y 有相同的单位，而且是表示 y 偏离期望值 $\bar{y}$ 程度的另一种度量方法。于是，公式上有：

$$\sigma_y=\sqrt{E(y-\bar{y})^2}$$

在计算方差时有一个简单的公式，如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(x)&=E[(x-\bar{x})^2]\\&=E(x^2)-2E(x)\bar{x}+\bar{x}^2\\&=E(x^2)-\bar{x}^2\end{aligned}\qquad(6\text{—}2)$$

在接下来的例子中我们将会用到此公式。

144 **例 6.3（掷骰子）** 以随机变量 y 表示掷骰子所得的点数，下面我们来计算其方差，在前面，我们已求得 $\bar{y}=3.5$。所以有：

$$\sigma^2 = E(y^2)-\bar{y}^2$$

$$=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)-3.5^2=2.92$$

因此，　$\sigma=\sqrt{2.92}=1.71$

几个随机变量

假设我们对两个随机变量感兴趣，比如说室外气温和大气压。为了描述这些随机变量，我们必须要有这两个变量的任意可能性的数值组合的概率。以 x 和 y 表示这两个随机变量，我们必须考虑可能的组合（x，y）。假设 x 可能的取值有 x_1，x_2，…，x_n，而 y 的可能取值有 y_1，y_2，…，y_m。（假设测量的精度有限，则温度和气压显然可以被认为只能取有限个可能的取值。）然后我们指定以 p_{ij} 表示（x，y）取值为（x_i，y_j）时的概率（其中 $i=1$，2，…，n；$j=1$，2，…，m），因此我们需要温度和大气压的所有可能的取值组合的概率。

如果我们对三个随机变量感兴趣，比如室外温度、大气压和湿度，我们就需要三个随机变量所有可能的取值组合的概率。变量越多，计算就进一步地复杂化。

在某些情形下，多随机变量概率的描述可以简单化。如果任何一个随机变量取值的概率与另一个随机变量的取值无关，我们称随机变量 x 和 y 是**相互独立的随机变量（independent random variables）**。举个例子，考虑同时掷两粒骰子，显然无论第一粒骰子的点数是多少，第二粒骰子点数为 4 的概率都为 1/6，所以若以两个随机变量分别表示两粒骰子掷得的点数，这两个随机变量互相独立。另一方面，室外温度与大气压并不相互独立，因为如果气压较高，则温度可能也比较高。

协方差

考虑两个或多个随机变量，它们之间的互相依赖性可以简便地由它们之间的协方差来描述。

x_1 和 x_2 是两个随机变量，期望值为 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$，则它们之间的协方差可以定义为：

$$\mathrm{cov}(x_1, x_2) = E[(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)]$$

通常用 σ_{xy} 来表示随机变量 x 与 y 的协方差。于是对随机变量 x_1 和 x_2 我们写成 $\mathrm{cov}(x_1, x_2) = \sigma_{x_1, x_2}$ 或者 $\mathrm{cov}(x_1, x_2) = \sigma_{12}$。注意由对称性，可得 $\sigma_{21} = \sigma_{12}$。

与式（6—2）相近，我们可以很轻松地推出计算协方差的另一个简单公 145
式，那就是：

$$\mathrm{cov}(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) - \bar{x}_1\bar{x}_2 \tag{6—3}$$

这个公式在具体计算中很有用。

如果两个随机变量 x_1 和 x_2 的 $\sigma_{12} = 0$，则我们称它们**不相关**（**uncorrelated**），这种情形下，我们不能从一个随机变量的信息中得出另一个随机变量的任何信息。若两随机变量相互独立，则它们不相关。如果 $\sigma_{12} > 0$，则称 x_1 和 x_2 **正相关**（**positively correlated**），在此情形下，若其中一个随机变量取值高于均值，则另一个取值也很可能高于均值。另外，若 $\sigma_{12} < 0$，则称 x_1 和 x_2 **负相关**（**negatively correlated**）。

图 6—2 描述了在（a）正相关，（b）负相关和（c）不相关的条件下，两个随机变量 x 和 y 的随机样本点集合。

⇒***协方差边界*（*covariance bound*）** *两随机变量的协方差满足*

$$|\sigma_{12}| \leqslant \sigma_1\sigma_2$$

在前述的不等式中，若 $\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2$，则称 x_1 与 x_2 **完全相关**（**perfectly correlated**）。在此情况下，对给定的方差值，协方差值将会尽可能的大。如

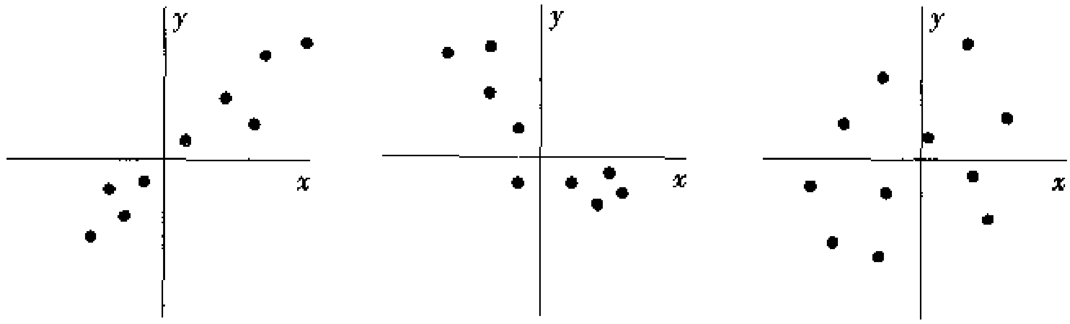
果一个随机变量是另一个变量的固定正数倍，则可以认为它们完全相关。相反地，若有 $\sigma_{12}=-\sigma_1\sigma_2$，则 x_1 与 x_2 **完全负相关**（**perfect negative correlation**）。

另一个有用的定义是两个随机变量的**相关系数**（**correlation coefficient**），它被表示为：

$$\rho_{12}=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$$

从上面的协方差边界可得知 $|\rho_{12}|\leqslant 1$。

如果我们将变量 x 的方差理解为 x 同自身的协方差的话，就有 $\sigma_x{}^2=\sigma_{xx}$。



(a) 正相关　　(b) 负相关　　(c) 不相关

图 6—2　样本点的相关性

随机变量 x 和 y 的样本如图画出，并且每对数据都点在坐标图上了。一种典型的散点图形式如图中三种情况所示：(a) 正相关；(b) 负相关；(c) 不相关。

和的方差

146 当我们知道两个随机变量的协方差时，就可以计算出随机变量和的方差，这个计算方法在本文接下来的部分中将会经常用到。

假设 x 和 y 是随机变量，我们可以从线性性推知 $E(x+y)=\bar{x}+\bar{y}$，同时根据定义有：

$$\begin{aligned}\text{var}(x+y)&=E[(x-\bar{x}+y-\bar{y})^2]\\&=E[(x-\bar{x})^2]+2E[(x-\bar{x})(y-\bar{y})]\end{aligned}$$

$$+E[(y-\bar{y})^2]$$

$$=\sigma_x^2+2\sigma_{xy}+\sigma_y^2 \qquad (6-4)$$

这个公式比较容易被记住，因为它同我们在代数中所学的完全平方和公式相类似。只需以方差代替平方，而协方差代替乘积就可。

一个重要的特殊例子就是当两个变量是不相关的时候，$\sigma^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2$。

例 6.4（掷两次骰子） 假设我们掷两次骰子，以 z 代表两次掷得点数的算术平均值，则 z 的均值和方差是多少？以 x 和 y 分别代表第一次和第二次掷得的点数，因此，$z=\frac{1}{2}(x+y)$，而且由于 x 与 y 相互独立，所以 x 与 y 不相关。于是 $\bar{z}=\frac{1}{2}(x+y)=3.5$，而 $\mathrm{var}(z)=\frac{1}{4}(\sigma_x^2+\sigma_y^2)=2.92/2=1.46$。从而有 $\sigma_z=1.208$，其值比只掷一次骰子时所获点数的方差 1.71 要小一些。

6.3　随机收益

一项投资在期初被获得时，其未来的收益率常常是不确定的，因此我们可以将收益率 r 视为一个随机变量。为了便于分析，在本章中，我们用 r 的期望值（均值）$E(r)=\bar{r}$、方差 $E[(r-\bar{r})^2]=\sigma^2$（原文中为 $E[(r-\bar{r}^2)]=\sigma^2$，估计是录入错误。——译者注）和其他资产的协方差来概括性地描述 r 的不确定性。通过考虑一些例子，我们可以最大限度地说明收益率是如何被描述出来的。

例 6.5（财富轮盘） 考虑在图 6－3 所示的财富轮盘。它不同于你可能在娱乐园发现的任意轮盘，因为它的报酬非常有利。如果你投注 1 美元，所获得的报酬对应于落点区域所标的数值。落在一个给定区域的概率同此区域

的面积成正比，在这个轮盘中，落在各个区域的概率为 1/6。

147

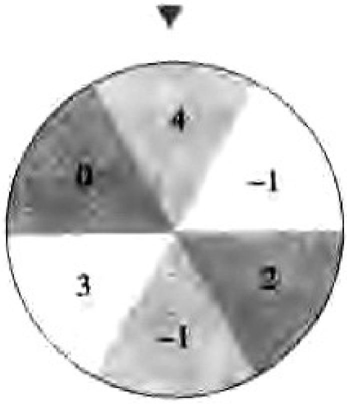


图 6—3　财富轮盘

如果你对此轮盘投注 1 美元，当转完轮盘以后你将得到指针所指向的区域里显示的价值。

让我们先来计算此轮盘报酬的均值及方差，以 Q_i 表示第 i 区域的报酬，则期望报酬为：

$$\bar{Q}=\sum_i p_i Q_i=\frac{1}{6}(4-1+2-1+3)=7/6$$

由公式（6—2）我们可以计算出方差为：

$$\sigma_Q^2=E(Q^2)-\bar{Q}^2=\frac{1}{6}(16+1+4+1+9)-(7/6)^2=3.81$$

在投注为 1 美元的假设下，轮盘的报酬相当于总收益，即 $Q=R$，而收益率 $r=Q-1$，所以我们可得：

$$\bar{r}=E(r)=\bar{Q}-1=1/6$$

$$\sigma_r^2=E[(r-\bar{r})^2]=E\{[Q-1-(\bar{Q}-1)]^2\}=\sigma_Q^2=3.81$$

例 6.6（股票收益率） 考虑投资于一个大公司的股票（如 General Motors，AT&T，或 IBM）。我们试着描述现在购买这种股票一年后卖出的收益率，忽略交易成本。我们估计 $E(r)=0.12$，即我们估计收益率的期望值是 0.12，基于整个市场中股票过去的表现，这是一个客观合理的大公司的股票价值。那么标准差呢？我们知道最后的结果很可能并不是 12%，而

且可能会有明显的偏离。实际上很有可能的是一年以后的收益率为-5%，而下一年是 25%。标准差合理的估计值是 15%。于是，粗略地讲，我们可以认为收益率很可能是 $12\%\pm15\%$。在第 8 章我们会更加系统地讨论如何评估股票的期望值及标准差。此例仅仅为一些典型量给出一个粗略的概念。

图 6—4 画出了这支股票的收益率的概率密度。它的均值为 0.12，但是收益可以是无限大。然而，收益率决不能小于-1，因为收益率为-1表示初始投资已经完全损失了。 148

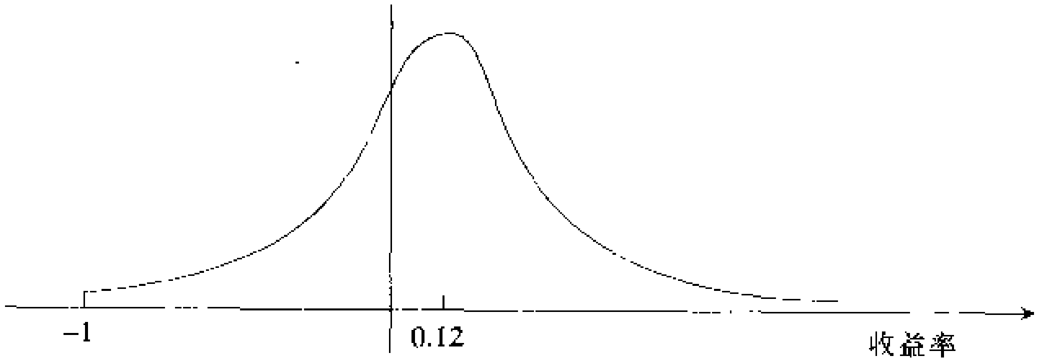


图 6—4 股票收益率的概率密度

收益率的均值大约是 12%，标准差大约是 15%。收益率不可能低于-1。

例 6.7（赌博轮盘） 有两种轮盘对投资问题的研究很有用。例 6.5 财富轮盘是其中的一种，在财富轮盘中，必须从总体上考虑轮盘下注（投资），报酬由落点区域决定。

另一种就是**赌博轮盘**，图 6—5 就是一个例子。这种情形中，只可以对轮盘的个别区域下注，比如说，在图 6—5 中，如果有人投注 1 美元于白色区域，如果落点区域是白色区域，则他将得到 3 美元；否则的话，他将得到 0 美元，损失了初始投资。你可以在不同的区域下不同金额的赌注。轮盘赌是一种赌博轮盘。从理论的角度上看，赌博轮盘之所以比较有趣是因为投资

于不同区域的收益是相关的。

如图 6—5 所示，我们可以投注于（1）白色，（2）黑色，（3）灰色，报酬分别是 3，2，6。要注意的是投资于白色时得到回报的可能性很大。

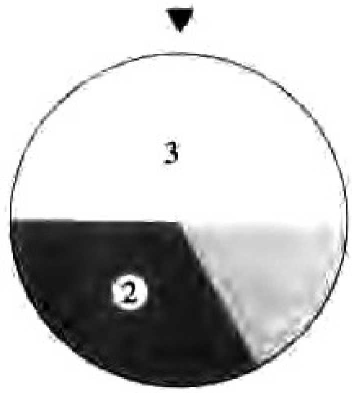


图 6—5 赌博轮盘

该轮盘的任何部分都可以下注。如果指针指向该分区，下注者获得赌注乘以分区里显示的数的金额。

我们可以计算出三种可能的投资方式的期望收益率。首先用全部收益计算然后减去 1 要简单的多，比如，对于白色来说，收益为 3 美元的概率为 1/2，为 0 的概率为 1/2。

三个期望收益值为：

$$\overline{R}_1=\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{2}\times 0=\frac{3}{2}$$

$$\overline{R}_2=\frac{1}{3}\times 2+\frac{2}{3}\times 0=\frac{2}{3}$$

$$\overline{R}_3=\frac{1}{6}\times 6+\frac{5}{6}\times 0=1$$

同样地，由公式（6—2），三个方差可计算如下：

$$\sigma_1^2=\frac{1}{2}\times 3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=2.25$$

$$\sigma_2^2=\frac{1}{3}\times 2^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2=0.889$$

$$\sigma_3{}^2=\frac{1}{6}\times 6^2-1=5$$

最后，我们可以用公式（6—3）计算协方差，由于乘积的期望如 149
$E(R_1R_2)$都等于0，所以有：

$$\sigma_{12}=-\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)=-1.0$$

$$\sigma_{13}=-\frac{3}{2}\times 1=-1.5$$

$$\sigma_{23}=-\frac{2}{3}\times 1=-0.67$$

均值—标准差图像

资产的随机收益率可以由图6—6的二维图形表示。以横轴表示标准差，纵轴表示均值，则收益率均值为$\bar{r}$（或m或$E(r)$），标准差为σ的资产可以表示为二维图上的一点，这样的图像就是均值—标准差图像，或简称$\bar{r}-\sigma$图像。

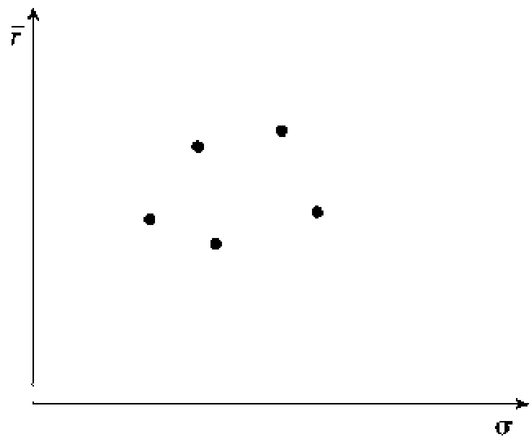


图6—6 均值—标准差图像

资产用该图上的点描述。

在此图像中，横轴表示标准差而不是方差，这是为了统一横坐标与纵坐标的单位（比如说每年百分比）。在均值—方差投资分析中常用到这类图像。

6.4 投资组合均值和方差

150 既然我们已经明白了单个资产均值（期望收益）和方差以及资产间的协方差的概念，下面我们将说明怎样用这些概念确定投资组合收益的均值及方差。

投资组合的期望收益

假设有几种资产收益率 r_1，r_2，…，r_n。其期望值分别是：

$$E(r_1)=\overline{r_1},E(r_2)=\overline{r_2},\cdots,E(r_n)=\overline{r_n}$$

与 6.1 节一样，假设我们构建一个各项资产权重为 $w_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的投资组合，则此投资组合的收益可以用单项资产的收益来表示：

$$r=w_1r_1+w_2r_2+\cdots+w_nr_n$$

在等式的两边同取均值，并利用线性（在 6.2 节提及的期望的第 2 个特性），我们可得：

$$E(r)=w_1E(r_1)+w_2E(r)_2+\cdots+w_nE(r_n)$$

换句话说，投资组合的期望收益率等于各项资产期望收益率的加权平均和。所以只要我们有组成投资组合的各项资产的期望收益率，就可以很容易地计算出投资组合的期望收益率。

投资组合收益的方差

现在让我们来确定投资组合收益率的方差。

以 σ_i^2 来表示第 i 种资产收益的方差，σ^2 表示投资组合收益的方差，σ_{ij} 表示资产 i 与资产 j 收益的协方差，我们可以简单地计算如下：

$$\sigma^2=E[(r-\overline{r})^2]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \overline{r_i})\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - \overline{r_j})\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})\right]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

这个重要的结果表明，投资组合收益的方差可以由任意两项资产的协方差及各项资产在投资组合的权重计算得出（请注意，$\sigma_{ii} = \sigma_i^2$）。 151

例 6.8（两资产投资组合） 假设有两项资产，其中$\overline{r_1} = 0.12$，$\overline{r_2} = 0.15$，$\sigma_1 = 0.20$，$\sigma_2 = 0.18$，$\sigma_{12} = 0.01$（对于两只股票来讲这些数值都比较典型），我们构造投资组合，其中 $w_1 = 0.25$，$w_2 = 0.75$，从而就可以得出投资组合收益的均值和方差。首先计算均值可得：

$$\bar{r} = 0.25 \times 0.12 + 0.75 \times 0.15 = 0.142\ 5$$

然后计算方差得：

$$\sigma^2 = (0.25)^2\ (0.2)^2 + 0.25 \times 0.75 \times 0.01$$
$$+ 0.75 \times 0.25 \times 0.01 + 0.75^2 \times 0.18^2 = 0.024\ 475$$

注意中间的两项乘积项相等（因为 $w_i w_j = w_j w_i$），于是：

$$\sigma = 0.156\ 4$$

分散化*

仅有几项资产组成的投资组合会有比较高的风险，这体现于此投资组合收益有一个相对较大的方差。作为一个普遍的规律，即在投资组合中加入新的资产会使投资组合收益的方差下降，这个过程被称为**分散化（diversification）**。这反映了这样一句格言：“不要把所有鸡蛋放在一个篮子里”。

分散化的效果可以结合方差的公式用数量表示。假设某投资组合有许多

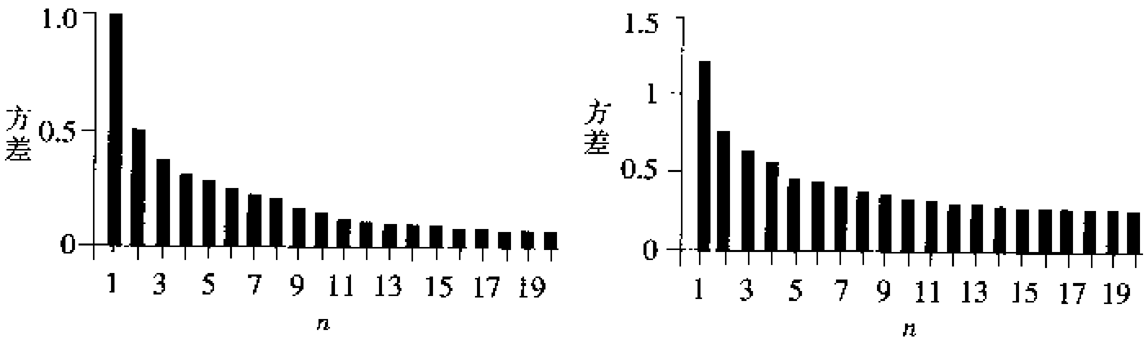
资产，它们之间互不相关，即任何一项资产与组合内的其他任何资产不相关。并假设每项资产期望收益率为 m，方差为 σ^2，而且投资组合中各项资产权重相等，即 $w_i=\frac{1}{n}(i=1,\cdots,n)$，于是投资组合总收益率为：

$$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i$$

于是可得出均值 $\bar{r}=m$，与 n 无关。相应的方差为：

$$\text{var}(r)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

在这里我们用到了各项资产收益不相关的假设。组合的方差随着 n 的上升迅速下降，如图 6—7（a）所示。这个图表明方差是资产数量 n 的函数（当 $\sigma^2=1$ 时）。注意，只要有六项互不相关的资产就会有明显的改进。



（a）互不相关的资产　　（b）相关资产

图 6—7　分散化的效果

如果资产是不相关的，则可以使该资产组合的方差很小。如果资产间正相关，资产组合的方差可能会实现一个较低限度的降低。

如果资产的收益是相关的话，情况就有所不同。举个简单的例子，假设

152 各项资产的期望收益和方差仍然都是 m 和 σ^2，而每两项资产都有协方差 $\text{cov}(r_i,r_j)=0.3\sigma^2(i\neq j)$。然后我们依然构造一个各项资产权重相等的组合，于是有：

$$\text{var}(r)=E\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(r_i-\bar{r})\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r}) \right] \left[\sum_{j=i}^{n} (r_j - \bar{r}) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} = \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{i=j} \sigma_{ij} + \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} \right\}$$

$$= \frac{1}{n^2} \{ n\sigma^2 + 0.3(n^2 - n)\sigma^2 \}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + 0.3\sigma^2 (1 - \frac{1}{n})$$

$$= \frac{0.7\sigma^2}{n} + 0.3\sigma^2$$

这个结果如图 6—7（b）所示（当 $\sigma^2 = 1$ 时），在这种情形下，无论 n 取多大，都不可能使方差降至低于 $0.3\sigma^2$ 的水平。

分散化的分析似乎显得比较粗略，因为我们假设了所有资产期望收益率相等。一般来讲，分散化在降低方差的同时也降低期望收益率，大多数人都不会愿意为了方差很小的下降来牺牲较大的期望收益率。所以，如果我们不考虑其对期望收益和方差共同的影响而盲目地进行多样化，则结果未必会令人满意，正是这个原因激励马克维茨（Markowitz）发展了一般的均值—方差分析方法，他认为必须在均值和方差之间进行权衡。

然而，从上述简单的例子中我们可以得出一个重要的结论。也就是说，只要各项资产的收益不相关，取很大的 n 值，则可以通过多样化使投资组合收益的方差大体上降低到 0，相反地，如果各项资产收益正相关，则降低方差变得比较困难，并且所能降低的幅度也较小。 153

投资组合的收益—标准差图像

假设在一个收益—标准差图像中有两项资产，由这两项资产以一定的权重组合成一个投资组合——一项新的资产。这项新的资产收益率的均值及标准差可以由原来的两项资产收益率的均值、方差及协方差计算得出。然而由于协方差在图像中没有体现，因此由原来的两项资产所在的位置不能确定新

资产点的精确位置，新资产点的位置有多种可能性，它们取决于两项资产收益率的协方差。

我们分析如下。在图 6 -8 中给出代表原来两项资产的点 1 和点 2。通过引进变量 α，我们定义一族投资组合，规定权数为 $w_1=1-\alpha$，$w_2=\alpha$。因此，当 α 在 0 到 1 之间变化时，则投资组合从仅含有资产 1 到含有资产 1，2 的组合再到仅含有资产 2；若 α 取 [0，1] 以外的值，则表明一个权数或另一个权数为负，相当于卖空此项资产。

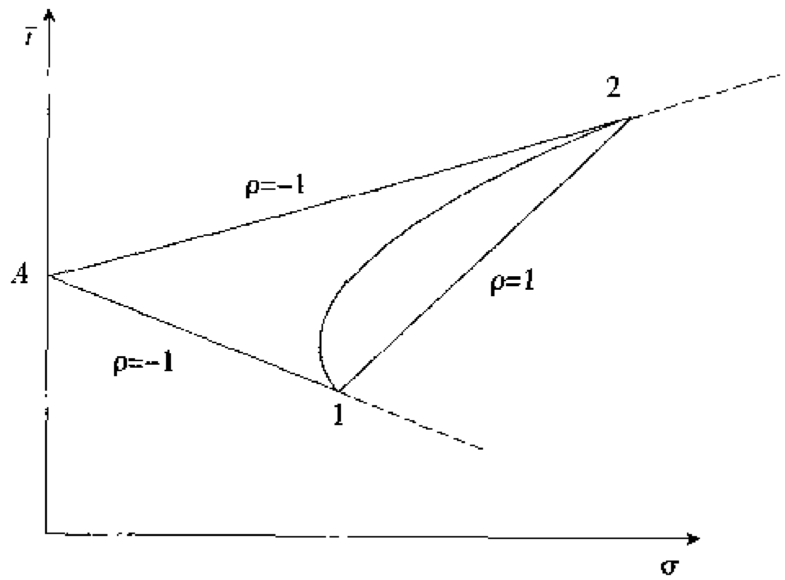


图 6—8　两种资产的组合

当两种资产用不同的组合方式组合时，所形成的资产组合在代表原两种资产的点之间可画出一条曲线。这条曲线一定位于图中的阴影三角形内。

随着 α 的变化，新的投资组合描绘出一条包含了资产 1 和资产 2 的曲线，这条曲线看起来有点像图 6—8 所绘出曲线的形状，但它的确切的形状取决于 σ_{12}。曲线的实线部分表示两项资产的权重均为正的组合，虚线部分表示卖空某项资产（实线另一端点所代表的资产）。实际上我们可以证明，曲线的实线部分一定位于图中的阴影内，即一定位于以顶点 1、2 及纵轴上

154 的点 A 为顶点的三角形区域内。我们正式地叙述了这一性质，但并不要求读者在第一遍阅读后就理解其全部的细节，这仅仅是理解曲线的一般形状的

均值和标准差的变化都同 α 值成比例。也就是说，随着 α 从 0 到 1 的变化，代表投资组合的点沿着 $\alpha=0$ 及 $\alpha=1$ 的两点之间的一条直线运动，即图中所给的点 1 与点 2 之间的直线段。

要是没有绝对值符号，标准差下限的表达式也差不多是线性的。当 α 比较小时，绝对值符号内的表达式为正，所以下限等于 $(1-\alpha)\sigma_1-\alpha\sigma_2$。
155 这个式子在 $\alpha<\sigma_1/(\sigma_1+\sigma_2)$ 时均为正。而在 $\alpha>\sigma_1/(\sigma_1+\sigma_2)$ 时，表达式变号，下限变成 $\alpha\sigma_2-(1-\alpha)\sigma_1$，在命题中所提及的点 A 就是绝对值符号内表达式开始变号时的点（即 $\alpha=\sigma_1/(\sigma_1+\sigma_2)$ 时）。上面的两个线性表达式连同均值的线性表达式使得标准差下限的轨迹是图 6-8 中所画出的折线。于是我们可以得出结论：投资组合点的运动轨迹应该位于图中的阴影部分内，并且在 ρ 取 -1 到 1 之间的值时，投资组合点的运动轨迹与图中的曲线相似。

6.5 可行集合

假设现在有 n 种基础资产，我们在均值–标准差图中绘出各自的点，并假设以这 n 种资产用各种可能的权重组合成投资组合。所以存在仅由 n 种资产中的任一种资产，或者是两种资产，或是三种资产的组合等等，直至是所有 n 种资产的任意组合。以 w_i 表示第 i 种资产在任意可能的组合中的权重系数，这些组合是通过令权重系数 w_i 涉及所有可能的组合使得 $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$ 而构造的。

与所有投资组合对应的点的集合被称为**可行集合**（**feasible set**）或者**可行区域**（**feasible region**），可行集满足两个重要的特性：

1. 若至少有三种资产（非完全相关的而且均值不同），则可行集合是一个二维的实心区域。

需要。

投资组合图像引理（portfolio diagram lemma） *由资产 1 和资产 2 组成的非负投资组合的 $\bar{r}$—σ 曲线位于由代表原来资产的两点以及纵轴上的点 A 确定的三角形区域内，其中纵轴上 A 点的高度为 $(\bar{r}_1\sigma_2+\bar{r}_2\sigma_1)/(\sigma_1+\sigma_2)$。*

证明：以 α 来定义的投资组合的收益率是 $r(\alpha)=(1-\alpha)r_1+\alpha r_2$，均值是：

$$\bar{r}(\alpha)=(1-\alpha)\bar{r}_1+\alpha\bar{r}_2$$

这表明 $\bar{r}(\alpha)$ 在初始均值 $\bar{r}_1$ 与 $\bar{r}_2$ 之间，与两个资产所占的比率成正比。比如说，若两项资产各占 50%，则新均值是 $\bar{r}_1$ 与 $\bar{r}_2$ 的中间值。

现在让我们来计算投资组合的标准差，利用前一节的一般公式，我们有

$$\sigma(\alpha)=\sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1{}^2+2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12}+\alpha^2\sigma_2{}^2}$$

利用相关系数的定义 $\rho=\sigma_{12}/(\sigma_1\sigma_2)$，则上面的等式可以写成

$$\sigma(\alpha)=\sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1{}^2+2\rho\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2+\alpha^2\sigma_2{}^2}$$

这实在是个麻烦的式子。但是可以确定它的边界，我们知道 ρ 的取值只可在 -1 到 1 之间。若 $\rho=1$，我们有标准差上限为：

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha)^* &=\sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1{}^2+2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2+\alpha^2\sigma_2{}^2}\\ &=\sqrt{[(1-\alpha)\sigma_1+\alpha\sigma_2]^2}\\ &=(1-\alpha)\sigma_1+\alpha\sigma_2\end{aligned}$$

若 $\rho=-1$，我们类似地可以得出有标准差下限为：

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha)_* &=\sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1{}^2-2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2+\alpha^2\sigma_2{}^2}\\ &=\sqrt{[(1-\alpha)\sigma_1-\alpha\sigma_2]^2}\\ &=|(1-\alpha)\sigma_1-\alpha\sigma_2|\end{aligned}$$

注意标准差上限的表达式是 α 的线性表达，同均值的表达式类似。由这两个线性表达式，我们推出，在 $\rho=1$ 的前提下，随着 α 从 0 到 1 的变化，

图 6—9 说明了为什么这一区域是实心的。共有三种基础资产：1、2 和 3。我们知道任意两种资产确定构成资产组合的两资产之间的一条曲线。将 1、2 和 3 两两组合后，我们便得到了如图 6—9 中的三条曲线。现在，如果资产 4 是资产 2 与 3 的一个组合，则 4 可以与 1 进行组合得到一条连接 1 与 4 的曲线，当 4 在 2 与 3 之间移动时，连接 1 与 4 的曲线的轨迹就是一个实心区域。

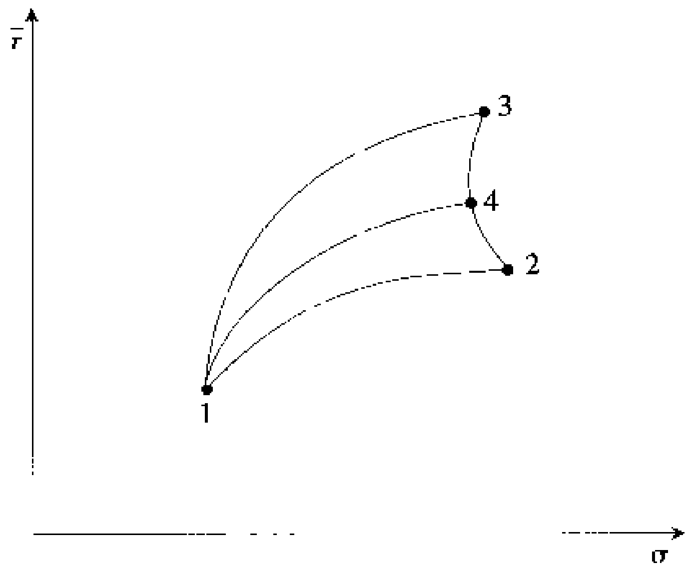


图 6—9　三点构成一个区域

资产 2 与 3 的组合形成了一条在 2 与 3 之间的曲线。这些组合中的任意一个，如资产 4，同 1 的任意组合就形成了另一条曲线。所有这些曲线形成了一个实心区域。

2. 可行区域凸向左边。 156

这就是说，任取区域中的两点，连接这两点的直线不会穿过可行区域的左边界。这是因为任意两项资产的组合（权重为正）的轨迹总在两项资产连线的左边或者在这两项资产的连线上。在图 6—10（a）中我们给出了一个典型的可行区域。

考虑到卖空是否被允许，我们自然可以定义两种不同的可行区域。对这两种可行区域各自的形状已经有了一般的结论。大体上讲，允许卖空前提下的可行区域包含不允许卖空前提下的可行区域，如图 6—10（b）所示。（通常地，两个区域的左边界会有部分的重合——不同于图 6—10 所画的。）

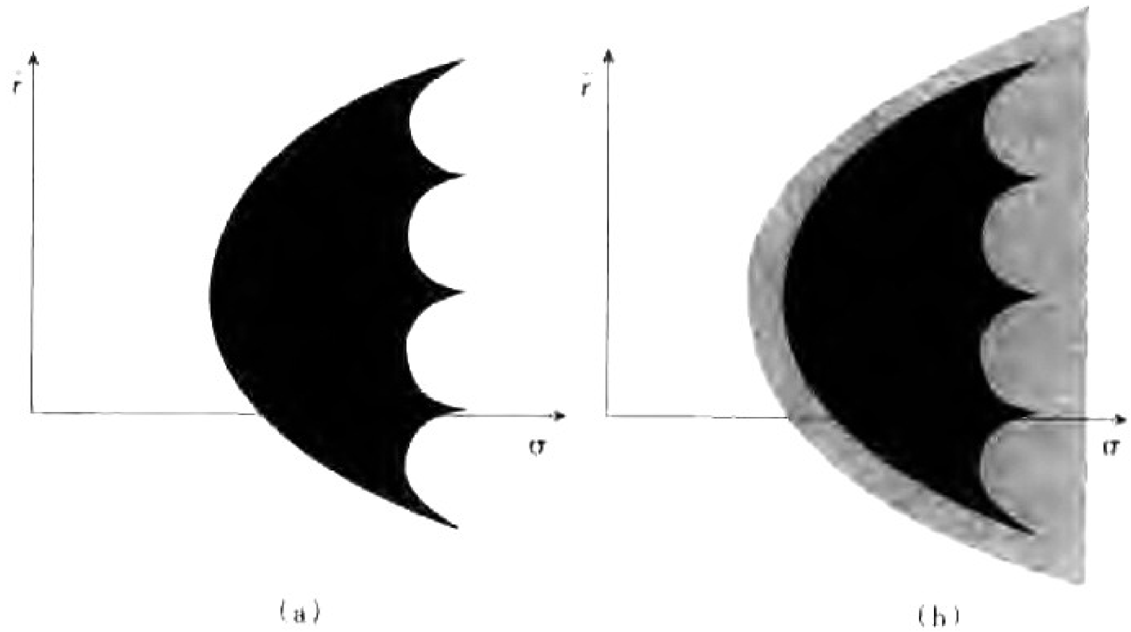


图 6—10 可行区域

可行区域是代表 n 种资产构成的投资组合的所有点的集合，我们可以定义两种这样的区域：(a) 没有卖空；(b) 有卖空。

最小方差集和有效边界

可行集的左边界被称为**最小方差集（minimum-variance set）**，因为在可行集左边界的点都是在任意的均值水平下方差（标准差）最小的点。最小方差集有**子弹（bullet）**形状的特征，如图 6—11（a）。在此集合中有一特殊的点，这一点具有最小的方差，被称为**最小的方差点（minimum-variance point（MVP））**。

假设投资者被限制在 $\bar{r}$—σ 平面上的一条水平线上的点进行投资。在这条线上的任意投资组合都有相同的期望收益率，但是标准差（方差）却不同。大多数投资者会选择在此线上的最左边的点进行投资，即在给定均值下
157 标准差最小的点。符合这种观点的投资者被称为**风险厌恶的（risk averse）**，因为他或她极力最小化他们的风险（风险可以以标准差来表示）；如果投资者不选择方差最小点，则他就被称为**风险偏好的（risk preferring）**。我们的

分析只针对风险厌恶型的投资者，即更乐于最小化标准差的投资者。这类投资者会对最小方差集上的点比较感兴趣。

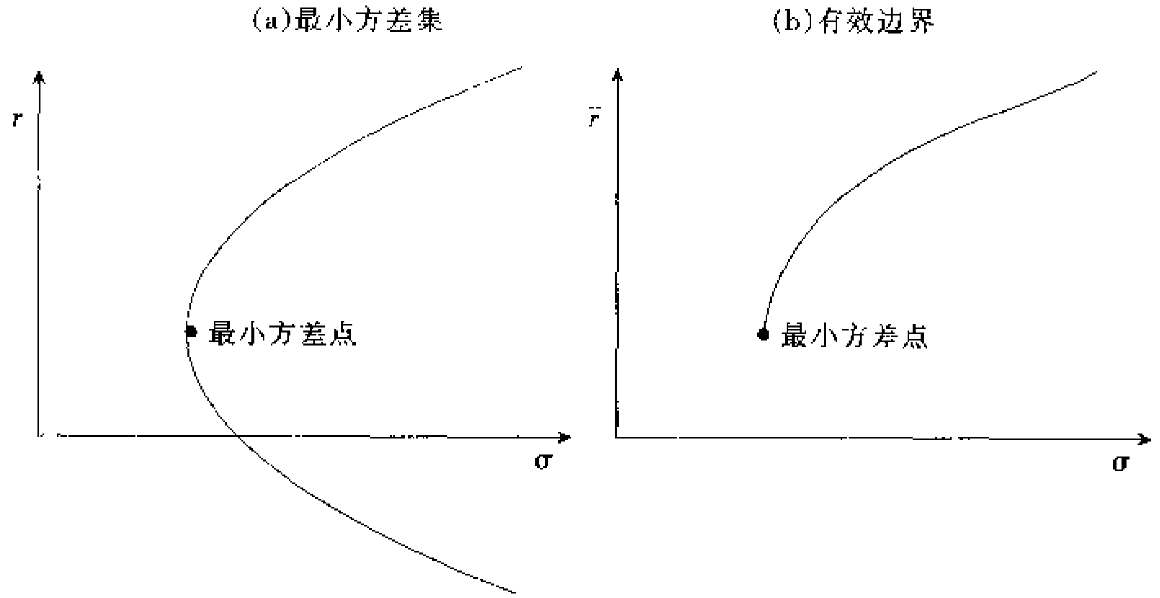


图 6—11　特殊集

最小方差集有一个典型的子弹形状。最小方差点是其方差最小的点。有效边界是最小方差集的上半部分。

我们可以将视角旋转 90°，考虑在对应于垂直直线上的点的所有投资组合，即标准差相同而均值不同的投资组合，大多数投资者会比较倾向于在这条线上的最高点进行投资。换句话说，在给定标准差时他们会选择均值最大的投资组合。投资者的这种性质被称为**非饱和性**（**nonsatiation**），即给定其他条件相同，投资者常常希望获得更多的钱，所以他们在给定的标准差水平下希望获得最高的期望收益率。

这些论据表明：风险厌恶和非饱和的投资者只对最小方差集上半部分感兴趣。这一部分被称为可行区域的**有效边界**（**efficient frontier**），如图 6—11（b）。这些组合是有效组合的含义是有效边界上的点为大部分投资者提供了最佳的均值—方差投资组合，因此我们可以重点考察有效边界上的点。下一节我们说明怎样计算有效边界上的投资组合。

6.6 马克维茨模型

我们现在需要为最小方差的投资组合建立数学表达式，我们仍然假设有 n 种资产，平均（或期望）收益率是 $\bar{r}_1$，$\bar{r}_2$，…，$\bar{r}_n$，协方差为 σ_{ij}，（i，$j=1$，2，…，n）。资产组合由 n 个权数 w_i（$i=1$，2，…，n）定义，其中

158 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$（我们允许 w_i 为负，即允许卖空）。为了求得最小方差投资组合，我们假定期望值固定在 $\bar{r}$（$\bar{r}$ 取任意值）。然后我们找出在可行集中具有这一均值的最小方差的可行投资组合。因此我们就构建了如下问题：

$$\min \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

在方差前面的系数 $\frac{1}{2}$ 只是为了计算方便而已，它使得最后得出的结果更加齐整。

马克维茨问题是单期投资理论的基础，这个问题明确地阐述了投资组合中期望收益率与方差之间的权衡。只要马克维茨问题被构建出来，代入数字就可以获得具体的数值解。如果通过解析方法来解决这个问题也十分有用，因为我们可以从解析解中得出许多重要的结论。下一章中，马克维茨问题主要应用于无风险资产和风险资产同样可获得的情形。这将使可行集的性质大为简单，同样也简化了解析解。

马克维茨问题的解*

我们可以通过**拉格朗日乘数（Lagrange multipliers）**λ 和 μ 来解决带有

约束条件的最优化问题，我们构造[1]拉格朗日函数（Lagrangian）：

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}w_iw_j\sigma_{ij}-\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n}w_i\overline{r_i}-\overline{r}\Big)-\mu\Big(\sum_{i=1}^{n}w_i-1\Big)$$

然后我们对每个变量 w_i 进行求导，并令导数值等于 0。

如果你对这种类型的函数不太熟悉的话，进行求导会有些困难，所以我们先解决两个变量的情形，之后再推广到 n 种资产的情形。对于两个变量而讲，有：

$$L=\frac{1}{2}(w_1^2\sigma_1^2+w_1w_2\sigma_{12}+w_2w_1\sigma_{21}+w_2^2\sigma_2^2)-\lambda(\overline{r_1}w_1+\overline{r_2}w_2-\overline{r})-\mu(w_1+w_2-1)$$

于是： 159

$$\frac{\partial L}{\partial w_1}=\frac{1}{2}(2\sigma_1^2w_1+\sigma_{12}w_2+\sigma_{21}w_2)-\lambda\overline{r_1}-\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2}=\frac{1}{2}(\sigma_{12}w_1+\sigma_{21}w_1+2\sigma_2^2w_2)-\lambda\overline{r_2}-\mu$$

利用 $\sigma_{12}=\sigma_{21}$，并令这两个导数等于 0，我们可得：

$$\sigma_1^2w_1+\sigma_{12}w_2-\lambda\overline{r_1}-\mu=0$$

$$\sigma_{21}w_1+\sigma_2^2w_2-\lambda\overline{r_2}-\mu=0$$

这就给我们两个方程，另外加上两个约束条件的方程，我们一共就有了四个方程，这就可以解出[2]四个未知量 w_1、w_2、λ 和 μ。

现在可以通过显而易见的推广得出 n 个变量情形的一般形式，我们陈述如下：

⇒**有效集方程（Equation for efficient set）** *各项资产权重为 w_i（$i=1,2,\cdots,n$）的 n 种资产组成、均值为 $\overline{r}$、拉格朗日乘数 λ 和 μ 满足的有效投资组合（允许卖空）：*

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}w_j-\lambda\overline{r_i}-\mu=0\quad(i=1,2,\cdots,n)\qquad(6\text{—}5a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r} \qquad (6\text{-}5b)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad (6\text{-}5c)$$

在（6—5a）中我们有 n 个方程，加上两个约束条件（6—5b）和（6—5c）中的两个方程，总共有 $n+2$ 个方程。相应地，我们有 $n+2$ 个未知数，即 $w_i(i=1, 2, \cdots, n)$、λ 和 μ。这些方程的解得出的是一个均值为 $\bar{r}$ 的有效组合的各项资产的权重。注意由于 $n+2$ 个方程均是线性的，所以可以通过线性代数的方法来获得它们的解。

例 6.9（三项互不相关的资产） 假设有三种互不相关的资产，方差均为
160 1，均值分别为 1，2，3。这种情况比较简单和匀称，这使得求显式解的过程会相对简单一点。

首先由于 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=1$ 和 $\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$。因此，(6—5a～6—5c) 化为：

$$\omega_1-\lambda-\mu=0$$

$$\omega_2-2\lambda-\mu=0$$

$$\omega_3-3\lambda-\mu=0$$

$$\omega_1+2\omega_2+3\omega_3=\bar{r}$$

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=1$$

上面三个方程可以推出 ω_1，ω_2，ω_3 的表达式，代入下面两个方程，得出：

$$14\lambda+6\mu=\bar{r}$$

$$6\lambda+3\mu=1$$

解上述两方程可得 $\lambda=(\bar{r}/2)-1$ 和 $\mu=2\frac{1}{3}-\bar{r}$，然后有：

$$\omega_1=\frac{4}{3}-(\bar{r}/2)$$

$$\omega_2=\frac{1}{3}$$

$$\omega_3=(\bar{r}/2)-\frac{2}{3}$$

由于组合标准差是$\sqrt{\omega_1{}^2+\omega_2{}^2+\omega_3{}^2}$，直接代入上述式子可得：

$$\sigma=\sqrt{\frac{7}{3}-2\bar{r}+\frac{\bar{r}^2}{2}} \tag{6—6}$$

由对称性得最小方差点在 $\bar{r}=2$ 和 $\sigma=\sqrt{3}/3=0.58$ 点处。可行区域是图6—12的子弹形曲线包围的区域。

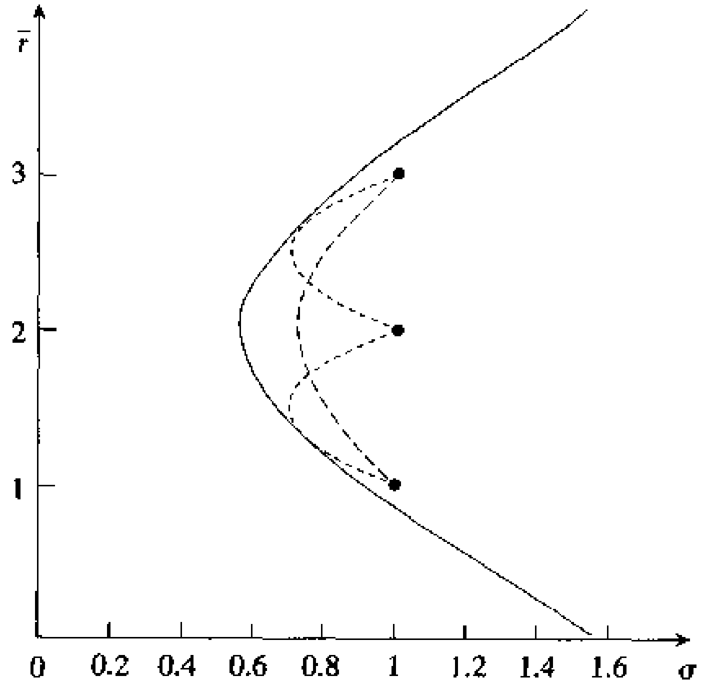


图6—12 三资产情形

在允许卖空时的可行区域包含不允许卖空时的可行区域，外面的曲线是前者的最小方差集，而较短的曲线是两资产组合的最小方差集。

前述的所有分析都假定允许卖空。如果不允许卖空则可行集合要小一些，这将在下面小节中讨论到。

非负约束条件*

在前面的推导中，未限制 ω_i 变量的符号，这表明允许卖空，我们可以限制 ω_i 非负而禁止卖空，这就得出了马克维茨问题的另一种表达： 161

$$\min \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j \tag{6—7a}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i\omega_i = \bar{r} \tag{6—7b}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1 \tag{6—7c}$$

$$\omega_i \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{6—7d}$$

这个问题不能够简化成一系列的线性方程式来求解。它被称为**二次规划问题（quadratic program）**，因为目标函数是二次的，而约束条件是线性方程和不等式。我们可以使用特殊的计算机程序来解决这个问题。但是小规模和中等规模的问题可以很容易地应用电子表格程序计算出来，在金融行业中大量有特殊用途的程序被设计出来解决含有几百种甚至是上千种资产的马克维茨问题。

两个公式的重要差别是允许卖空时，大多数（如果不是全部的话）权数 ω_i 具有非零值（或者是正的或者是负的），所以基本上所有资产都使用到了。相比之下，不允许卖空时，通常许多权数都等于零。

例 6.10（三种互不相关的资产） 再次考虑例 6.9 中的三种资产，但是不
162 允许卖空。有效点必须使用与上例相同的参数来解出式（6—7a）。在这种情况下，我们不能将式（6—7a）简化成一个方程组，但是考虑资产的两两组合，就可以得出有效边界。一般解如下：

$1\leqslant\bar{r}\leqslant\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}\leqslant\bar{r}\leqslant\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}\leqslant\bar{r}\leqslant 3$
$\omega_1=2-\bar{r}$	$\frac{4}{3}-\frac{\bar{r}}{2}$	0
$\omega_2=\bar{r}-1$	$\frac{1}{3}$	$3-\bar{r}$
$\omega_3=0$	$\frac{\bar{r}}{2}-\frac{2}{3}$	$\bar{r}-2$
$\sigma=\sqrt{2\bar{r}^2-6\bar{r}+5}$	$\sqrt{\frac{2}{3}-2\bar{r}+\frac{\bar{r}^2}{2}}$	$\sqrt{2\bar{r}^2-10\bar{r}+13}$

6.7　两基金定理★

最小方差集有一个重要的性质，这个性质极大地简化了最小方差集的运算。我们知道最小方差集上的点满足由（$n+2$）个线性方程的方程组（方程 6—5a～6—5c），即：

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}w_j-\lambda\overline{r_i}-\mu=0(i=1,2,\cdots,n) \tag{6—8a}$$

$$\sum_{i=1}^{n}w_i\overline{r_i}=\bar{r} \tag{6—8b}$$

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=1 \tag{6—8c}$$

假设上述方程有两个已知解，$w^1=(w_1^1, w_2^1, \cdots, w_n^1)$、$\lambda^1$、$\mu^1$ 和 $\mathbf{w}^2=(w_1^2, w_2^2, \cdots, w_n^2)$、$\lambda^2$、$\mu^2$，分别对应于期望收益率 $\bar{r}^1$ 和 $\bar{r}^2$。现在我们将前一种资产乘以 α 而后一种资产乘以（$1-\alpha$）构成一个资产组合。直接代入后，我们可以看到新的组合仍然满足上述（$n+2$）个等式，对应于期望值 $\alpha\bar{r}^1+(1-\alpha)\bar{r}^2$。下面我们来具体验证一下，首先注意到 $\alpha\mathbf{w}^1+(1-\alpha)\mathbf{w}^2$ 是一个权重之和为 1 的合理的投资组合，满足（6—8c）；其次注意到期望收益是 $\alpha\bar{r}_1+(1-\alpha)\bar{r}_2$，所以满足（6—8b）；最后，由 $\mathbf{w}^1$，$\mathbf{w}^2$ 都是使（6—8a）左边为 0 的解，那么它们的组合显然也满足（6—8a）。由上，我们可得出结论，即投资组合 $\alpha\mathbf{w}^1+(1-\alpha)\mathbf{w}^2$ 也是一个解，它也是最小方差集上的一点。这个简单的结论常常使得初次接触这个问题的大多数人很惊讶，但是它却是最小方差集的一个重要性质。

运用这个结论，我们首先可以假设 $\mathbf{w}^1$ 和 $\mathbf{w}^2$ 是最小方差集上的两个不同的投资组合，因此，当 α 的取值在（$-\infty$，$+\infty$）变化时，则以 $\alpha\mathbf{w}^1+(1-\alpha)\mathbf{w}^2$ 定义的投资组合的轨迹就是完整的最小方差集。我们显然能选出两个有效的初始解（位于最小方差集上半部分），然后就可以推出所有其他的 163

有效点（同样也能推出其他所有的最小方差点），这个结论常常以一种对投资者有明显的操作意义的形式表达如下：

⇒**两基金定理（The two-fund theorem）** *从均值和方差意义上讲，我们只需建立两个有效基金（组合）就可以复制出所有的有效投资组合，换句话说，所有追求有效投资组合的投资者只需投资于这两种基金的不同组合即可。*

这个结论有着巨大的含义，根据上述定理，只需两只共**同基金**[3]（**mutual fund**）就可以为任何人提供完全的投资服务，任何人无需购买单只股票，他们只要购买基金份额即可。然而这个结论是建立在一定的假设基础之上的，这些假设有：每个人只关心均值和方差；每个人对均值、方差和协方差都有相同的评价；单期结构是适当的。所有这些假设都十分苛刻。然而，如果你没有时间和爱好去做细致的评估，那么你可以选择两个你信任的评估者所管理的基金进行投资。

两基金定理对计算也很有意义，为了解出式（6—5a～6—5c）对所有 $\bar{r}$ 值的解，我们只需求出其中的两个解，再将其进行组合即可。确定两个解的一个很简单的方法就是指定 λ 和 μ 的值。比较简便的选择是：(a)$\lambda=0$，$\mu=1$ (b)$\lambda=1$，$\mu=0$。代入后得出的解可能不满足约束条件 $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$，但是我们可以对所有 w_i 乘以一个相同的倍数，进行标准化使其满足式（6—8c）。从（a）情况中所得的解忽视了期望收益率的限制条件，因此是最小方差点。下面的例子会具体地说明整个求解过程。

例 6.11（证券组合） 表 6—2 上半部分中列出了 5 种证券的 1 年期收益率的均值和相互之间的协方差。期望值的单位是 1%，协方差的单位也是 1%，比如说，第一种证券每年期望收益率为 15.1% = 0.151，方差为 0.023，转化成标准差是 $\sqrt{0.023}=0.152=15.2\%$。

我们能找到两个投资于最小方差集上的基金，在式（6—5）中首先令 $\lambda=0$，$\mu=1$，然后我们解下列方程组： 164

$$\sum_{j=1}^{5}\sigma_{ij}v_j^1=1$$

其中向量 $\mathbf{v}^1=(v_1^1, v_2^1, \cdots, v_5^1)$。用一个解决线性方程组的电子表格数据包我们可以解出上述方程组。该方程组的系数是协方差矩阵，而右边则都等于 1。得出向量 $\mathbf{v}^1$ 的分量 v_j^1（原文为 v_j^2，疑似笔误。——译者注）在表 6－2下半部分的第一列中列出。

然后我们将所有的 v_i^1 标准化使得它们之和为 1，得到的 w_i^1 为：

$$w_i^1=\frac{v_i^1}{\sum_{j-1}^{n}v_j^1}$$

向量 $\mathbf{w}^1=(w_1^1, w_2^1, \cdots, w_5^1)$（原文为 $\mathbf{w}^1=(w_1^1, w_2^2, \cdots, w_5^1)$，疑似笔误。——译者注）确定最小方差点。

表 6—2　　　　一个证券组合

证券	协方差 V					$\bar{r}$
1	2.30	0.93	0.62	0.74	−0.23	15.1
2	0.93	1.40	0.22	0.56	0.26	12.5
3	0.62	0.22	1.80	0.78	0.27	14.7
4	0.74	0.56	0.78	3.40	−0.56	9.02
5	−0.23	0.26	−0.27	−0.56	2.60	17.68

	$\mathbf{v}^1$	$\mathbf{v}^2$	$\mathbf{w}^1$	$\mathbf{w}^1$
	0.141	3.652	0.088	0.158
	0.401	3.583	0.251	0.155
	0.452	7.248	0.282	0.314
	0.166	0.874	0.104	0.038
	0.440	7.706	0.275	0.334
均值			14.413	15.202
协方差			0.625	0.659
标准差			0.791	0.812

表的上半部分给出的是 5 种证券的期望收益率和协方差，而表的下半部分组合 $\mathbf{w}^1$ 是最小方差点，组合 $\mathbf{w}^2$ 则是由 5 种证券组合而成的另一种有效率组合。

第二步我们令 $\mu=0$，$\lambda=1$，因此，解下列方程组：

$$\sum_{j=1}^{5}\sigma_{ij}v_j^2=\overline{r_i}\quad i=1,2,\cdots,5$$

165 得出解 $\mathbf{v}^2=(v_1^2, v_2^2, \cdots, v_5^2)$。我们再将向量 $\mathbf{v}^2$ 进行标准化，使得它的各个分量之和为 1，即得到 $\mathbf{w}^2$。在表 6—2 下半部分中我们列出了向量 $\mathbf{v}^1$、$\mathbf{v}^2$、$\mathbf{w}^1$、$\mathbf{w}^2$。同时也给出了以 $\mathbf{w}^1$ 和 $\mathbf{w}^2$ 定义的投资组合的均值、方差和标准差。所有的有效率组合都可以由这两个资产组合而得到。

6.8 包含无风险资产的投资组合

在前几节的分析中隐含地假设可以获得的 n 种资产均是有风险的，即对每项资产都有 $\sigma>0$。而**无风险资产**（**risk-free asset**）的收益却是确定的（即确定地知道），因此 $\sigma=0$，换句话说，无风险资产是一种纯粹的生息工具，将无风险资产加入投资组合就相当于投资者以无风险利率贷出或借入资金。贷出（比如购买债券）相当于无风险资产的权重为正，而借入相当于无风险资产的权重为负。

在可获得的资产中加入无风险资产是必要的，因为那使我们的分析更加接近现实。事实上投资者常常有机会借入或贷出资金。幸运的是，不久我们就可以看到，无风险资产的引入简并了数学计算，也大大简化了效率边界的形状。

为了解释这种简并状态，首先我们假设某种无风险资产有（确定的）收益率 r_f。其他任何风险资产的收益率为 r，均值为 $\bar{r}$，方差为 σ^2。注意这两种收益率的协方差必然为 0。这是因为协方差定义为 $E[(r-\bar{r})(r_f-r_f)]=0$。

现在假设将这两种资产构成一个风险资产权重为 α 而无风险资产权重为 $1-\alpha$ 的资产组合，而且有 $\alpha\leqslant1$。投资组合的期望收益率为 $\alpha r_f+(1-\alpha)\bar{r}$。收益率的标准差是 $\sqrt{(1-\alpha)^2\sigma^2}=(1-\alpha)\sigma$。因为无风险资产没有方差，同风险资产之间也没有协方差，所以在式子中只剩下有关风险资产的那一项。

如果我们暂时定义 $\sigma_f=0$，就可以看到投资组合的收益率有：

均值 $=\alpha r_f+(1-\alpha)\ \bar{r}$

标准差 $=\alpha r_f+(1-\alpha)\ \sigma$

上述等式表明均值和标准差都随着 α 取值不同线性地变化，这就是说，当 α 取值变化时，投资组合点在 $\bar{r}-\sigma$ 平面上的轨迹是一条直线。

现假设有 n 种资产，已知其均值为 $\bar{r}_i$，协方差为 σ_{ij}。另外无风险资产收益率为 r_f。将无风险资产引入可获得的资产范围对可行区域的形状有重大的影响。图 6—13（a）中表明了原因。首先我们构建一般的以 n 种风险资产组合定义的可行区域。（可以是允许卖空的，也可以是禁止卖空的。）这个区域用图中的黑色阴影区域表示。接着将区域中的每一种资产（或组合）与无风险资产进行组合。在进行组合时我们允许借入或者贷出无风险资产，但只可买入风险资产。这些新的组合的轨迹是始于无风险资产且经过风险资产点的无限延长的直线。初始的可行集中的每个资产都有这样的一条直线，所有这些直线的集合形成了一个三角形可行区域，即图中所示的浅灰色阴影部分。 166

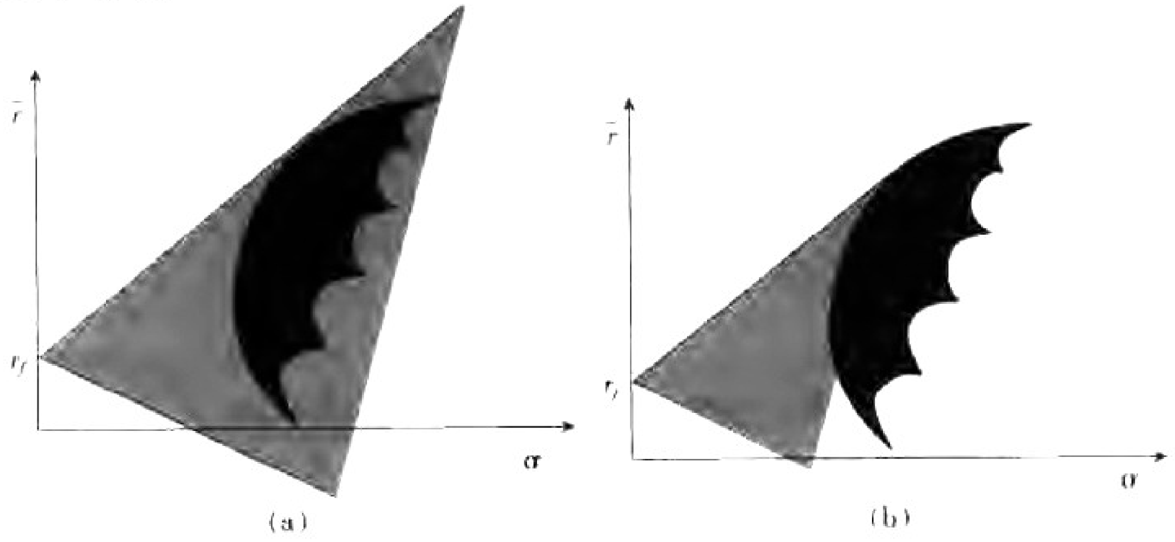


图 6—13　无风险资产的影响

包含了无风险资产使可行区域增加了许多直线。（a）如果允许贷出和借入，我们可以得到一个完全无限的三角区域。（b）若只允许借入，则可行区域有效边界在 σ 较小时为三角形，而 σ 在较大时则是一条曲线。

这是一个美妙的结论，只要可获得的资产中包含无风险资产，那么可行区域就是一个无限大的三角区域。

如果不允许借入无风险资产（即不能卖空此资产），我们可以连接无风险资产和原始可行区域内点之间的线段。但我们将这些线段再延长，因为这要求借入无风险资产。这些线段的集合形成一个新的可行区域，这个区域有一条直线的前沿边界但是顶端是圆形的，如图 6—13（b）。

6.9 单基金定理

如果允许无风险贷出和借入，则有效集就是单一的直线，即是三角形可行集的上界。此直线同初始的只有风险资产的可行集相切（如图 6—14 所示）。我们可以通过既在有效集直线上又在初始可行集上的点 F 来定义有效集（显然 F 是有效集直线同初始可行集的切点）。显然任何一个有效点（直线上的任一点）都可以表示成该资产和无风险资产的组合。我们令两种资产权重不断变化，便可以得到不同的有效点。（无风险资产的权重可以为负，即可以通过借入资金来买入风险资产，从而产生杠杆作用）切点上的投资组
167 合可以认为是由多种资产组成的基金并作为一个资产单位出售，这只基金的作用由下述命题进行概括：

单基金定理（The one-fund theorem） *存在一只由风险资产组合而成的基金 F，使得任意的有效投资组合都可以由 F 和无风险资产组合而得。*

这是均值—方差理论的最后一个结论，而这个结论是下一章的起点。读者在这里就可以结束本章的阅读，（做完练习后）进行下一章的学习。但是如果你还想知道如何求得特殊的有效点 F 的话，请阅读下面专门解决这个问题的小节。

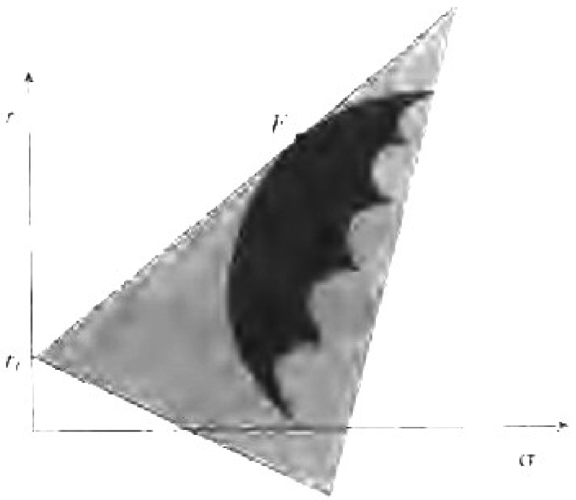


图 6—14 单基金定理

当允许以无风险利率借入和贷出时，有惟一的有效风险资产基金 F。在有效边界上的所有点都是 F 与无风险资产的组合。

求解方法*

如何求得代表有效基金的切点？我们只需要将此问题描述成一个最优化问题。在可行区域上任取一点，画出联结此点与无风险资产的直线。以 θ 表示该线与水平线的夹角，对于任意可行（风险）组合 p，可得：

$$\tan\theta=\frac{\overline{r_p}-r_f}{\sigma_p}$$

切点组合就是使得 θ 或 $\tan\theta$ 最大的可行点。原来这个问题可以变成求解线性方程组的问题。

为了求解，我们依然假设有 n 种风险资产。我们规定风险资产的权重为 w_1，w_2，…，w_n，使得 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。切点上的基金无风险资产的权重为 0（注意我们允许卖空风险资产）。由 $r_p=\sum_{i=1}^{n}w_ir_i$，可得 $\bar{r}_p=\sum_{i=1}^{n}w_i\bar{r}_i$ 和 $r_f=\sum_{i=1}^{n}w_ir_f$，于是

$$\tan\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(\bar{r}_i - r_f)}{\left(\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} w_i w_j\right)^{1/2}}$$

168 显然将所有 w_i 乘以相同的常数不会影响表达式的值，因为分子分母可以约掉此常数。因此没有必要加入限制条件 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ 。

在上式中对每个 w_k 求导并使其为 0，可得如下方程（见习题 10）：

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ki} \lambda w_i = \bar{r}_k - r_f, \quad k = 1,2,\cdots,n \tag{6—9}$$

其中 λ 是一个（未知）常数，对每一个 i，作替换 $v_i=\lambda w_i$，则式（6—9）变为：

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ki} v_i = \bar{r}_k - r_f, \quad k = 1,2,\cdots,n \tag{6—10}$$

我们通过解上述方程得到 v_i，并对 v_i 标准化后确定 w_i，即

$$w_i = \frac{v_i}{\sum_{k=1}^{n} v_k}$$

例 6.12（三项互不相关的资产） 再次考虑例 6.9，三种互不相关的风险资产各自的方差为 1。各自的期望收益率是 $\bar{r}_1=1$，$\bar{r}_2=2$ 和 $\bar{r}_3=3$。另外我们假设存在无风险资产且 $r_f=0.5$。

运用式（6—9），由于协方差为 0，所以计算十分简单，我们可得：

$v_1=1-0.5=0.5$

$v_2=2-0.5=1.5$

$v_3=3-0.5=2.5$

接着我们对其进行标准化，各自除以三数之和，得：

$w_1=\frac{1}{9}$，$w_2=\frac{1}{3}$，$w_3=\frac{5}{9}$

例 6.13（更大的组合） 考虑例 6.11 中的五种风险资产。同时假设存在无风险资产，且 $r_f=10\%$。我们可以很容易找到特定的基金 F。

注意到方程组（6—10）同例 6.11 中求 v^1 和 v^2 的方程组类似，只是方程的右边不同。实际上（6—10）的右边是例 6.11 中用于求 $\mathbf{v}^1$ 和 $\mathbf{v}^2$ 的方程右边的线性组合，即 $\bar{r}_k - r_f = 1 \times \bar{r}_k - r_f \times 1$。因此式（6—10）的解是 $\mathbf{v} = \mathbf{v}^2 - r_f \mathbf{v}^1$。于是（其中 $r_f = 10$ 以使其单位同例 6.11 中的单位一致），$\mathbf{v} = (2.242, -0.427, 2.728, -0.786, 3.306)$。标准化后的结果 $\mathbf{w} = (0.317, -0.060, 0.386, -0.111, 0.468)$。

以上的推导是以点 F 是两个已知的有效点的组合这一事实为基础的。

6.10　小结

单期投资的研究是以资产和投资组合的收益为基础的。这其中包括了总收益和收益率。资产的收益可能是不确定的，在这种情况下我们形式上将资产收益看成随机变量是很有用的。这种随机收益的概率特性由它们的期望值、方差、相互间的协方差概括。 169

我们将初始财富的各个部分投资于许多单个资产就形成了投资组合。各部分（或者权重）之和必为 1；但是如果允许卖空的话，有些权重可以为负。投资组合收益率是投资组合内各单项资产收益率的加权和，权重是构建投资组合时各项资产的权重。同样投资组合的期望收益率等于单项资产期望收益率的加权平均数。而投资组合的方差则由一个更复杂的公式给出：$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$，其中 w_i 是权重，σ_{ij} 是协方差。

给定 n 种风险资产的集合，赋予这 n 种资产各种可能的权重，就形成了投资组合的可行集。如果我们将投资组合的均值和标准差画在以 $\bar{r}$（均值）为纵轴，σ（标准差）为横轴的图形上，由此得到的区域称为可行区域。我们定义了两种不同的可行区域：允许卖空下得到的可行区域和不允许卖空时得到的可行区域。

我们可以得出结论：以均值和标准差来衡量投资组合价值的投资者如果是风险厌恶型和非饱和的，他就会选择在可行集最左边的上半部分进行投资——在有效边界上投资。

在有效边界上的点可以描述为一个最优化问题，这个问题由马克维茨最先提出，它寻求在给定的期望收益率下使得方差最小的投资组合权重。在数学上，这个问题可以表示为一个二次目标函数和两个线性约束条件。如果允许卖空（即权重既可为正，也可为负），则最优权重可以由一个有（$n+2$）个线性方程和（$n+2$）个未知数的方程组解出。如果禁止卖空，马克维茨问题可以由特殊的二次规划数据包解出。

当允许卖空时，马克维茨问题有一个重要的性质：如果我们已经得到两个解，则这两个解的任意加权组合也是此问题的解。这就推出了基本的两基金定理：寻求有效投资组合的投资者只需投资于两个集成有效基金。

一般来讲，除 n 种风险资产之外再假设有一项固定收益率为 r_f 的无风险资产是比较合理的。无风险资产的加入大大简化了可行区域的形状，其上界转变为一条直线。这条直线就是有效边界。直线有效边界与初始的可行区域（只由风险资产组合而成的区域）切于点 F。这就推出了重要的单基金定理：寻求有效投资组合的投资者只需投资于一个仅由风险资产构建的集成基金和无风险资产。不同的投资者会选择这两种资产不同的组合方式。

170 单个的风险资产有效基金 F 可以由 n 个未知数的 n 个线性方程组解出。当求出来的解进行标准化后使得各分量之和为 1 时，所得的各分量就是各项资产在集成基金中的权重。

练习

1.（有保证金的卖空）假设你卖空一只股票，并被要求存入与初始股价 X_0 相同的保证金。一年后平仓，那时股价为 X_1。于是你可以获得利润

X_0-X_1，并索回你的保证金，如果股票的总收益是 R，那么你卖空的总收益是多少？

2.（掷骰子）掷两粒骰子，并以 z 表示两粒骰子点数之积，那么随机变量 z 的期望值和方差是多少？（提示：利用两粒骰子点数的独立性。）

3.（两项相关资产）资产 A 和 B 之间的相关系数 ρ 是 0.1，其他数据如表 6—3 所示（注意：$\rho=\sigma_{AB}/\sigma_A\sigma_B$）。

（a）找出由 A 和 B 构建而成的最小标准差投资组合中 A 的权重 α 和 B 的权重 $1-\alpha$。

（b）求出最小标准差的值。

（c）此投资组合的期望收益率是多少？

表 6—3　　两项资产相关的情形

资产	$\bar{r}$	σ
A	10.0%	15%
B	18.0%	30%

4.（两只股票）现可以购买两只股票，相应的期望收益率是 $\bar{r}_1$ 和 $\bar{r}_2$，方差和协方差是 σ_1^2，σ_2^2 和 σ_{12}。为了最小化投资组合收益率的方差，我们应该分别在两只股票上投入多大比例的资金？并求此投资组合的期望收益率。

5.（雨险）杰文·琼斯的朋友正在计划投资 100 万美元于一年以后举行的摇滚音乐会。他计算出，一年后他将从初始投资中获得 300 万美元的收入——我的天，除非下雨。如果下雨的话他将损失所有的投资。举行音乐会的当天下雨的可能性是 50%。杰文建议他买雨险。花 0.5 美元就可以获得一份保险，如果当天下雨他就可以获得 1 美元，如果不下雨他就一无所获。他可以购买多份保险直至保额达到 300 万美元。

（a）如果他购买 u 份保险，那么他的投资的期望收益率是多少（保费应 171
算入他的初始投资）。

（b）为了使收益率的方差最小化，应购买多少份保险？最小值是多少？

相应的期望收益率是多少？（提示：在计算方差的一般表达式之前，考虑一个简单的答案。）

6.（野猫）假设有 n 种互不相关的资产（它们可能是 n 个不同的野猫油井勘探）。你可以投资于其中的一个，或是其中的组合，每项资产期望收益率均为 $\bar{r}$，但方差不同，第 i 种资产收益的方差是 $\sigma_i^2(i=1, 2, \cdots, n)$。

(a) 在 $\bar{r}-\sigma$ 中画出可行集，并指出有效集。

(b) 找出最小方差点，并以 $\bar{\sigma}^2$ 来表示，证明 $\bar{\sigma}^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{-1}$。

7.（马克维茨趣题）有三种可得资产的收益率分别是 r_1、r_2 和 r_3，协方差矩阵和期望收益率是

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{r}}=\begin{bmatrix}0.4\\ 0.8\\ 0.8\end{bmatrix}$$

(a) 求最小方差投资组合。（提示：利用对称性 $\omega_1=\omega_3$。）

(b) 令 $\lambda=1$，$\mu=0$，求另一有效组合。

(c) 如果无风险收益率 $r_f=0.2$，求出风险资产的有效组合。

8.（拟合）假设我们不能运用一个特定的投资组合（如给定的有效组合）中的所有资产。另一个选择是找一个由 n 种股票构成，而且与指定的投资组合非常接近的投资组合——我们要最小化两个组合的收益率之差的方差。

具体地，我们假设目标资产组合的（随机）收益率为 r_M。并假设有 n 种资产，其（随机）收益率为 r_1，r_2，…，r_n，我们要找到一个投资组合，使其收益率为：

$$r=\alpha_1 r_1+\alpha_2 r_2+\cdots+\alpha_n r_n\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\right)$$

同 r_M 之间的差的方差 $\mathrm{var}(r-r_M)$ 最小。

(a) 找出求 α_i 的一系列方程式。

(b) 尽管找到的组合在方差意义上同目标组合十分接近，但是可能会牺牲均值。因此一个合理的方法就是给定一个收益均值后再使拟合误差的方差最小化。随着方差变化，将会得出一种新的意义上的有效投资组合集——称为拟合有效。求拟合有效时 α_i 的方程式。

9. (赌博轮盘) 考虑一个普通的有 n 个部分的轮盘。下注一美元以后，转到第 i 部分的回报是 A_i。假设你在每个部分都下注，且在第 i 部分的下注金额为 $B_i=1/A_i$。证明你所赢得的钱与轮盘的结果无关。轮盘的无风险收益率是多少？并将这个问题运用于例 6.7。

10. (有效投资组合◇) 推导式 (6—9)。 172

(提示：请注意 $\frac{\partial}{\partial w_i}\left(\sum_{ij}^{n}\sigma_{ij}w_iw_j\right)^{1/2}=\left(\sum_{ij}^{n}\sigma_{ij}w_iw_j\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}w_j$)

【注释】

[1] 一般来说，构造拉格朗日函数第一步是要将每个约束条件转变为右边为 0 的式子。然后各个式子的左边乘上拉格朗日乘数并用目标函数减去它们。在我们的问题中，λ 和 μ 分别是第一和第二个约束条件的乘数。(见附录 B。)

[2] 两资产情形实际上是简并的，因为 w_1 和 w_2 可以由两个约束条件惟一地确定，这种简并在三种或者更多种资产情形中 (通常) 消失；然而从两资产情形中所得的等式可以预示 n 资产的情形下所得的等式。

[3] 共同基金是一种投资公司通过出售基金份额，从个人手中获得资本再投资于资本市场中的股票组合。单个投资者拥有的权利是他或她的基金份额的价值减去一定的交易费用和佣金。

【参考文献】

均值—方差投资组合理论首先由马克维茨提出文献 [1~4]。文献 [5~8] 给出了一些重要发展。单基金定理由托宾在文献 [9] 中提出。读者如果

要进行更加广泛的阅读的话，可以参看文献［10—11］和第2章参考书目所提及的一般性的投资学教材。

1. Markowitz, H. M. (1952), "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, 7, no. 1, 77—91.
2. Markowitz, H. M. (1956), "The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints," *Naval Research Logistics Quarterly*, **3**, nos. 1—2, 111—113.
3. Markowitz, H. M. (1987), *Portfolio Selection*, Wiley, New York.
4. Markowitz, H. M. (1987), *Mean = Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Basil Blackwell, New York.
5. Hester, D. D., and J. Tobin (1967), *Risk Aversion and Portfolio Choice*, Wiley, New York.
6. Fama, E. F. (1976), *Foundations of Finance*, Basic Books, New York.
7. Sharpe, W. F. (1967), "Portfolio Analysis," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2, 76—84.
8. Levy, H. (1979), "Does Diversification Always Pay?" *TIMS Studies in Management Science*.
9. Tobin, J. (1958), "Liquidity Preference as Behavior Toward Risk," *Review of Economic Studies*, **26**, February, 65—86.
10. Francis, J. C., and G. Alexander (1986), *Portfolio Analysis*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
11. Elton, E. J., and M. J. Gruber (1991), *Portfolio Theory and Investment Analysis*, 4th ed., Wiley, New York.

第7章 资本资产定价模型

在投资科学中占统治地位的是两类主要 173
的问题。第一类就是在某种投资情形下确定最优的行动方针。这类问题包括怎样设计最优投资组合，怎样为一项投资设计出最优的管理战略，怎样对一组潜在的投资项目进行选择，等等。本书第一部分举了一些有关此类问题的例子。第二类问题就是确定某项资产合理的、无套利的、公平的、或者均衡的价格。同样，在第一部分中有这样的例子，比如根据利率的期限结构计算债券的合理价格的公式，以及计算一家公司的合理价值的公式。

本章主要讨论定价问题，我们将在均值—方差模型的框架中推导风险资产的合理价格。结论就是由夏普（Sharp）、林特纳（Lintner）、默森（Mossin）首先提出的**资本资产定价模型（capital asset pricing model，CAPM）**，此模型由前面章节中所描述的马克维茨均值—方差投资组合理论推导而得。本章后面的一部分我们将讨论如何将此结论用于投资决策问题。

7.1 市场均衡

假定每个人均是前面章节中所描述的均值—方差最优化者。再进一步假设每个人对资产的概率分布结构的看法一致，即对每项资产收益的均值、方差以及协方差的估计都一致。还有，再假设对任何人有且仅有一个借贷的无风险利率，而且无交易成本。在这些假定之下会有怎样的结果呢？

由单基金定理我们可以知道，所有人都将会购买单一的由风险资产组成的基金，而且他们可能会以无风险利率借入或贷出资金。此外，由于每个人
174 使用同样的均值、方差和协方差，因此他们购买同样的风险基金。但是由于个人对风险的偏好不一样，他们可能会选择这两种资产（即风险基金和无风险资产）的不同比例的组合。有些人为了规避风险，可能会在投资组合中买入较高比例的无风险资产。而有些人比较喜欢冒险，会选择风险基金占较高比例的投资组合。不管怎样，每个人构建投资组合时都会选择无风险资产和惟一的风险基金。因此定理中的单基金是指惟一被使用的基金。

如果每人都购买同样的风险资产基金，那么这只基金必须是什么样的呢？这个问题的答案是隐含在 CAPM 模型中的关键思想。这种思想显示的答案是：此基金必须同**市场组合（market portfolio）**相同。市场组合是所有资产的全体。在权益证券市场中，市场组合是所有的股票，如 IBM、GM、DIS 等等股票的总和。如果每个人都只购买一只基金，那么他们购买资产的总和就是市场，于是此基金就等同于市场。这就是说，它必须包含市场中任

何一只股票，且比例与整个市场中每只股票所占的比例相同。

我们将投资组合总资本分配于某项资产的比率定义为此项资产在投资组合中的权重。从而，市场组合中每项资产的权重等于此项资产的总资本价值与整个市场的资本价值的比率。这些权数被称为**资本化权重（capitalization weights）**。这些就是我们常常用 w_i 来表示的权重。换句话说，市场组合的 w_i 就是各项资产的资本化权重。

我们可以通过下面的例子来说明市场组合的确切定义。假设市场中只有三只股票：爵士公司股票、古典公司股票和摇滚公司股票。表7—1中给出了各自的流通股数和市价。市场权重是相对于整个市场资本化价值而言的，而不是相对于市场的总流通股数。

在每个投资者都使用具有相同参数估计的均值—方差分析方法的情形下，我们知道风险资产的有效基金就是市场组合。于是在这些假定下，我们就没有必要去构建均值—方差问题、去估计基本参数的值或者说没有必要去解那些定义最优投资组合的方程组。我们知道最优投资组合即为市场组合。

表7—1　　市场资本化权重

证券	公开发行的股份数	市场相对份额	价格	资本化价值	市场权数
爵士公司	10 000	1/8	$6.00	$60 000	3/20
古典公司	30 000	3/8	$4.00	$120 000	3/10
摇滚公司	40 000	1/2	$5.50	$220 000	11/20
总计	80 000	1		$400 000	1

市场组合中一只股票股份的百分比是总股份的股份权重比例，这些百分比例并不是市场组合的权重。一只股票在市场组合中的权重与资本价值成比例。如果某项资产价格变化了，那么它的股份权重不变，而资本化权重却变化了。

这个结论是如何产生的呢？我们如何能够在一些必需的数据不被知晓之前解决这个问题呢？答案可以基于**均衡（equilibrium）**理论得出。即假如其他所有人（或至少有很大数量上的人）解决了这个问题，我们就不需要解决 175

了。整个过程是：资产的收益取决于其初始价格和期末价格，其他的投资者使用相同的参数估计解决均值—方差问题，然后在市场发出订单以购入资产组成他们的投资组合。如果发出的订单同可获得的数目不同，则价格一定发生改变了。供小于求的资产价格上升，而供过于求的资产价格下降。这些价格的变化会直接影响资产收益的估值，从而使投资者重置他们的最优投资组合。这个过程会一直持续至需求与供给刚好匹配，也就是说，过程持续直至均衡产生。

在理想化的世界中，每个投资者都是均值—方差分析者，并且对各个参数都有相同的评估，每个人都购买相同的投资组合，即市场组合。换句话说，价格调整使得市场变得有效率。于是在其他人都作出调整后，我们有理由相信有效投资组合即市场组合，因此无须做任何计算。

均衡理论常常用于可以反复交易的资产，比如股票市场。这样的话，我们认为个人可以缓慢地调整其对收益的估计，并仅仅对计算进行一些微小的调整，而不同时解决整个最优投资组合的决定问题。

最后，这种均衡模型认为合理的均衡只需由热心的（有精力的）投资者通过不断的计算而得出。他们使价格围绕合适的资产价值上下波动，而其他投资者只需跟随带头人购买市场组合。

这些有关均衡过程的结论都有一定的合理性，但是也都有很多的缺点。可以进行更深一步的分析，但是我们仅仅考虑均衡发生的情形。因此，均值—方差分析的最终结论即是单基金必定是市场组合。

7.2 资本市场线

前面的结论即风险资产的惟一的有效基金是市场组合，我们可以将此基金在 $\bar{r}-\sigma$ 坐标图中标出，并以点 M 代表市场。从而有效集是一条直线，起始于无风险资产点，并通过市场组合。如图 7—1 所示，我们称这条直线是

资本市场线（capital market line）。

这条线显示了有效资产或资产组合的期望收益同风险（以标准差衡量）之间的关系，也可以看作是一条定价线，因为价格必须调整以使得有效资产落在这条线上。

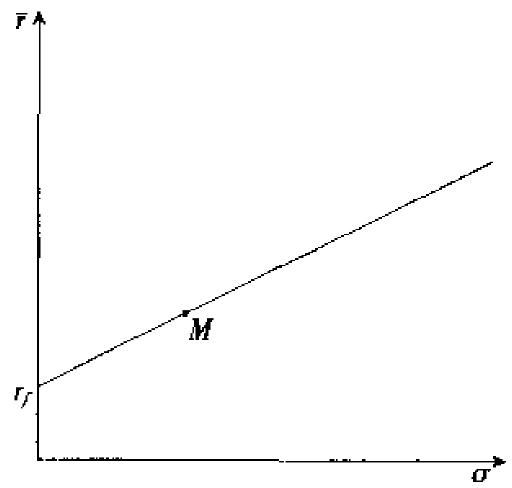


图 7—1　资本市场线

所有的有效资产必须都落在由无风险利率和市场资产组合确定的直线上。

资本市场线有明显的直观含义。它说明当风险上升时，相应的期望收益率应同时上升。而且如果风险由标准差来衡量的话，这种联系可以被描述成一条直线，在数学上，证券市场线可表述如下： 176

$$\bar{r}=r_f+\frac{\bar{r}_M-r_f}{\sigma_M}\sigma \tag{7—1}$$

其中 r_M 和 σ_M 是市场收益率的期望值及标准差，而 $\bar{r}$ 和 σ 是任意有效资产收益率的期望值和标准差。

资本市场线的斜率 $K=(\bar{r}_M-r_f)/\sigma_M$，这个值通常被称为**风险价格（price of risk）**。它说明在投资组合收益率的标准差上升一个单位时，期望收益率应该上升多少。

例 7.1（缺乏耐心的投资者） 史密斯先生比较年轻而且缺乏耐心。他认

为无风险利率仅为 6%，而风险资产的市场组合期望收益率为 12%。他计算出如果以市场收益率进行投资，他的初始资金1 000.00美元在 60 年后能增至 100 万美元，他不想等那么长时间，并想在 10 年后得到100 万美元。

史密斯先生很容易计算出他平均每年的收益率必须达到 100%才能达到他的目标（因为1 000美元$\times 2^{10}=$1 048 000美元）。相应地，通过资本市场线计算出他每年的标准差 σ 满足：

$$1.0=0.06+\frac{0.12-0.06}{0.15}\sigma$$

或者 $\sigma=10$。即 $\sigma=1\,000\%$。所以这个年轻人显然很难保证会获得成功（即使他可以借得足够的金额以投资于资本市场线上远离市场组合的点）。

177 **例 7.2（石油风险投资）** 考虑一项用于石油钻探的风险投资。股价为 875 美元，一年后的期望收入是1 000美元，但是由于钻探点的石油储量有很高的不确定性，收益的标准差是 $\sigma=40\%$，现在的无风险利率为 10%，市场组合期望收益率是 17%，标准差是 12%。

将此项风险投资与资本市场线上的点进行比较，给定 σ 的值，资本市场线上预期的期望收益率是：

$$\bar{r}=0.10+\frac{0.17-0.10}{0.12}0.40=33\%$$

然而，实际的期望收益率仅为 $\bar{r}=1\,000/875-1=14\%$。因此表示此项风险投资的点低于资本市场线。（这并不意味着这项投资必然是比较差的，这点我们在后面看到，但是他显然不能单独组成一个有效的投资组合。）

7.3 定价模型

资本市场线体现了有效投资组合的期望收益率和标准差的关系，但是并

没有表明单项资产的期望收益率同风险有怎样的联系。这种联系由资本资产定价模型给出。

我们将这个主要的结论作为一个定理给出。由于定理有点复杂，读者在开始阅读时可能仅仅希望看一下它的证明，我们在证明后会讨论定理的内在含义。

⇒***资本资产定价模型*** **(the capital asset pricing model, CAPM)** *如果市场组合 M 有效，那么任意一项资产 i 的期望收益率 $\bar{r}_i$ 满足：*

$$\bar{r}_i - r_f = \beta_i(\bar{r}_M - r_f) \tag{7—2}$$

其中，

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \tag{7—3}$$

证明：对任意 α，考虑以 α 的比例投资于资产 i 和以 $1-\alpha$ 的比例投资于市场资产组合 M 的投资组合，(允许 $\alpha<0$，即借入无风险资产)，那么此项组合的期望收益率是：

$$\bar{r}_\alpha = \alpha\bar{r}_i + (1-\alpha)\bar{r}_M$$

收益率的标准差是：

$$\sigma_\alpha = [\alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iM} + (1-\alpha)^2\sigma_M^2]^{1/2}$$

当 α 变化时，($\bar{r}_\alpha$，σ_α) 在 $\bar{r}-\sigma$ 图像上的轨迹是一条曲线，如图 7—2 所示。特别地，当 $\alpha=0$ 时，投资组合就是市场组合 M。这条曲线不能与资本市场 178 线相交，否则的话，位于资本市场线上方的点所表示的投资组合会违背资本市场线作为可行集的有效边界的定义。所以当 α 等于 0 时，曲线必须同资本市场线相切于点 M。这种相切是我们用于推导公式的条件。

相切条件的含义可以理解为使得曲线在点 M 的斜率和资本市场线在点 M 的斜率相等的条件。为了构建这个条件，我们需要进行一些求导。

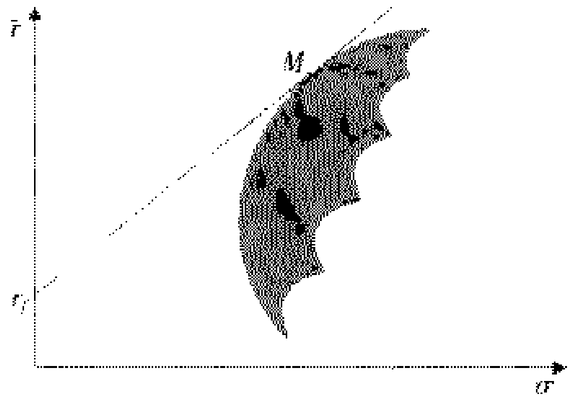


图 7—2 资产组合曲线

所有的投资组合在坐标图上形成了一条曲线，这条曲线不能穿过资本市场线，因此必须与该直线相切。

首先有：

$$\frac{d\bar{r}_\alpha}{d\alpha}=\bar{r}_i-\bar{r}_M$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}=\frac{\alpha\sigma_i^2+(1-2\alpha)\sigma_{iM}+(\alpha-1)\sigma_M^2}{\sigma_\alpha}$$

因此，

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\frac{\sigma_{iM}-\sigma_M^2}{\sigma_M}$$

然后我们利用关系：

$$\frac{d\bar{r}_\alpha}{d\sigma_\alpha}=\frac{d\bar{r}_\alpha/d\alpha}{d\sigma_\alpha/d\alpha}$$

可得：

$$\left.\frac{d\bar{r}_\alpha}{d\sigma_\alpha}\right|_{\alpha=0}=\frac{(\bar{r}_i-\bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM}-\sigma_M^2}$$

这个斜率必须等于资本市场线的斜率。因此，

$$\frac{(\bar{r}_i-\bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM}-\sigma_M^2}=\frac{\bar{r}_M-r_f}{\sigma_M}$$

我们现在只解出$\bar{r}_i$，可以得到最后的结论：

$$\bar{r}_i = r_f + \left(\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2}\right)\sigma_{iM} = r_f + \beta_i(\bar{r}_M - r_f)$$

这显然与前面所述的公式相同。

公式中的 β_i 被称为资产的**贝塔值**（beta）。如果在讨论中一项资产已经 179
被确定下来，贝塔值一般不写下标——就是 β。在使用 CAPM 模型时，惟一所需知道的有关资产的风险特性的量就是资产的贝塔值。

$\bar{r}_i - r_f$ 值被称为资产 i 的**期望超额收益率**（expected excess rate of return），它是收益率预期会超出无风险利率的数值。同样，$\bar{r}_M - r_f$ 是市场组合的期望超额收益率。根据这些定义，CAPM 说明了资产的期望超额收益率同市场组合的期望超额收益率成比例，该比例系数为 β。所以以 r_f 为基点，一项特定资产超过基点的期望收益率同市场组合超过基点的期望收益率成比例。

CAPM 公式的另一个表述基于这样的事实：即 β 是资产同市场组合之间协方差的标准化表达。因此 CAPM 说明一项资产的期望超额收益率同此项资产与市场组合之间的协方差成正比。就是这个协方差决定了期望超额收益率。

为了深入了解这个结论，我们考虑一些极端的例子。首先假设一项资产同市场组合完全不相关，即 $\beta = 0$。于是由 CAPM 我们得到 $\bar{r} = r_f$。这个结果一眼看上去会让人比较诧异。它说明即使此项资产风险非常高（σ 很大），其期望收益率等于无风险资产收益率　　没有风险溢价。原因是一项资产如果与市场完全不相关，则它的风险可以完全通过多样化分散掉。如果我们有很多种这样的资产，每项资产同市场及其他资产不相关，我们就可以对每项资产都投入较小的金额，那么得出的总体方差会很小。由于最后的组合收益有很小的方差，相应的期望收益率也就接近于 r_f。

另一个更加极端的例子就是 β 值为负的资产。在这种情况下 $\bar{r} < r_f$，也就是说，即使此项资产有很高的风险（以 σ 来衡量），它的期望收益率也应

该小于无风险利率。原因是这种类型的资产在同市场进行组合时会减少投资组合的总体风险，因此投资者愿意为这种潜在降低风险的能力而接受更低的期望收益率。实际上这种资产相当于提供了一种保险，它们在其他任何资产表现比较差时，表现却很好。

CAPM 将资产风险的概念从 σ 转向 β。总体上，我们仍然认为投资组合的风险以 σ 度量是正确的。但是资产组合的 σ 度量不能转化成单个资产的 σ 关系，从而 σ 就不适用了。合理的度量标准应该是资产的 β 值。

例 7.3（简单计算） 我们来说明一下用 CAPM 公式计算期望收益率是多么简单。令无风险利率 $r_f=8\%$。假设市场组合的收益率期望值是 12%，标准差是 15%。

考虑一项与市场的协方差为 0.045 的资产。于是有 $\beta=0.045/(0.15)^2=2.0$。因此，此项资产的期望收益率是 $\bar{r}=0.08+2\times(0.12-0.08)=0.16=16\%$。

普通股的 β 值

180 在金融行业内，β 值的概念已经被很好地确立起来，在对特定的股票进行技术性讨论时常常提及它。β 值一般由各种各样的金融服务性机构进行估计。通常使用过去一段时间内股票的数据（一般是 6 个月或者 18 个月内的每周数据），进行处理后计算收益的平均值、收益间的乘积以及平方，以获得近似的期望收益、协方差和方差。通常以这种方式计算出来的 β 值随着时间的变化会有一定程度上的漂移，但是除非是公司的基本面上有巨大的变化，否则 β 值一般趋于相对稳定。

表 7—2 列出了某个特定的日期美国的一些知名公司以及相应的贝塔值（β）和波动性（σ）。浏览一下这张表，看看给出的数据同你对公司在市场上
181 的表现的直观印象是否相符。一般来说，我们认为冒险型的公司或高杠杆公司有较高的 β 值，而一些同整体市场的变动相关性不大的保守型的公司的 β

值会比较小；另外，我们也认为相同行业内的公司的β值应该类似，但不相等，如费城 JC 公司和西尔·罗伊巴克公司，或者埃克森公司和加州标准石油公司。

表 7—2　　一些美国公司的β和σ

股票代码	公司名称	β	σ
KO	可口可乐公司	1.19	18%
DIS	迪斯尼公司	2.23	22%
EK	柯达公司	1.43	34%
XON	埃克森公司	0.67	18%
GE	通用电气公司	1.26	15%
GM	通用汽车公司	0.81	19%
GS	吉列公司	1.09	21%
HWP	惠普公司	1.65	21%
HIA	假日饭店公司	2.56	39%
KM	K—马特公司	0.82	20%
LK	洛克希德公司	3.02	43%
MCD	麦当劳公司	1.56	21%
MRK	莫克公司	0.94	20%
MMM	明尼苏达矿业公司	1.00	17%
JCP	费城 JC 公司	1.22	20%
MO	菲利普·莫利斯烟草公司	0.87	21%
PG	普罗克特·盖博公司	0.70	14%
SA	塞福威百货公司	0.72	14%
S	西尔·罗伊巴克公司	1.04	19%
SD	加州标准石油公司	0.85	24%
SYN	辛恩太克斯公司	1.18	31%
TXN	得克萨斯仪器公司	1.46	23%
X	美国钢铁公司	1.03	26%
UNP	联盟太平洋公司	0.65	18%
ZE	天顶无线电公司	2.01	32%

Source: *Dailygraph Stock Option Guide*, William O'Neil & Co. Inc., Los Angeles, December 7, 1979. Reprinted with permission of Daily Graphs, P. O. Box 66919, Los Angeles, CA 90066.

投资组合的 β

利用单项资产的 β 值，我们可以很容易地给出投资组合的总体 β 值。例如，一个投资组合中有 n 项资产，权重分别是 w_1，w_2，…，w_n，则组合的收益率为 $r=\sum_{i=1}^{n}w_i r_i$。于是 $\mathrm{cov}(r,r_M)=\sum_{i=1}^{n}w_i\mathrm{cov}(r_i,r_M)$ 。因此，我们立即可以得出：

$$\beta_p=\sum_{i=1}^{n}w_i\beta_i \tag{7—4}$$

换句话说，投资组合的 β 值是各个单项资产的 β 值的加权平均值，权重与定义投资组合时所使用的权重相同。

7.4 证券市场线

将 CAPM 公式看作是线性关系式后，我们可以在图像上画出 CAPM 这种线性关系。我们称之为**证券市场线（security market line）**。图 7—3 画出了两种情形。

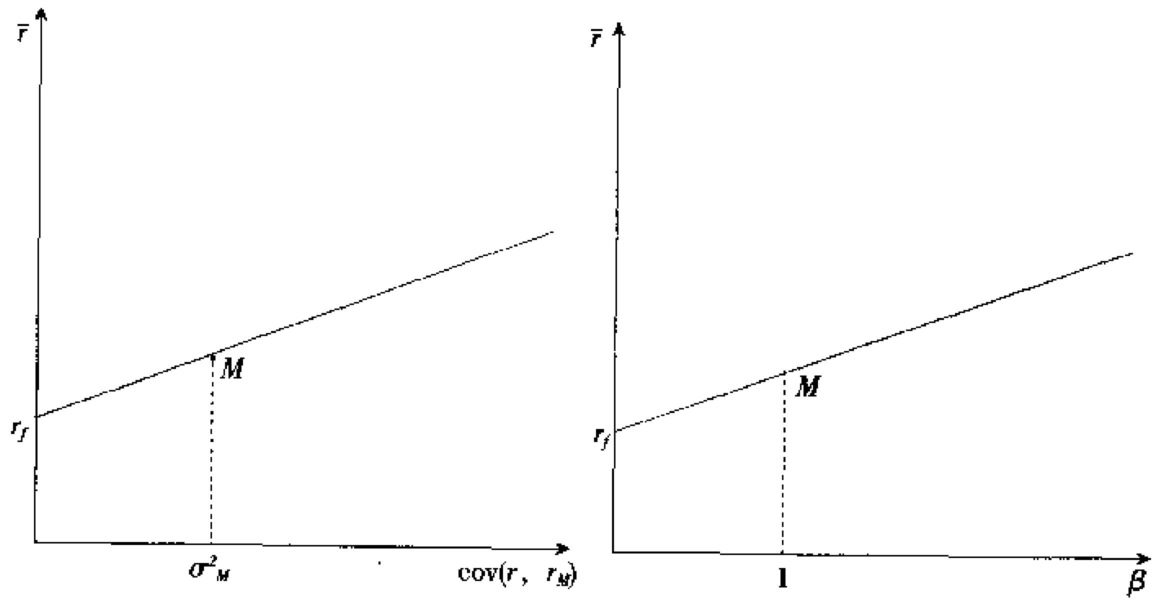


图 7—3 证券市场线

期望收益率随着资产同市场的协方差或 β 值的上升而直线上升。

两个图都表示了 $\bar{r}$ 的线性变化。(a) 图以协方差形式表示，其横轴表示 $\mathrm{cov}(r, r_M)$，市场组合对应于横轴上的 σ_M^2 点。(b) 图以 β 形式表示，其横轴表示 β 值。市场组合对应横轴上的 $\beta=1$ 的点。

两条线都强调了 CAPM 的本质。在均衡假设成立的条件下，所有资产都必须落在证券市场线上。

证券市场线给出了 CAPM 中资产的风险回报结构，着重说明了资产的风险是它与市场的协方差的函数，或者说是 β 的函数。

系统性风险

CAPM 包含了资产收益的一个特殊的结构特性，这个性质进一步解释了为什么 β 值是风险的最重要度量方式。为了推导这个结论，我们将资产 i 的（随机）收益率表示成：

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i \qquad (7-5)$$

此时，这仅仅是任意一个方程。随机变量 ε_i 的加入是为了使方程成立。然而 CAPM 给了我们一些有关 ε_i 的性质。 182

首先对式 (7.5) 取期望值，由 CAPM 说明 $E(\varepsilon_i)=0$，再者求其同 r_M 的相关性（利用 β_i 的定义），我们得出 $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \sigma_M)=0$。于是有：

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_M^2 + \mathrm{var}(\varepsilon_i)$$

因此我们看到 σ_i^2 是两部分之和。前面的部分即 $\beta_i^2\sigma_M^2$ 被称为**系统性风险 (systematic risk)**，这是同整个市场相关联而产生的风险，这种风险不能通过分散化降低，因为任何一项 β 值非零的资产都包含这种风险。而后一部分即 $\mathrm{var}(\varepsilon_i)$，被称为**非系统风险、异质风险或特别风险 (nonsystematic, idiosyncratic, or specific risk)**，这种风险同市场无关，可以通过分散化降低。所以由 β 所度量的系统性风险（不可分散化风险）才是最重要的，因为它直接同其他资产的系统性风险相结合。

考虑资本市场线[1]上有具体 β 值的一项资产，则此项资产的标准差是 $\beta\sigma_M$。它只有系统性风险而没有非系统性风险。期望收益率为 $\bar{r}=r_f+$

$\beta(\bar{r}_M-r_f)$。现在考虑除此项资产外其他的具有相同 β 值的资产。根据 CAPM，这些资产都具有相同的期望收益率 $\bar{r}$。然而如果它们有非系统性风险，就不会落在资本市场线上。实际上随着非系统性风险的增加，在 $\bar{r}-\sigma$ 坐标图上代表这些资产的点总会向右移动，如图 7—4 所示。因此图中任一点到资本市场线的水平距离就是衡量非系统性风险的一种方式。

183

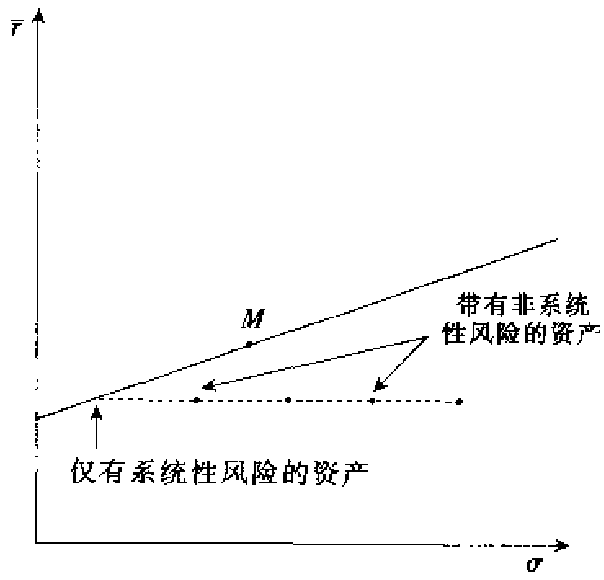


图 7—4　系统性风险和非系统性风险

资本市场线上的资产只有系统风险，而有非系统性风险的资产会落在资本市场线的右边。

7.5　投资含义

投资者感兴趣的问题是：CAPM 对投资者决策有什么样的帮助？对于这个问题，没有一个简单的答案。

基于均衡理论，CAPM 认为（假设）马克维茨问题的解是市场组合为任一投资者所需持有的风险资产单基金（也是惟一的基金）。这个基金只需由无风险资产作为补充。根据这个结论提出的投资建议是投资者只需购买市场组合。也就是说，投资者应投资于所有可获得的资产，每项资产都

购入一小部分，购入的比例由整个市场中的各项资产的相对数额决定。如果以全部的权益证券作为可获资产的集合，投资者应购入每只可获得的股票相应的股份，权重由每只股票在总体流通股票的货币价值中的比重决定。没有必要去花很大的功夫分析个别问题和计算马克维茨解，只需购入市场组合。

由于对于个人来讲自行进行市场组合实在比较麻烦，所以同市场组合比较接近的共同基金就被设计出来。这些基金被称为**指数基金**（**index funds**），因为它们总是试图复制一些构成主要的股票市场指数的投资组合，如标准普尔 500（S&P500），将 500 种股票的平均组合作为市场组合的替代资产。另外还有一些指数使用更大数量的股票。一个纯 CAPM 主义者（即在运用公开交易的证券时完全认同 CAPM 理论的人）只需购买这些指数基金的一只（作为单基金）再加上一些无风险证券如美国国库短期债券等。

一些人认为他们会比盲目地购买市场组合做得更好。毕竟 CAPM 假设了每个人对资产（不确定的）收益有相同的信息。显而易见，情况并不是这样的。如果有人认为他或她有信息优势，那么这个人就可能构建一个表现超出市场的投资组合。我们在下一章继续讨论这个问题，在那里我们提出了一 184
些有关数据和信息的问题。可以证明要获得用于马克维茨问题的精确数据一点也不容易。因此由这个模型算出的解在一定程度上可能不准确合理。但是现在我们认识到，最优设计看起来只是与 CAPM 模型的基本思想有所偏离，或者是 CAPM 模型基本思想的推广，而不是一个大胆的开创。换句话说，构建一个投资组合时，投资者须从市场组合出发，并系统地进行调整，而不是试图从头开始来求解马克维茨问题。

CAPM 方法直接运用的一个领域是用以分析那些还不具备稳定合理的市场价格的资产。CAPM 可以为这种资产找到一个合理的价格。这种类型的重要问题是公司的项目评估问题（资本预算问题的变化）。在 7.8 节我们会详细地考虑这种运用。

7.6 绩效评估

CAPM理论可以用来评估投资组合的绩效，实际上使用CAPM的理论结构评价许多机构投资组合的绩效（比如养老基金，共同基金等）已经成为惯例。我们通过一个假想的例子来体现我们的主要思想。然而在这一节，我们的主要目的是用这些衡量绩效的思想来说明CAPM。

例7.4（ABC基金分析） 表7—3列出了ABC基金10年以来的收益率状况。我们用均值—方差组合理论和CAPM来评估这些基金的绩效。它是我们可以推荐的好基金吗？它可以作为一个精明的均值—方差投资者的基金吗？

表7—3　　ABC基金的绩效

年	回报百分率		
	ABC	标准普尔	国库券
1	14	12	7
2	10	7	7.5
3	19	20	7.7
4	−8	−2	7.5
5	23	12	8.5
6	28	23	8
7	20	17	7.3
8	14	20	7
9	−9	−5	7.5
10	19	16	8
平均值	13	12	7.6
标准差	12.4	9.4	0.5
几何均值	12.3	11.6	7.6

续前表

年	回报百分率		
	ABC	标准普尔	国库券
协方差（ABC，S&P）	0.010 7		
β	1.203 75	1	
詹森指数	0.001 04	0.000 00	
夏普指数	0.435 77	0.466 69	

该表的上方显示了在 10 年内 ABC 基金、S&P500、1 年期国库债券达到的收益率。表的下方显示了詹森（Jensen）指数和夏普（Sharp）指数。

第一步：分析的开始，我们要计算列于表 7—3 给定的收益率的下方的三个统计量：平均收益率、由 10 个样本隐含的收益率标准差和几何平均收益率。这些量由我们可获得的数据进行估计得到。

一般地，给定 r_i，$i=1, 2, \cdots, n$，平均收益率是：

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$$

它可以作为实际的期望收益率的估计，平均方差是[2]：

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2$$

同样，标准差的估计量 s 是上式的平方根。计算出收益率的几何平均值同样 185
很有用，其计算方法如下：

$$\mu = [(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)]^{1/n} - 1$$

它衡量考虑复利情况下，n 年内的实际收益率。一般地，这个值会稍微低于平均收益率。

第二步：接着我们需要 10 年内市场组合和无风险收益率的数据。这里我们分别使用标准普尔 500 种股票平均指数和 1 年期国库短期债券利率。如表 7—3 所示，我们利用与第一步相同的方法来计算平均收益率和标准差。同时我们利用下式算出 ABC 基金和标准普尔 500 种股票的协方差的估计值：

$$\text{cov}(r,r_M)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i-\hat{\bar{r}})(r_M-\hat{\bar{r}}_M)$$

然后使用规范的公式计算 β：

$$\beta=\frac{\text{cov}(r,r_M)}{\text{var}(r_M)}$$

这就为我们接下来的有趣的分析提供了足够的信息。

186

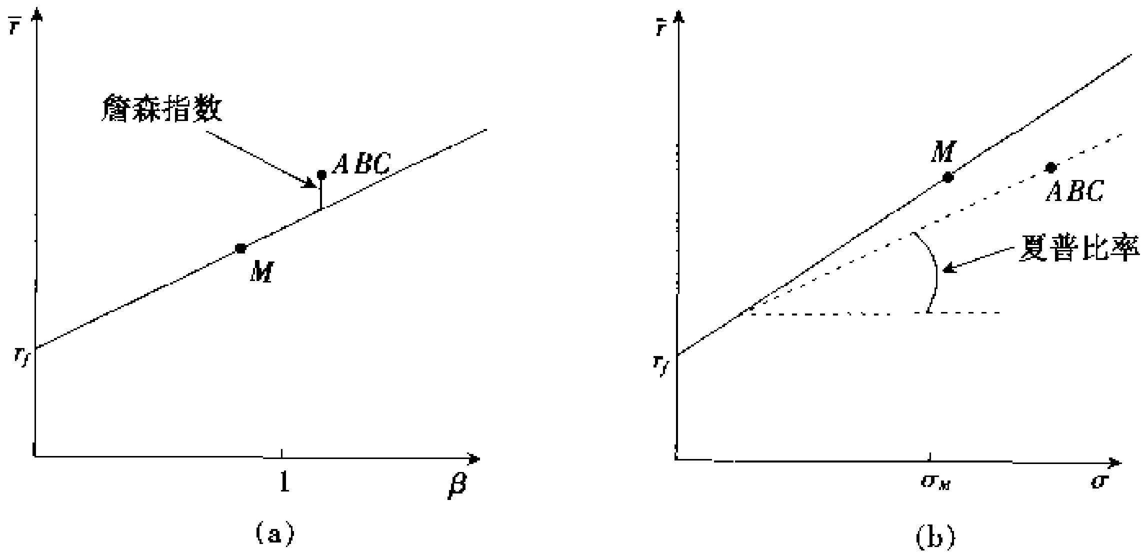


图 7—5 ABC 的绩效指数

詹森指数用以衡量高出证券市场线的部分，而夏普比率用以衡量 $\bar{r}$—σ 平面所示的角。

第三步：（詹森指数）我们使用公式

$$\hat{\bar{r}}-r_f=J+\beta\ (\hat{\bar{r}}_M-r_f)$$

除了平均收益率代替期望收益率（因为这是我们所能做的最佳选择），并加上了误差项 J。这里 J 代表**詹森指数（Jensen's index）**，这同 CAPM 定价公式（7—2）比较类似。

根据 CAPM，在我们使用真实期望收益率时，J 值为 0。因此 J 值可以近似地衡量 ABC 基金的表现在多大程度上偏离了理论上的零值。J 值为正时，可以推测出 ABC 基金优于 CAPM 的预测（当然，用有限的数据来估计那些重要的量，因此这些量是近似值）。

詹森指数可以在证券市场线上表示出来，如图 7—5（a）所示。对于

ABC 基金，我们得出 $J>0$，因此我们认为 ABC 是一只优秀的基金。这真的是一个正确的推论吗？

除去运用短期历史数据进行估计时所固有的一些问题外，我们也不能完全保证 ABC 基金是一只优秀的共同基金这个推论正确。也不知道它是否可以作为有效投资组合中所使用的风险资产基金。虽然 $J>0$ 的事实是令人满意的，也能告诉我们 ABC 是一项不错的资产，但并不能说单独的 ABC 基金是有效的。[3]

第四步：（夏普指数）为了衡量 ABC 的有效性，我们必须看其所在的点与资本市场线的相对位置。因为只有在资本市场线上的组合才是有效的。利用下述公式，我们可以衡量资产的有效性： 187

$$\hat{\bar{r}}-r_f=S\sigma$$

其中 S 值是在 $\bar{r}-\sigma$ 图像中无风险资产点同 ABC 点连线的斜率。S 代表**夏普指数**（Sharpe index）。我们算出 ABC 的夏普指数 $S=0.435\ 77$。这必须同相应的市场 S 值比较——在这里用标准普尔 500 来代表。我们可以计算出标准普尔 500 的夏普指数 $S=0.466\ 69$。该情形如图 7—5（b）所示。至少从可获取的数据来看，ABC 显然并不是有效的。

我们得出的结论是 ABC 可能值得保留在组合中，但它本身并非十分有效，所以有必要在此基金中补充其他的资产或基金以促使其有效。或者，为了获得有效性，投资者可以放弃购买 ABC 而选择一个包含的资产更加广泛的基金。

7.7　作为定价公式的资本资产定价模型

CAPM 是一个**定价模型**（**pricing model**）。然而，标准的 CAPM 公式中却没有明确的价格变量　　只有期望收益率。为了理解 CAPM 为什么被称为定价模型，我们必须回顾一下收益的定义。

假设购买一项资产时的价格是 P，并在一段时间后以价格 Q 卖出。因此收益率是 $r=(Q-P)/P$，这里 P 是已知的而 Q 是随机变量。将此式代入 CAPM 公式，可得到：

$$\frac{\bar{Q}-P}{P}=r_f+\beta(\bar{r}_M-r_f)$$

解出 P 我们可得：

$$P=\frac{\bar{Q}}{1+r_f+\beta(\bar{r}_M-r_f)}$$

这是根据 CAPM 给出的资产价格。我们要特别注意这个重要的结论：

⇒***资本资产定价模型的定价形式（pricing form of the CAPM）*** *回报为 Q 的资产的价格为：*

$$P=\frac{\bar{Q}}{1+r_f+\beta(\bar{r}_M-r_f)} \tag{7—6}$$

其中 β 是资产的 β 值。

这个定价公式在形式上可以由确定性情况下一般的贴现公式推导出来。在确定性情形下，我们可以用利率 r_f 对未来收入进行贴现，贴现因子为
188 $1/(1+r_f)$。而在随机的情形中，合理的贴现利率是 $r_f+\beta(\bar{r}_M-r_f)$，这可以被认为是根据风险调整后的利率。

例 7.5（价格是正确的） 杰文·琼斯数学比较好，但是他的朋友说他并非总是能明白问题的全貌。现在，杰文正在考虑投资于一只共同基金。这只基金他用资金的 10%以 7%的无风险收益率进行基金投资，剩下的 90%用于购买一个接近于市场组合的分散化程度很高的投资组合，期望收益率为 15%。每份共同基金代表了价值 100 美元的基金资产。用刚刚学过的 CAPM，杰文想知道，购买这样的一份基金需要花费多少钱。

杰文计算出基金的 β 值是 0.9。一年以后一份基金的期望价值是 10×

$1.07+90\times1.15=114.20$。因此，根据式（7—6）有：

$$P=\frac{114.20}{1.07+0.90\times0.08}=100\text{ 美元}$$

因此一份基金的价格应等于它所代表的价值。所以杰文放心了（但是他怀疑可以通过更加简单的方法算出来）。

例 7.6（石油风险投资） 再次考虑例 7.2 中的问题，投资于一个油井开采项目的股份会产生随机的收益，因为钻探点是否有石油存在不确定性，而未来的石油价格也存在不确定性。期望的收益是1 000美元，收益的标准差相对较高，是 40%。资产 β 值为 0.6，它相对较低，是因为虽然由石油价格引起的收益不确定性同市场组合相关，但是由于勘探所产生的收益风险同市场组合不相关。无风险利率是 $r_f=10\%$，市场组合的期望收益率是 0.17。由 CAPM 得出的石油风险投资股份的价格是多少？（原例中所提及的卖价是 875 美元）。我们马上就得到：

$$P=\frac{1\,000\text{ 美元}}{1.10+0.6\ (0.17-0.10)}=876\text{ 美元}$$

并且计算中并没有用到 σ。

从传统意义上讲，由于此项风险投资的收益具有一个很高的标准差，因此风险很高。但是，尽管如此，较低的 β 值使得它的价格是公正的。

线性定价与确定性等价形式

我们现在论述定价公式的一个很重要的性质——它是**线性的（linear）**。这意味着两项资产和的价格是它们价格的和，一项资产的倍数的价格是资产价格的相同倍数。这实在很令人惊讶，因为公式看起来并非线性的（至少对 189
于代数和来说）。比如说，如果

$$P_1=\frac{\overline{Q}_1}{1+r_f+\beta_1\ (\overline{r}_M-r_f)},\quad P_2=\frac{\overline{Q}_2}{1+r_f+\beta_2\ (\overline{r}_M-r_f)}$$

并不能明显地看出：

$$P_1+P_2=\frac{\overline{Q}_1+\overline{Q}_2}{1+r_f+\beta_{1-2}\ (\overline{r}_M-r_f)}$$

其中 β_{1-2}是新资产的 β 值，而新资产是资产 1 和 2 的和。此外，我们知道两项资产之间的协方差在如何进行资产组合时作用很大，因此定价公式的线性性看起来不大合理。我们可以很容易地将公式转化成另一种线性的形式来消除第一种疑虑，然后我们再讨论结论背后的直观意义。

CAPM 定价公式可以转化为一个能明显地表示出其线性的形式，我们称之为**确定性等价形式（certainty equivalent form）**。假设我们有一项价格为 P，期末价值为 Q 的资产。其中 P 仍然是已知的，Q 是不确定的。由 $r=Q/P-1$，可得 β 值为：

$$\beta=\frac{\mathrm{cov}[(Q/P-1),r_M]}{\sigma_M^2}$$

这等价于：

$$\beta=\frac{\mathrm{cov}(Q,r_M)}{P\sigma_M^2}$$

将此式子代入定价公式（7—6），并在等式两边除以 P，可得：

$$1=\frac{\overline{Q}}{P(1+r_f)+\mathrm{cov}(Q,r_M)(\overline{r}_M-r_f)/\sigma_M^2}$$

最后，解出 P，我们可得下面的公式：

⇒***确定性等价定价公式（certainty equivalent pricing formula）*** *一项回报为 Q 的资产价格 P 为：*

$$P=\frac{1}{1+r_f}\left[\overline{Q}-\frac{\mathrm{cov}(Q,r_M)(\overline{r}_M-r_f)}{\sigma_M^2}\right] \qquad (7-7)$$

括号中的表达式被称为 Q 的**确定性等价（certainty equivalent）**。这个值可以被视为确定性的金额，因此可应用一般的贴现因子 $1/(1+r_f)$ 计算价格 P。确定性等价形式很明白地告诉我们定价公式是线性的，因为括号中的

两项对 Q 都是线性的。

线性关系的原因可以追溯到无套利原则：如果两项资产和的价格不等于单项资产的价格之和，就有可能从中套利。比如说，如果组合资产的价格低于单项资产价格之和，我们可以购入资产的组合（以低价购买）再卖出单项资产（以高价售出），从中可以获利。大批量地进行这种操作，就可以获得很高的利润。如果情况相反的话——组合资产的价格高于单项资产价格之和——我们可以分别购买单项资产并卖出资产组合，从中我们也可以获得套利收益。当且仅当资产定价是线性时，这样的套利机会才不存在。因此定价的线性性是财务理论的基本原则（在完全市场的条件下），我们在书中会经常提及这一原则。 190

例 7.7（杰文再次进行定价） 杰文·琼斯决定用定价等式的确定性等价形式来计算例 7.5 所考虑的共同基金股份价格。在此例中他注意到 $\text{cov}(Q, r_M)=90\sigma_M^2$，其中 Q 是1年后基金的价值。于是：

$$P=\frac{114.20-90\times 0.08}{1.07}=100\text{ 美元}$$

根据他的数学知识，再次说明一切都是正确的。

7.8 项目选择*

一个公司可以运用 CAPM 作为基准来决定应该实施哪些项目。举个例子，假如说，一个潜在的项目，需要初始支出为 P，并且在1年后产生的净收入为 Q。一般地，P 是已知的而 Q 是随机的，期望值是 $\overline{Q}$。很自然，我们可以用下面的公式来表示这个项目的净现值（NPV）：

$$NPV=-P+\frac{1}{1+r_f}\left[\overline{Q}-\frac{\text{cov}\ (Q,\ r_M)\ (\overline{r}_M-r_f)}{\sigma_M^2}\right] \qquad (7\text{-}8)$$

这个公式由 CAPM 的确定性等价形式推出：式中第一项（负值）是初始的支出，第二项是期末收入的确定性等价。

这个公司有许多不同的项目，并将从中选出一些项目进行投资。那么该公司在做出选择时应该运用什么样的准则呢？在我们学过的确定性情况下，公司选择能最大化 NPV 的项目组进行投资是合理的。实际上，这是给所有公司的一般化的建议。

潜在的投资者会怎样看待这个问题呢？对于投资者来讲，一个特定的公司只是他们可能选择进行投资的一整组公司中的一个。他们关心投资组合的整体绩效，只是偶然地关注一下特定的公司的内部决策。如果投资者以均值—方差准则为基础，他们希望单个公司按均值—方差准则经营，使得总体资产的有效边界尽可能地往上往左移。这会改进有效边界，从而改进均值—方差有效投资组合的绩效。因此潜在的投资者会敦促公司管理层选择可以使有效边界尽可能往外移动的项目，然后他们再投资于有效的投资组合。要做
191 到这一点，就必须考虑到所有其他公司的项目选择，因为互相作用产生的综合的影响才能决定任何一个公司的有效边界。

两条标准——净现值和有效边界的最大化扩展——看起来好像是互相冲突的。NPV 标准只是注重公司本身，而有效边界标准却注重公司间的关联影响。但是实际上却没有冲突，这两条标准本质上是等价的，这可以由下面的一致性定理表达出来。

⇒**一致性定理（harmony theorem）** *如果一个公司没有最大化 NPV，那么有效边界就可以继续扩展。*

证明： 假设公司 i 计划通过一定的经营方式使得净现值为 Δ，但是 Δ 并不是可以获得的最大净现值。项目的初始成本是 P_i^0。投资者付出 $P_i = P_i^0 + \Delta$，并计划得到回报 Q_i，收益率是 $r_i = (Q_i - P_i)/P_i$。我们假定公司 i 在风险资产的市场组合中所占的权重很小，并且项目有正的初始支出。

现在的收益率 r_i 满足 CAPM 关系：

$$\bar{r}_i - r_f = \beta_i(\bar{r}_M - r_f)$$

我们在前面已经提及上面的式子同下式等价：

$$0 = -P_i + \frac{\bar{Q} - \mathrm{cov}(Q, r_M)(\bar{r}_M - r_f)/\sigma_M^2}{1 + r_f}$$

因此，从投资者的观点来看，现在的净现值为 0。

假设，现在公司能投资于一个支出为 $P_i^{0'}$ 回报为 Q'_i 的项目，使得现值增加。投资者支付 Δ 购买公司，并且支付经营成本 $P_i^{0'}$。总的 $P'_i = P_i^{0'} + \Delta$ 满足：

$$-P'_i + \frac{\bar{Q}'_i - \mathrm{cov}(Q'_i, r_M)(\bar{r}_M - r_f)/\sigma_M^2}{1 + r_f} > 0$$

由于 $P'_i > 0$，这就意味着：

$$r'_i - r_f - \mathrm{cov}(r'_i, r_M)(\bar{r}_M - r_f)/\sigma_M^2 > 0$$

现在考虑收益率为 $r_\alpha = r_M + \alpha r'_i - \alpha r_i$ 的投资组合，其中 α 是公司 i 在市场组合中的初始权重。这个组合相当于放弃了旧的公司项目并代之以相同权重的新项目。

我们想说明这个组合等于旧的有效边界。为了证明这点我们计算：

$$\tan\theta_\alpha = \frac{\bar{r}_\alpha - r_f}{\sigma_\alpha}$$

其中 $\alpha > 0$ 且比较小。对 α 求导可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}\tan\theta_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{\sigma_\alpha}\frac{\mathrm{d}\bar{r}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} - \frac{\bar{r}_\alpha - r_f}{\sigma_\alpha^2}\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}$$

由于 192

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{r}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \bar{r}_i{}' - \bar{r}_i$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_{M'} - \sigma_M}{\sigma_M}$$

我们可得：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tan\theta_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}=\frac{\bar{r}_i{}'-\bar{r}_i}{\sigma_M}-\frac{\bar{r}_M-r_f}{\sigma_M^2}\frac{\sigma_{M'}-\sigma_M}{\sigma_M}$$

$$=\frac{1}{\sigma_M}[\bar{r}_i{}'-\beta'_i(\bar{r}_M-r_f)]-\frac{1}{\sigma_M}[\bar{r}_i-\beta_i(\bar{r}_M-r_f)]>0$$

最后的式子大于 0 是因为第一个括号里的项为正而第二个括号里的项为零。因为 α 是比较小的正数，就有 $\tan\theta_\alpha>\tan\theta_0$。因此有效边界与初始的相比有所扩展。

7.9 小结

如果所有人都运用均值—方差方法进行投资，而且对资产的期望收益、方差和协方差都有相同的估计，那么每个人必然都投资于同样的风险资产基金 F 和无风险资产。因为 F 对任何人都一样，从而可以得出，在均衡状态下，F 必然相当于市场组合 M——每项资产的权重由其资本总量在总体市场资本中所占的比例决定。这个结论是资本资产定价模型（CAPM）的基点。

如果市场组合 M 是风险资产的有效组合，那么就可以推出：在 $\bar{r}-\sigma$ 图中的有效边界是一条起始于无风险资产点并经过 M 点的直线。这条直线被称为资本市场线。它的斜率被称为风险的市场价格。任一有效投资组合都必然落在这条直线上。

由市场组合位于与资本市场线相切的可行区域的边界上这一条件，我们可以直接推出 CAPM，换句话说，CAPM 用数学形式来表达这一相切条件。CAPM 最后得出的结论是任一资产的期望收益率满足：

$$\bar{r}_i-r_f=\beta_i(\bar{r}_M-r_f)$$

其中 $\beta_i=\mathrm{cov}(r_i,\ r_M)\ /\sigma_M^2$ 是资产的贝塔值。

CAPM 在图像上可以表示成证券市场线：资产的期望收益率是其 β 值

（或者可以说是它与市场的协方差）的线性函数；β 值越大，期望收益率就越高。实际上，CAPM 认为资产的风险应完全由其 β 值来描述。比如，如果某项资产与市场不相关（$\beta=0$），那么它的期望收益率将等于无风险利率。

市场组合的 β 值被定义为 1。其他股票的 β 取值不同。但是美国的大部分股票的 β 取值在 0.5 到 2.5 之间。股票投资组合的 β 值等于组成投资组合 193
的单项资产的 β 值的加权平均值。

CAPM 的一个应用是评估共同基金的绩效。詹森指数用以衡量一只基金的历史表现与证券市场线的偏离程度（然而，这种度量方法在运用于由公开交易股票所构成的基金时是不可靠的）。夏普指数用以衡量在 $\bar{r}-\sigma$ 图像上连接基金与无风险资产的连线的斜率，因此这个斜率可以同风险的市场价格相比较。

CAPM 可以被转换为一个明确的资产定价公式。形式最简单的公式表明资产价格是由期望收益贴现而得的，但是贴现率必须是 $r_f+\beta(\bar{r}_M-r_f)$，其中 β 是资产的贝塔值。另一种表达形式是将价格看作由收益的确定性等价贴现而得，而且这一表达形式中贴现率是无风险利率 r_f。

认识 CAPM 定价公式的线性关系是非常重要的，因为线性关系意味着资产之和的价格等于它们价格的和，而资产倍数的价格等于资产价格的相同的倍数。CAPM 的确定性等价形式清晰地展现了这一线性特征。

CAPM 可以被用于评估公司内的单期项目投资。公司管理层必须最大化公司的净现值，这可以用 CAPM 的定价形式进行计算。公司的这项举措将给现在的所有者带来最大的财富，并且使得所有均值—方差型投资者的有效边界扩展到最大。

练习

1.（资本市场线）假设市场组合的期望收益率是 23%，并且短期国库

券的收益率（无风险利率）是 7%。而市场的标准差是 32%。假定市场组合有效。

（a）求资本市场线。

（b）（i）如果希望得到 39%的期望收益，那么这个条件下的标准差是多少？（ii）如果用1 000美元进行投资，你应该怎样分配资金以使得超过（i）中的期望收益？

（c）如果你投资 300 美元于无风险资产，700 美元于市场组合，你预期年末能得到多少钱？

2.（一个小世界）假设一个只有两项风险资产 A 和 B 和无风险资产 F 的世界。市场上两项风险资产的供给相同，也就是说 $M=\frac{1}{2}(A+B)$。已知信息有：$r_F=0.10$、$\sigma_A^2=0.04$、$\sigma_{AB}=0.01$、$\sigma_B^2=0.02$ 和 $\bar{r}_M=0.18$

（a）给出 σ_M^2，β_A 和 β_B 的一般表达式（不代入数据）。

（b）根据 CAPM，计算 $\bar{r}_A$ 和 $\bar{r}_B$ 的数值。

3.（收益的边界）考虑一个只有三项证券的世界。其期望收益率分别是
194 10%，20%和 10%。已知两个组合落于最小方差集上。它们分别由下面的权重定义：

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}0.60\\0.20\\0.20\end{bmatrix}\qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}0.80\\-0.20\\0.40\end{bmatrix}$$

我们还知道市场组合是有效的。

（a）给定上述信息，市场组合的期望收益率可取得的最大和最小值是多少？

（b）假设已知 w 是最小方差组合，（a）的结果会有变化吗？

4.（CAPM 的快速推导）用第 6 章中的等式（6—9）推出 CAPM 中 $\bar{r}_k-r_f$ 的表达式。（提示：注意到 $\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ki}w_i=\text{cov}(r_k,r_M)$。）对资产 k 和市

场组合同时运用（6—9）等式。

5.（不相关的资产）假设有 n 种互不相关的资产，第 i 种资产收益的方差为 σ_i^2。期望收益在这里没有给出。资产 i 在市场中的总额为 X_i。令 $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$，然后取 $x_i=X_i/T(i=1, 2, \cdots, n)$，从而市场组合的标准化形式是 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。假定无风险资产存在且收益率为 r_f。用 x_i 和 $\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 表示 β_j。

6.（简单的世界）在简单的世界中只有两只有风险的股票——A 和 B，表 7—4 中列出了具体信息。

表 7—4　　股票 A 和 B 的具体信息

	发行在外的股票	每股价格	期望收益率	收益率的标准差
股票 A	100	1.50 美元	15%	15%
股票 B	150	2.00 美元	12%	9%

另外，A 与 B 的收益之间的相关系数 $\rho_{AB}=\frac{1}{3}$，存在无风险资产，而且简单的世界中 CAPM 完全成立。

(a) 市场组合的期望收益率是多少？

(b) 市场组合的标准差是多少？

(c) 股票 A 的贝塔值是多少？

(d) 简单的世界中无风险利率是多少？

7.（零贝塔资产）令 w_0 为代表可行区域中最小方差点的资产组合（权重）。令 w_1 为有效边界上任一除 w_0 外的资产组合。定义相应的收益率 r_0 和 r_1。

(a) 求 A 使公式 $\sigma_{01}=A\sigma_0^2$ 成立。（提示：考虑投资组合 $(1-\alpha)\ w_0+\alpha w_1$ 并且考虑 $\alpha=0$ 附近这些组合的方差的微小变化。） 195

(b) 对应于 w_1 存在最小方差集上的投资组合 w_z 关于 w_1 的 β 值为 0，即 $\sigma_{1z}=0$。这个组合可以表示为 $w_z=(1-\alpha)\ w_0+\alpha w_1$，求 α 的正确值。

(c) 证明可行集图像中表示 3 个投资组合的关系。

(d) 如果不存在无风险资产，那么其他的资产可以用下式进行定价：

$$\bar{r}_i-\bar{r}_z=\beta_{iM}(\bar{r}_M-\bar{r}_z)$$

其中下标 M 代表市场组合，$\bar{r}_z$ 是与市场组合间的 β 值为 0 的投资组合的期望收益率。假设市场期望收益率和零贝塔资产组合期望收益率分别为 15% 和 9%。假设股票 i 同市场的相关系数为 0.5，并假设市场收益率和股票 i 的收益率的标准差分别为 15% 和 5%，求股票 i 的期望收益率。

8. (奇才◇) 电子奇才公司 (EWI) 有一个生产电视机的新主意，并且打算进入开发阶段。只要产品被开发出来（将在 1 年后），公司希望能以价格 p 出售新的生产工序，p 的期望值 $\bar{p}=2\ 400$ 万美元。然而，出售价格依赖于当时的电视机价格。通过考察不同电视机公司的股票历史纪录，我们得出最后的出售价格同市场收益相关，且 $E[(p-\bar{p})(r_M-\bar{r}_M)]=\sigma_M^2\cdot 2\ 000$ 万美元。

为了开发这套工序，EWI 必须投资于一个研发项目。项目成本 C 在项目开始后不久就会知道（技术上的不确定性被解决后）。现在的估计是成本可能是 $c=2\ 000$ 万美元，或 1 600 万美元，且等可能发生（这个不确定性同最后的价格不相关，同市场不相关）。假设无风险利率是 $r_f=9\%$，市场期望收益率为 $\bar{r}_M=33\%$。

(a) 此项目的期望收益率是多少？

(b) 此项目的贝塔值是多少？（提示：在此案例中，注意

$$E\left[\left(\frac{p-\bar{p}}{c}\right)(r_M-\bar{r}_M)\right]=E\left(\frac{1}{c}\right)E[(p-\bar{p})(r_M-\bar{r}_M)]。)$$

(c) 以 CAPM 为判断标准，这个项目可以接受吗？特别地，同 CAPM 预测的收益率相比，项目的超额收益率（+或者−）是多少？

9. (杰文的问题) 证明杰文·琼斯在例 7.5 和 7.7 中得到的结果并非偶然。特别地，对于收益率为 $\alpha r_f(1-\alpha)\ r_M$ 的基金，证明利用两个 CAPM 定价公式对价值为 100 美元的基金资产所定出的价格都为 100 美元。

【注释】

[1] 当然，要是刚好落在线上，此项资产一定是市场组合和无风险资产的组合。

[2] 下一章我们会解释为什么分母是（$n-1$）而不是 n。

[3] 我们可以认为詹森指数并没有告诉我们任何有关基金的事情，它只是作为 CAPM 模型准确性的一个度量。如果 CAPM 是正确的，那么每只证券（基金）都必须完全满足 CAPM 公式，因为在市场组合有效的条件下得出的公式是一致的。如果我们发现某只证券的詹森指数非零，就表示市场组合并非有效。CAPM 公式经常用于那些没有在市场上交易，所以也没有成为市场组合的一部分的（新的）金融工具或者项目。在这种情况下，詹森指数可以作为一个很有用的度量值。

【参考文献】

在书目文献［1～4］中，CAPM 理论都被独立地推导了出来。现在，对这个理论有很多的扩展和教材性的叙述。参考第 2 章书目中所列出的任何一本财务方面的基础教材。在文献［5～6］中提及了 CAPM 理论在评价共同基金绩效时的应用。另一个并没有在文章中讨论到的评估方法，见特雷纳（Treynor）所著的文献［7］。对于 CAPM 应用于公司的分析概要，见文献 196
［8～9］。运用零贝塔资产的思想，如练习 7，见布莱克（Black）所著的文献［10］。

1. Sharp, W. F. (1964), "Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, 19, 425—442.
2. Lintner, J. (1965), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics*, 47, 13—37.
3. Mossin, J. (1966), "Equilibrium in a Capital Asset Market," *Econometrica*, 34, no. 4, 768—783.

4. Treynor, J. L. (1961), "Towards a Theory of Market Value of Risk Assets," unpublished manuscript.

5. Sharpe, W. F. (1966), "Mutual Fund Performance." *Journal of Business*, 39, January, 119—138.

6. Jensen, M. C. (1969), "Risk, the Pricing of Capital Assets, and the Evaluation of Investment Portfolios," *Journal of Business*, 42, April, 167—247.

7. Treynor, J. L. (1965), "How to Rate Management Investment Funds," *Harvard Business Review*, 43, January—February, 63—75.

8. Rubinstein, M. E. (1973), "A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory," *Journal of Finance*, 28, 167—182.

9. Fama, E. F. (1977), "Risk-Adjusted Discount Rates and Capital Budg-

第8章 模型和数据

8.1 引言

前面两章的理论很通用，它可以运用于财富轮盘的投注，分析“野猫”油井投资，股票组合的构建和其他很多单期投资问题。然而，均值—方差理论主要是运用于股票，本章主要关注这些特殊的证券，尽管这些理论同样适用于其他资产。 197

在将均值一方差理论运用于股票时的主要障碍就是要确定该理论所要求的参数值：

每种资产的均值以及它们之间的协方差。股票和其他金融证券的参数值并不是现成的，也不能像财富轮盘那样可以用逻辑推导，因为财富轮盘的各种所得及其概率是很明晰的。而对于股票和其他金融证券，我们就必须用一些间接和微妙的方法来获得均值一方差公式所要求的信息。

本章考察如何阐明适合用均值一方差分析的那些股票收益模型。说明了如何建立收益过程的**因素模型（factor model）**来简化结构和减少必要的参数量。按这种方法，可得到一种新的资产定价模型，叫做**套利定价模型（arbitrage pricing theory，APT）**。之后直接转到确定参数值的问题。我们考虑利用历史数据确定参数值的可能性，但是会发现这种方法的价值极为有限。

我们发现应用均值一方差理论和CAPM设计股票组合并不简单，这有很多实际的和概念性的困难。明白了这些困难并提出对策来消除这些困难是投资科学里的基本内容。

8.2 因素模型

198 均值一方差方法所要求的信息随着资产数目 n 的增加而快速上升。有 n 个均值，n 个方差，$n(n-1)/2$ 个协方差——一共是 $2n+n(n-1)/2$ 个参数。当 n 很大时，这些必要值的集合就很大。例如，我们考虑1 000种股票，就要求501 500个值来充分阐明均值一方差模型。显然，要直接获取这些信息是一个让人畏惧的任务。我们需要一种简化方法。

幸好 n 种资产的收益显示出的随机性通常可以归因于影响这些单个收益的数目更少的基本随机来源（因素）。一个表示这些因素和各种收益之间关系的因素模型可推出一个协方差矩阵的简化结构，并使我们深入了解这些资产间的关系。

必须谨慎地选择解释随机性的因素——正确的选择依赖于考虑的资产整体。对一个城市的房地产业，基本因素可能就是人口、就业率、教育预算。

对交易所上市的普通股，这些因素可能就是股市平均指数、GNP、就业率，等等。选择因素的过程在某种程度上是一种艺术，或者试错过程。尽管说严谨的分析方法也很有用（见练习3）。

本节介绍因素模型的概念并说明它如何简化了协方差结构。

单因素模型

单因素模型是最简单的因素模型，但是这种模型可以很好地解释概念。假设有 n 种资产，标为 i，收益率为 r_i，$i=1, 2, \cdots, n$。只有单一的因素 f，它是随机变量（比如该期的股市平均收益率）。我们假设该因素与收益率通过下面的方程式联系起来：

$$r_i = a_i + b_i f + e_i \tag{8—1}$$

$i=1, 2, \cdots, n$。在这个方程中，a_i 和 b_i 是固定的常量。e_i 是表示**误差（errors）**的随机变量。为不失一般性，可以假设每个误差的均值为0，即 $E(e_i)=0$，因为所有的非0均值都可以转移到 a_i 项。另外，通常假设误差与 f 不相关，并且误差之间也不相关，即对每个 i 都有 $E[(f-\bar{f})e_i]=0$ 和 $E(e_i e_j)=0(i\neq j)$。这种理想化的假设通常在事实上是不成立的，但是为了便于分析，通常假设它成立。同样还假设 e_i 的方差已知，用 $\sigma_{e_i}^2$ 表示。

从图像上，因素模型方程可以看作对（可能的）数据的线性拟合，如图8—1所示。假设对收益率 r_i 和因素 f 作了几次相互独立的观测，将这些点描在图上。既然 r_i 和 f 都是随机变量，这些点就很有可能是分散的。以每个点到该 199
直线的垂直距离作为误差，而误差的平均值为0，通过这些点拟合出一条直线。

用两种方法来看待图8—1是很有帮助的。第一种，已知模型（8—1），我们可以在获得数据点之前在图上画出直线。因此，如果我们信任模型，相信数据点将按图中显示的方式落在图上。第二种方法，我们假设首先得到数据点，然后画出拟合数据的直线。然而，当画直线的时候，我们暗示其他的数据以同样的模式落在图形上。

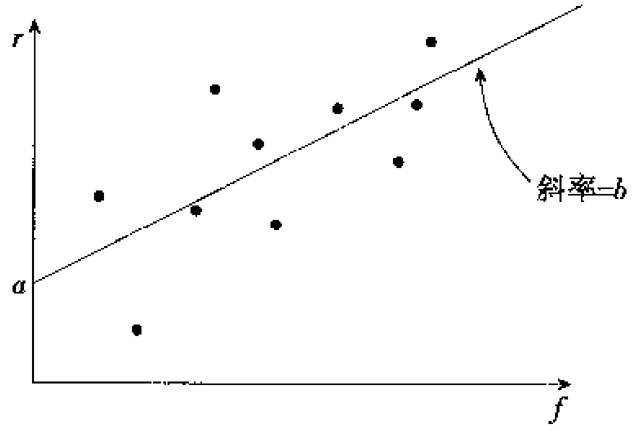


图 8—1　单因素模型

排除收益率的随机误差项收益率与因素线性相关。

当应用于一组资产时，分别对每种资产实施拟合过程。结果，每种资产 i 都得出 a_i 和 b_i。a_i 称为**截距**（**intercept**），因为它是资产 i 对应的直线在纵轴上的截距。b_i 称为**因数载荷**（**factor loading**），因为它们衡量了收益率对该因素的敏感度。

如果资产的收益率和因子值的历史纪录都能得到，单因素模型的参数事实上可以通过拟合直线来估计，就如前面提示的一样。然而，请注意，不同的数据集可能得出不同的 a_i 和 b_i 值。例如，如果我们用某年的收益率和因子 f 的每月数据来获得 a_i 和 b_i 值，然后我们下一年也这么做，可能得出不同的值。在以后的内容中，我们假设模型是已知的，它代表了我们对收益率与因素 f 之间关系的理解。我们忽略掉该模型从何而来这一问题——至少现在不去考虑。

如果我们赞同用单因素模型，那么从单因素模型可以直接确定均值一方差分析的标准参数。我们计算：

$$\bar{r}_i = a_i + b_i\bar{f} \tag{8—2a}$$

$$\sigma_i^2 = b_i^2\sigma_f^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \tag{8—2b}$$

$$\sigma_{ij} = b_i b_j \sigma_f^2, i \neq j \tag{8—2c}$$

$$b_i = \mathrm{cov}(r_i, f)/\sigma_f^2 \tag{8—2d}$$

这些方程展现了因素模型的主要优势。在一般的资产收益表达式里，一共需要 $2n+n(n-1)/2$ 个参数表示各个均值、方差及协方差。在单因素模型里，仅要求 a_i、b_i、$\sigma_{e_i}^2$ 和 σ_f^2——一共只有 $3n+2$ 个参数。 200

资产组合参数

当资产收益由单因素模型来描述时，这些资产的任意组合的收益率是由它对应的因素模型来描述的。要证实这种重要的性质，假设有 n 种资产和收益率由因素模型确定：

$$r_i=a_i+b_if+e_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

假设构成了一个权重为 w_i 的资产组合，$\sum_{i=1}^{n} w_i=1$。那么该资产组合的收益率 r 就是对应的单个收益率的组合，即：

$$r=\sum_{i=1}^{n}w_ia_i+\sum_{i=1}^{n}w_ib_if+\sum_{i=1}^{n}w_ie_i$$

我们可以将它写成：

$$r=a+bf+e,$$

这里

$$a=\sum_{i=1}^{n}w_ia_i$$

$$b=\sum_{i=1}^{n}w_ib_i$$

$$e=\sum_{i=1}^{n}w_ie_i$$

a 和 b 都是常量，它们分别是 a_i 和 b_i 的加权平均数。误差项 e 是随机的，但它也是加权平均数。在那些假设前提下——$E(e_i)=0$，$E[(f-\bar{f})e_i]=0$，$E(e_ie_j)=0(i\neq j)$，很明显 $E(e)=0$ 和 $E[(f-\bar{f})e]=0$，即 e 和 f 是不相关的。e 的方差是：

$$\sigma_e^2=E(e^2)=E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}w_ie_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}w_je_j\Big)\Big]=E\Big(\sum_{i=1}^{n}w_i^2e_i^2\Big)=\sum_{i=1}^{n}w_i^2\sigma_{e_i}^2$$

这里我们已经用到了这一事实：所有 e_i 之间不相关。因此我们用一个因素方程将资产组合收益率进行了简单而完整的描述。

因素模型是一种用来探索分散化效应的很好的模型，显示了风险是如何被减少但不能被完全消除的。为简便起见，我们假设在单因素模型里对于所
201 有的 i，$\sigma_{e_i}^2$ 是相同的，比如，$\sigma_{e_i}^2=s^2$。假设一个由权重相同的各种资产组成的资产组合，即，对每个 i 我们使 $w_i=1/n$。在这种情形下，由前面的阐述，我们得出：

$$\sigma_e^2=\frac{1}{n}s^2$$

当 $n\to\infty$ 时，我们发现 $\sigma_e^2\to 0$。因此在一个充分分散化的资产组合里，因素方程里的误差项是很小的。

该组合的总方差是：

$$\sigma^2=b^2\sigma_f^2+\sigma_e^2$$

σ_e^2 项趋于 0，但是由于 b 是 b_i 的加权平均，则 $b^2\sigma_f^2$ 项多多少少保持为常量。因此该资产组合的方差随着 n 的上升而下降，因为 σ_e^2 趋于 0，而该资产组合的方差并不趋于 0。

这个观察得出一个一般结论。对因素模型描述的任何资产的收益率：

$$r_i=a_i+b_if+e_i$$

有两类风险：来源于 b_if 项和 e_i 项。由 e_i 项而存在的风险称为**可分散风险**（**diversifiable**），因为在充分分散化的资产组合里这一项对总风险的贡献基本上为 0。另一方面，b_if 项称为**系统性风险**（**systematic**）或者**不可分散风险**（**nondiversifiable risk**），因为它在一个即使很分散化的组合里也会出现。系统性风险来源于那种影响所有资产的因素，因此分散化也不能消除它。而因 e_i 而产生的风险是相互独立的，因此，它们可以因分散化而减少。

例 8.1（4 种股票和一个指数） 表 8—1 的上半部分显示了 4 种股票在 10 年的时间里收益率（用百分数表示）的历史记录。同时显示的还有同时期的

一个工业价格指数。我们可以用这个指数作为因素来建立 4 种股票的单指数模型。第一步，计算历史平均收益率和指数。我们将平均数标为 $\hat{\bar{r}}_i$ 和 $\hat{\bar{f}}$ 以区别于真实（但我们不知道的）值 $\bar{r}_i$ 和 $\bar{f}$。

令 $r_i^k(k=1, 2, \cdots, 10)$ 表示收益率 r_i 的 10 个样本值。因此，$\bar{r}_i$ 的估计值为：

$$\hat{\bar{r}}_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} r_i^k$$

我们用下面的公式估计方差

$$\mathrm{var}(r_i) = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(r_i^k - \hat{\bar{r}}_i)^2$$

这是估计方差的标准方法[1]。类似的公式用于计算指数的均值和方差的估计值。

表 8—1　　**因素模型**　　202

年	股票 1	股票 2	股票 3	股票 4	指数
1	11.91	29.59	23.27	27.24	12.30
2	18.37	15.25	19.47	17.05	5.50
3	3.64	3.53	−6.58	10.20	4.30
4	24.37	17.67	15.08	20.26	6.70
5	30.42	12.74	16.24	19.84	9.70
6	−1.45	−2.56	−15.05	1.51	8.30
7	20.11	25.46	17.80	12.24	5.60
8	9.28	6.92	18.82	16.12	5.70
9	17.63	9.73	3.05	22.93	5.70
10	15.71	25.09	16.94	3.49	3.60
平均值	15.00	14.34	10.90	15.09	6.74
方差	90.28	107.24	162.19	68.27	6.99
协方差	2.34	4.99	5.45	11.13	6.99
b	0.33	0.71	0.78	1.59	1.00
a	12.74	9.53	5.65	4.36	0.00
e—var	89.49	103.68	157.95	50.55	

4 种股票的收益率和工业价格指数的历史数据如上表。平均数和方差，连同每种股票与指数的协方差都算出来了。由这些数值，可以计算出 b_i 和 a_i。最后，求出的误差方差也在表中显示。指数并没有很好地解释股票价格的变动。

然后估算出收益率与指数的协方差。用于估计的公式为：

$$\mathrm{cov}(r_i,f)=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(r_i^k-\hat{\bar{r}}_i)(f^k-\hat{\bar{f}}) \tag{8-3}$$

一旦估算出协方差，我们就能从公式得出 b_i 和 a_i 的值。

$$b_i=\frac{\mathrm{cov}(r_i,f)}{\mathrm{var}(f)}$$

$$a_i=\hat{\bar{r}}_i-b_i\hat{\bar{f}}$$

（第一个式子通过计算因素方程左右两边与 f 的协方差而得出）。

在建立好模型之后，在假设误差之间不相关并且它们与指数也不相关的前提下，我们计算误差的方差。因此用（8—2b），有：

$$\mathrm{var}(e_i)=\mathrm{var}(r_i)-b_i^2\mathrm{var}(f)$$

这些值在表 8—1 的最后一排显示。请注意这些误差的方差几乎与股票收益
203 率的方差一样大，因此这些因素并没有很好地解释收益率的变动。换句话说，非系统性风险很大。而且，用式（8—3）估计 $\mathrm{cov}(e_i, e_j)$，得出误差之间高度相关。例如，估值公式给出 $\mathrm{cov}(e_1, e_2)=44$ 和 $\mathrm{cov}(e_2, e_3)=91$。然而因素模型却是在假设这些误差项的协方差为 0 的前提下建立的。因此这个单指数模型并不是股票收益率的精确表达。（下一节将对这些数据给出一个更好的模型。）

多因素模型

前面的推理论述可以扩展到包含不仅一个因素。例如，如果有两个因素 f_1 和 f_2，可能第一个因素是广泛的市场收益率指数，而第二个因素是从上一期开始消费者支出变动指数，资产 i 收益率的模型有这样的形式：

$$r_i=a_i+b_{1i}f_1+b_{2i}f_2+e_i$$

同样，常量 a_i 称为**截距（intercept）**，b_{1i}和 b_{2i}是**因数载荷（factor loading）**。因素 f_1 和 f_2 以及误差项 e_i 是随机变量。假设误差的期望值是 0，该项误差与两种因素以及其他资产的误差都不相关。然而，并不假设这两种因素互不

相关。假设这些因素为可观察的变量，而它们的统计性质可以独立地通过各资产的收益率进行研究。

在两因素模型的情况下我们轻易地导出期望收益率和协方差的值，如下：

$$\bar{r}_i = a_i + b_{1i}\bar{f}_1 + b_{2i}\bar{f}_2$$

$$\mathrm{cov}(r_i, r_j) = \begin{cases} b_{1i}b_{1j}\sigma_{f_1}^2 + (b_{1i}b_{2j} + b_{2i}b_{1j})\mathrm{cov}(f_1, f_2) + b_{2i}b_{2j}\sigma_{f_2}^2 & i \neq j \\ b_{1i}^2\sigma_{f_1}^2 + 2b_{1i}b_{2i}\mathrm{cov}(f_1, f_2) + b_{2i}^2\sigma_{f_2}^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 & i = j \end{cases}$$

b_{1i}和 b_{2i}都可以通过计算 r_i 与 f_1 和 f_2 的协方差而得出：

$$\mathrm{cov}(r_i, f_1) = b_{1i}\sigma_{f_1}^2 + b_{2i}\sigma_{f_1, f_2}$$

$$\mathrm{cov}(r_i, f_2) = b_{1i}\sigma_{f_1, f_2} + b_{2i}\sigma_{f_2}^2$$

（原文为 $\begin{matrix} \mathrm{cov}(r_i, f_1) = b_{1i}\sigma_{f_1}^2 + b_{2i}\sigma_{f_1, f_2} \\ \mathrm{cov}(r_i, f_2) = b_{1i}\sigma_{f_1, f_2} + b_{21}\sigma_{f_2}^2 \end{matrix}$ 疑有误。——译者注）

这样给出的两个方程式可以解出两个未知数 b_{1i}和 b_{2i}。

两因素模型通常是对单因素模型的改进。例如，假设提出了一个单因素模型，并且由拟合数据确定了 a_i 和 b_i。有可能会发现得出的误差项很大，这显示了它与因素的相关性以及误差项相互之间的相关性。这样的话单因素模型就不是对真实收益率结构很好的说明。两因素模型可能会得出小一些的误差项，这些项可能表明了给定的相关性质。两因素模型将仍然比一个完全 204
没有建模的协方差矩阵简单的多。

我们应该清楚如何扩展到包含更多因素的模型。已经建立过这一类相当复杂的模型。对建立美国股票的因素模型，通常认为用 3 到 15 种因素是合适的。

因素的选择

对一个因素模型选择合适的因素是既需要科学性又需要艺术性的（就如很多实际分析一样）。而将因素归为 3 类是很有帮助的。在这些分类确认了后，你可以毫无疑问地构想出其他有用的因素。这里给出了这些分类：

1. 外部因素（external factors） 通常会选择一些模型里明确考虑到的证券之外的因素作为变量。例如，国内生产总值（GNP）、消费价格指数（CPI）、失业率，或者新建筑开工指数。美国政府会发布许多这种统计数据。同样还有可能用其他的外部变量，比如一个月里交通事故数量或者太阳黑子活动。

2. 推断因素（extracted factors） 有可能从已知的证券收益率信息里推断出某些因素。例如，最频繁地用到的因素是市场资产组合的收益率。这个因素是直接从单个证券收益率构造的。另一个例子，单个证券收益率可以用作其他证券收益率的一个因素。更普遍地，一个行业里证券的平均收益率可作为因素，例如，也许存在一个行业因素、公共事业因素、交通因素。同样还可以用主要成分方法推断出因素（见练习 3)。这个方法利用收益率的协方差矩阵求出有大方差的证券组合。事实上，推断因素通常是单个证券收益率的线性组合（就如前面那些例子一样）。可以用更复杂的方法来推断出因素，例如，可以定义一个因素为两种股票收益率的比率、从上一次股市高峰之后的天数或市场收益率的移动平均值。

3. 公司特征（firm characteristics） 根据许多公司特有的财务数值，比如价格—收益比率、股利支付比率、收益预测以及很多其他变量可以描述一个公司。每一种重要证券可以从各种资讯服务中得到大约 50 种变量。它们可以在因素模型中使用，它们不是通常意义上的因素，但是它们的作用是相似的。例如，假设我们决定用单因素 f（一般的那种）和单个公司特征 g（比如上季度的价格—收入比率)。然后我们将证券 i 的收益率表达为：

$$r_i = a_i + b_i f + c g_i + e_i \tag{8—4}$$

205 在这个模型中，常数 c 对每种证券都一样，但是 g_i（特征值）是不同的。特征值对系统性（不可分散的）风险是没有贡献的，但是它可能会减少误差项 e_i 的方差。换句话说，cg_i 这项可以看成是标准单因素模型中误差项的估计。公司特征是对因素模型的有效补充。

8.3 作为因素模型的资本资产定价模型

CAPM 可以作为单因素模型的一个特例。这种观点使我们更好地了解 CAPM 的发展。

特征线

我们假设股票收益率的单因素模型，因素为市场收益率 r_M。为了方便，我们可以用这个因素减去常量 r_f，并且用收益率 r_i 减去 r_f，因此用超额收益率 r_i-r_f 和 r_M-r_f 表示该模型。该模型就成为：

$$r_i-r_f=\alpha_i+\beta_i(r_M-r_f)+e_i \quad (8\text{—}5)$$

通常用符号 α_i 和 β_i 而不是前面通常用的 a_i 和 b_i 来作为这个特殊模型的系数。再次假设 $E(e_i)=0$，并且 e_i 与市场收益率（即因素）以及其他的 e_j 都不相关。

对应于式（8—5）的**特征方程（characteristic equation）**或者**特征线（characteristic line）**是通过使 $e_i=0$ 得出的，即，它是一条在以 r_i 为纵轴，r_M 为横轴的图上画出的直线 $r_i-r_f=\alpha_i+\beta_i(r_M-r_f)$。这种直线如图8—2。在该直线上显示了一个典型点。如果测量了 r_i-r_f 和 r_M-r_f 的大小，并在图上画出来，它们将落在不同的地方，但是特征线假想地定义对这些散点可以很好地拟合。

该方程的期望值为： 206

$$\bar{r}_i-r_f=\alpha_i+\beta_i(\bar{r}_M-r_f)$$

除了每一个 α_i 以外，这与 CAPM 相同。CAPM 预测 $\alpha_i=0$。

此模型中 β_i 的值可以直接计算。我们计算式（8—5）两端与 r_M 的协方差，得到：

$$\sigma_{iM}=\beta_i\sigma_M^2$$

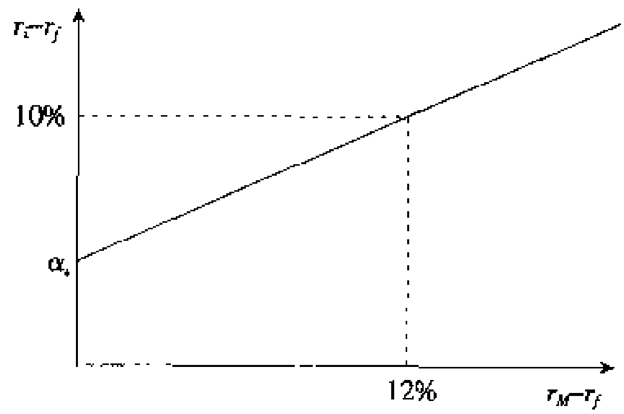


图 8—2 特征线

这条直线代表变量为 r_i-r_f，因素为 r_M-r_f 的单因素模型。

因此，

$$\beta_i=\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

这与 CAPM 里面 β_i 的表达式一模一样（这就是我们用相同符号的原因）。

特征线在某种意义上比 CAPM 更普遍，因为它允许 α_i 非零。从 CAPM 的观点说，α_i 可以看作资产 i 错误定价额度的一种衡量。根据这种看法，有正的 α_i 的股票比它应该具有的表现好，而 α_i 为负的股票比它应该具有的表现差。一些金融服务机构（和一些有很高技术的投资者）为很多种类的股票估计 α 和 β。然而，请注意，推出 CAPM 公式的单因素模型并不等同于以 CAPM 为基础的一般模型，因为一般模型是基于任意的协方差矩阵，但却假设市场是有效的；单因素模型的协方差结构相当简单，但却没有对有效性作出任何假设。

例 8.2（四种股票和证券市场） 让我们用超额市场收益率作为一个因素来回顾一下例 8—1。我们假设市场仅由那四种股票组成，且权重相同。因此任何一年的市场收益率就是该四种股票的加权平均。这在表 8—2 的上半部分显示出来。我们也把 10 年里面每年的无风险收益率的历史数据加上了。除了将超额市场收益率作为因素，公式中的系数 a_i 改为 α_i 外，相关统

计量与前面的例子一样由估计公式计算出。从表中可以看出，股票收益率变动的很大比例都由该因素解释。换句话说，非系统性风险相对较低，而且，计算表明误差之间以及误差与市场收益率几乎不相关。例如，由数据得出估计量 cov（e_1，e_2）＝－14 和 cov（e_2，e_3）＝2，这比前面模型里的值要小得多。我们总结出：单因素模型是对这四种股票收益率的很好表述。换句话说，这个例子中，市场收益率因素比前面用的工业指数因素更好。然而，这对其他例子并不一定成立。

表 8--2　　市场的因素模型

年	股票 1	股票 2	股票 3	股票 4	市场	零风险的
1	11.91	29.59	23.27	27.24	23.00	6.20
2	18.37	15.25	19.47	17.05	17.54	6.70
3	3.64	3.53	−6.58	10.20	2.70	6.40
4	24.37	17.67	15.08	20.26	19.34	5.70
5	30.42	12.74	16.24	19.84	19.81	5.90
6	−1.45	−2.56	−15.05	1.51	−4.39	5.20
7	20.11	25.46	17.80	12.24	18.90	4.90
8	9.28	6.92	18.82	16.12	12.78	5.50
9	17.63	9.73	3.05	22.93	13.34	6.10
10	15.71	25.09	16.94	3.49	15.31	5.80
平均值	15.00	14.34	10.90	15.09	13.83	5.84
方差	90.28	107.24	162.19	68.27	72.12	
协方差	65.08	73.62	100.78	48.99	72.12	
β	0.90	1.02	1.40	0.68	1.00	
α	1.95	0.34	−6.11	3.82	0.00	
e—var	31.54	32.09	21.37	34.99		

把市场资产组合的超额收益率作为因素。这个收益率能很好地解释股票收益率的变动，而且误差之间及误差与市场不相关。这个模型提供了一个很好的数据拟合。

8.4 套利定价理论*

207 因素模型的框架推出了资产定价的另一种理论，称为**套利定价理论**(**arbitrage pricing theory，APT**)。这个理论不要求投资者基于均值和方差来评估资产组合这一假设；只假设在收益率确定时，相对于低收益来说投资者更喜欢更高的收益。在这个意义上该理论比 CAPM 理论更加令人满意，CAPM 依赖于均值—方差框架和严格的均衡，而且假设每个人都用均值—方差框架分析。

然而，APT 本身却要求一个特殊的假设。它假设被考虑到的资产群很大。为了使理论的推导更精确，事实上我们必须假设有无数种证券，并且这些证券之间的区别并非无关紧要。这个假设通常能够很好地得到满足，比如，美国所有公开交易的股票就满足此假设。

简单型的 APT

为了解释 APT 的基本概念，我们首先考虑一个理想化的特例。假设所有的资产收益率都满足下面的单因素模型：

$$r_i=a_i+b_if$$

208 不同的资产有不同的 a_i 和 b_i。这个因素模型的特殊之处在于它没有误差项，与收益率相关的不确定性仅仅来源于因素 f 的不确定性。APT 的特殊含义在于：如果排除了套利机会，那么 a_i 和 b_i 值必然有联系。为了推出 a_i 和 b_i 之间的关系，我们写出两种资产 i（如前）和 j 的模型，即：

$$r_j=a_j+b_jf$$

在选择这两种资产时只有一个条件就是 $b_i\neq b_j$。现在构成了一个 $w_i=w$ 和 $w_j=1-w$ 的资产组合。我们知道这个资产组合的收益率为：

$$r=wa_i+(1-w)a_j+[wb_i+(1-w)b_j]f$$

我们应该选择一个 w 使上面这个等式中 f 的系数为 0。特别地，我们选择 $w=b_j/(b_j-b_i)$。得出的收益率为：

$$r=wa_i+(1-w)a_j=\frac{a_ib_j}{b_j-b_i}+\frac{a_jb_i}{b_i-b_j} \qquad (8—6)$$

这个特殊的资产组合是无风险的，因为 r 的方程没有随机项。如果有另一种收益率为 r_f 的无风险资产，很明显在（8—6）里构建的资产组合必须有相同的收益率——否则存在套利机会。即使不存在直观的无风险资产，所有以这种方式构建的不依赖于 f 的资产组合，必然有相同的收益率。我们用 λ_0 表示这种收益率，认识到如果存在直观的无风险资产，那么 $\lambda_0=r_f$。

令（8—6）的右边等于 λ_0，得出：

$$\lambda_0(b_j-b_i)=a_ib_j-a_jb_i$$

将上式变换一下得：

$$\frac{a_j-\lambda_0}{b_j}=\frac{a_i-\lambda_0}{b_i}$$

这是对所有的 i 和 j 都成立的一般关系。因此：

$$\frac{a_i-\lambda_0}{b_i}=c$$

常数 c 对所有的 i 都成立。可以明显地看出，a_i 和 b_i 值不是相互独立的。事实上，$a_i=\lambda_0+b_ic$。

要明白这种关系的合理性，假设我们令 f 为标准普尔 500 平均指数的收益率。如果 a_i 和 b_i 都是任意的，我们用 $a_i=0.50$ 和 $b_i=1.0$ 来表示股票 i，这使股票 i 的收益率为 50%加上标准普尔 500 指数的收益率。显然它高得不合情理，没有一种股票会有如此高的收益率。更为现实地，如果我们有 $a_i=0.50$，那么 b_i 将为负数，这样才能使整体的 r_i 有意义。另一种情形是，如果 a_i 为无风险收益率，那么 b_i 应该为 0。关系式 $a_i=\lambda_0+b_ic$ 使收益率系数 a_i 和 b_i 呈线性关系。

我们可以用这些信息写出资产 i 的期望收益率的简单公式。有：

$$\overline{r}_i=a_i+b_i\overline{f}=\lambda_0+b_ic+b_i\overline{f}$$

209 或者，可以写成：

$$\bar{r}_i=\lambda_0+b_i\lambda_1 \tag{8—7}$$

常数 $\lambda_1=c+\bar{f}$。我们知道，一旦常数 λ_0 和 λ_1 已知，一个资产的期望收益率就完全由因数载荷 b_i 确定了（因为 a_i 必须取决于 b_i）。

请注意定价公式（8—7）看起来与 CAPM 相似。如果选择市场收益率 r_M 为因素 f，那么我们可以令 $\lambda_0=r_f$ 和 $\lambda_1=\bar{r}_M-r_f$，则在 $b_i=\beta_i$ 时 APT 与 CAPM 完全一样。

对于因素更多的情况，结果是相似的。现在我们给出一个更一般的陈述和证明。

⇒**简单型 *APT*** *假设有 n 种资产，根据如下方程，其收益率由 $m(m<n)$ 种因素决定：*

$$r_i=a_i+\sum_{j=1}^{m}b_{ij}f_j \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

那么有常数 λ_0，λ_1，…，λ_m，使得：

$$\bar{r}_i=\lambda_0+\sum_{j=1}^{m}b_{ij}\lambda_j \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

证明：我们证明两种因素的情形。假设我们将一笔 x_i 美元的金额投资于资产 i，$i=1$，2，…，n，且要满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}x_ib_{i1}=0$ 和 $\sum_{i=1}^{n}x_ib_{i2}=0$。这个资产组合要求的是零净投资和零风险，因此它的期望回报也为零，因此，$\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{r}_i=0$。定义向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\mathbf{b}_1=(b_{11},b_{21},\cdots,b_{n1})$，$\mathbf{b}_2=(b_{12},b_{22},b_{32},\cdots,b_{n2})$，$\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}=(\bar{r}_1,\bar{r}_2,\cdots,\bar{r}_n)$。我们可以重新陈述前面的关系式为：对任意 $\mathbf{x}$ 满足 $\mathbf{x}^T\mathbf{1}=0$，$\mathbf{x}^T\mathbf{b}_1=0$ 和 $\mathbf{x}^T\mathbf{b}_2=0$，随之有 $\mathbf{x}^T\bar{\mathbf{r}}=0$；即，任意 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{1}$，$\mathbf{b}_1$，$\mathbf{b}_2$ 正交，也与 $\bar{\mathbf{r}}$ 正交。根据线性代数[2]的标准结果有：$\bar{\mathbf{r}}$ 必然是向量 $\mathbf{1}$、$\mathbf{b}_1$、$\mathbf{b}_2$

的线性组合。因此存在常数 λ_0，λ_1，λ_2 使得 $\bar{\mathbf{r}}=\lambda_0\mathbf{1}+\mathbf{b}_1\lambda_1+\mathbf{b}_2\lambda_2$。这与前面给出的陈述是一致的。

为了理解这一结果，让我们来观察一些特例。如果所有的 b_{ij} 都为 0，那么就不存在风险，并且有 $a_i=\lambda_0$，这是正确的。如果有一个 b_{ij} 非零，那么 $\bar{r}_i$ 同 b_{ij} 成正比例增长，λ_j 值就是与因素 f_i 相关的**风险价格**（**price of risk**），通常称为**因素价格**（**factor price**）。你接受的 f_i 值越大，获得的期望收益率越高。

充分分散化的资产组合

210

现在我们考虑一些更现实的因素模型，它们有误差项和因素项。假设总共有 n 种资产，第 i 种资产的收益率满足：

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j + e_i$$

这里，$E(e_i)=0$，$E[e_i]^2=\sigma_{e_i}^2$。同时还假设 e_i 和因素不相关，e_i 与其他资产的误差项不相关。我们以权重 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ $(\sum_{i=1}^{n} w_i = 1)$ 来组成一个资产组合。资产组合收益率为：

$$r = a + \sum_{j=1}^{m} b_j f_j + e$$

这里，

$$a = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} w_i b_{ij}$$

$$\sigma_e^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{e_i}^2$$

假定对每个 i 都满足 $\sigma_{e_i}^2 \leqslant S^2$，$S$ 为某个常数。还假定资产组合是**充分分散化**的（**well diversified**），对每一个 i 来说都有 $w_i \leqslant W/n$，W 为常数且 $W \approx 1$。

这样确保了没有一种资产在该组合中权重偏高。然后我们有：

$$\sigma_e^2 \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} W^2 S^2 \leqslant \frac{1}{n} W^2 S^2$$

现在令 $n \to \infty$。在这样做时，我们假设边界 $\sigma_{e_i}^2 \leqslant S^2$ 对所有 i 都有效。对每个 n，我们都选择充分分散化的资产组合。当 $n \to \infty$ 时，我们发现 $\sigma_e^2 \to 0$。换句话说，对于一个有无数种资产的充分分散化的资产组合，其误差项的方差为 0。对于一个资产种类的数目有限但很大的组合来说，误差项的方差近似于 0。

一般的 APT

现在将前面两个小节的思想结合起来。我们假设构建成千上万种不同的充分分散化的资产组合，每一种（基本上）都没有误差。这些资产组合形成了资产集，每一种资产组合的收益率满足一个无误差的因素模型。因此我们
211 可以应用简单化的 APT 推断出：存在常数 λ_0，λ_1，…，λ_m 使任意的完全分散化的资产组合收益率为：

$$r = a + \sum_{j=1}^{m} b_j f_j$$

期望收益率为：

$$\bar{r} = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda_j$$

因为各种充分分散化资产组合可以根据仅仅少量的基本资产的不同权重而构建，那么这些单个资产必然满足：

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \lambda_j$$

（这个论证并非完全严密，但是一个更严密的论证相当复杂）。

这基本上又是表明 a_i 与 b_{ij} 不是相互独立的一个关系式。无风险项必然与因素载荷相关。甚至存在误差项时，这也是正确的，如果存在很多种资产，则误差项可以被有效地分散化。

APT 和 CAPM

基于 APT 的因素模型可以应用于 CAPM 框架来推导这两种理论之间的关系。

用两因素模型，我们得出：

$$r_i = a_i + b_{i1} f_1 + b_{i2} f_2 + e_i$$

求出该资产与市场资产组合的协方差为：

$$\operatorname{cov}(r_M, r_i) = b_{i1}\operatorname{cov}(r_M, f_1) + b_{i2}\operatorname{cov}(r_M, f_2) + \operatorname{cov}(r_M, e_i)$$

如果市场代表充分分散化的资产组合，它将基本上不包含误差项，因此在前面的表达式里忽略 $\operatorname{cov}(r_M, e_i)$ 项是合理的。因此我们将资产的贝塔写成：

$$\beta_i = b_{i1}\beta_{f_1} + b_{i2}\beta_{f2}$$

这里，

$$\beta_{f1} = \sigma_{M,f_1} / \sigma_M^2$$

$$\beta_{f2} = \sigma_{M,f_2} / \sigma_M^2$$

因此可以认为资产的总贝塔是由不依赖于特定资产的基本因素的贝塔组成的。这些因素的贝塔在整个资产的贝塔里占的权重等于因数载荷。因此在这个框架里，不同资产有不同贝塔的原因就是它们有不同的因数载荷。

8.5 数据和统计

均值—方差资产组合理论以及相关的 CAPM 和 APT 模型被频繁地应用 212
于股票证券（也就是公开交易的证券）。通常地，当运用均值—方差理论来构建资产组合时，要选择一个名义投资期或者规划周期— 比如，1 年或者 1 个月——并且根据该期的均值和方差来使资产组合最优化。然而，要执行这样的程序，就有必要对模型的参数赋予特定的数值：期望收益率、收益率的方差和不同证券之间的协方差。我们怎样获得这些参数值呢？

一种明显的来源是各种证券收益率的历史数据。例如，要获得某种股

票的月份期望收益率，我们可能会求一个很长时期，比如 3 年里该股票每月收益率的平均值。这个过去时期的平均值，很有可能会给出对下一个月的真实期望收益率的合理估计值。同样，我们可以根据该月收益率与期望值偏差的平方的平均值来估计股票的方差。还可以用类似的方式估计协方差。

这种从历史收益率数据中推断基本参数的方法普遍地用于构造均值—方差模型。它是一种便捷的方法，因为很容易获得合适的数据源。一些金融服务机构或者提供数据或者提供基于这些数据的估计参数。这种方法对于某些参数，比如方差和协方差，同样是合理可靠的，但是它对其他一些参数明显是不可靠的，比如对于期望收益率。缺乏可靠性并不是因为错误的数据或者费力的计算，而是因为在从数据推算估计值的过程中存在根本的局限性。它是统计上的局限，我们不贴切地称之为历史的模糊。理解数据处理过程的基本统计特性和它的根本局限性是很重要的。

期限长度效应

假定股票的年收益率为 $1+r_y$。这个年收益率可以被认为是 12 个月的月收益率的乘积，可以写成：

$$1+r_y=(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{12})$$

在这个等式中，月收益率并不是以年来衡量的，它们就是该月的真实收益率。对于值很小的 r_i，我们可以将乘积展开并只保留 1 阶项，即：

$$1+r_y\approx 1+r_1+r_2+\cdots+r_{12} \qquad (8—8)$$

换句话说，$r_y\approx\sum_{i=1}^{n}r_i$ 这意味着年收益率近似地等于 12 个月的月收益率之和。这个近似值忽略了复利效应，但它也足够合适地符合我们现在粗略地估计参数值的目的。

213 假设给定的一种股票每月收益率都具有相同的统计性质，并且相互之间不相关。也就是说，每个月收益率 r_i 都有相同的期望值 $\bar{r}$ 和方差 σ^2。用式

（8—8）的近似方法我们有：

$$\bar{r}_y = 12\bar{r}$$

同样，得出：

$$\sigma_y^2 = E\Big[\sum_{i=1}^{12}(r_i - \bar{r})\Big]^2 = E\Big[\sum_{i=1}^{12}(r_i - \bar{r})^2\Big] = 12\sigma^2$$

这里的第二步我们利用了收益率之间不相关这一事实。将这些等式重新整理，并且对方差进行开方，我们得出了用年收益率来表达月收益率的式子：

$$\bar{r} = \frac{1}{12}\bar{r}_y$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{12}}\sigma_y$$

这个分析可以普遍地适用于任意长度的时期，比如 1 个月或者 1 天。如果假设在不同（但长度相同）期间的收益率有相同的统计性质并且相互之间不相关，我们得到相似的结果。具体地讲，如果该期为一年的 p 部分（以分数形式来表示年），那么每期的收益率的期望值和标准差可以通过将以 1 月为 1 期时 $p=1/12$ 的情形扩展而得到。对于一般的 p 我们有：

$$\bar{r}_p = p\bar{r}_y \qquad (8—9a)$$

$$\sigma_p = \sqrt{p}\sigma_y \qquad (8—9b)$$

可以看出正是平方根项引起了估计上的困难。

时期长度对期望收益率和每期收益率的标准差产生的影响如图 8—3 所示。1 年期的期望收益率和标准差都标准化为 1。随着时期长度减少，期望收益率和收益率的标准差都降低。期望收益率与时期长度成正比。然而，标准差与时期长度的平方根成正比。这意味着两者的比率——标准差与期望收 214
益率的比率——随着时期长度降低而急剧上升。事实上，当时期长度趋近于 0 时，这个比率趋于无限大。因此对于长度很短的时期，相对于其期望值，收益率有很高的标准差。

让我们将这种分析应用于一种典型的股票。股票的年收益率均值从6%到30%不等，而代表性的收益率为12%左右。这些均值随着时间而变化，因此任意一个特定值只有在2到3年里有意义。股票年收益率的标准差从10%到60%不等，15%在某种程度上较有代表性。

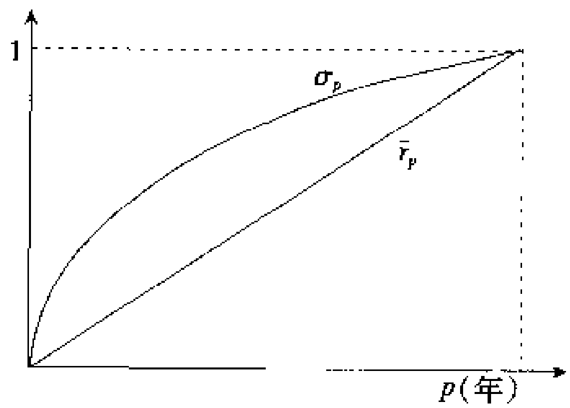


图8—3 期限效应

在一期里的期望收益率随着期限长度的增加而接近于线性地增长。标准差随着期限长度的平方根的增长而增长。

现在我们将这些均值和方差值转化成对应的每月数值。相应地，我们令公式（8—9a）和（8—9b）中的$p=1/12$。现在用名义值$\bar{r}_y=12\%$为年期望收益率，$\sigma_y=15\%$为年标准差。这使相应的每月数值为$\bar{r}_{1/12}=1\%$和$\sigma_{1/12}=4.33\%$。因此月收益率标准差是月期望收益率的4.3倍，然而对于年值这个比率为1.25。随着时期缩短，相对误差扩大了。让我们更进一步，并假设收益率是由相互独立的每日（daily）收益率产生的。假设每年有250个交易日，我们令$p=1/250$，那么$\bar{r}_{1/250}=0.048\%$和$\sigma_{1/250}=0.95\%$就是相应的每日数值。两者现在的比率为0.95/0.048=19.8。这个结果可由股市的一般经验证实。在任意给定日，一只股票的价值会轻易地变化3%到5%，然而期望变动值仅有大约0.05%。相对于每日方差，每日的均值较低。

均值模糊（mean blur）

现在我们说明这种放大效应是如何使期望（或者说均值）收益率估计几乎不可能的。

选择一个基本的时期长度 p（比如 $p=1/12$，为一个月的时期长度），我们试图估计该期的收益率均值。也就是，我们假设每期收益率的统计性质相同：均值为 $\bar{r}$ 和标准差为 σ。并同样假设各个收益率间互不相关。我们希望用历史数据来估计共同的均值。

假设我们有 n 期收益率样本。收益率均值的最好估计是样本平均值。因此，

$$\hat{\bar{r}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i \tag{8--10}$$

这样得出的 $\hat{\bar{r}}$ 值本身就是随机的。如果我们用另一组 n 个数据点，即使股票的概率性质没有改变（也就是，如果真实的均值保持不变），也将得到另一个 $\hat{\bar{r}}$ 值。然而，估计均值的公式（8—10）的期望值就是真实值 $\hat{\bar{r}}$，因为： 215

$$E(\hat{\bar{r}})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i\right)=\bar{r}$$

我们想要计算估计 $\hat{\bar{r}}$ 值的标准差，因为它说明了估计值有多精确。我们马上得出：

$$\sigma_{\hat{\bar{r}}}^2=E[(\hat{\bar{r}}-\bar{r})^2]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})\right]^2=\frac{1}{n}\sigma^2$$

因此，

$$\sigma_{\hat{\bar{r}}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{8—11}$$

这是在估计均值时计算误差的基本公式。

我们对该公式输入一些数值。取时期长度为 1 个月。对前面用到的数字，每月数值为 $\bar{r}=1\%$ 和 $\sigma=4.33\%$。如果我们用 12 个月的数据，得出 $\sigma_{\hat{\bar{r}}}=4.33\%/\sqrt{12}=1.25\%$。因此估计均值的标准差比均值本身大。如果用 1 年的数据，得出 $\hat{\bar{r}}=1\%$，我们只能粗略地说“均值是 1%加上或者减去

1.25%”。这不是一个很优良的估计。如果我们用 4 年的数据，仅仅将此标准差减少一半——它仍然很差。为了得到精确的估计，我们需要的标准差应该仅占均值的十分之一。这将需要 $n=(43.3)^2=1\ 875$ 个或者 156 年的数据。然而，均值不可能在如此长的时间里保持不变，因此估计程序并没有得到很大的改进。

这就是预测 $\bar{r}$ 的历史模糊问题。用历史数据在可行的精确度之内测度 $\bar{r}$ 基本上是不可能的。而且，改变每个时期长度也不可能使这个问题改进很多。如果每个时期更长，每个样本更可靠，但任意一年里获得的相互独立的样本将更少。相反地，如果使用的时期很短，那么可以获得更多样本，但是以标准差与均值的比率来衡量的每个样本都更不可靠（见练习 5）。均值模糊问题是一个很大的难题。

例 8.3（一个统计上的尝试） 我们模拟一种股票 8 年里每月的收益率均值为 1%，每月标准差为 4.33%，分别近似对应于年值 12%和 15%。每月随机收益率是这些参数的正态分布产生出来的，这些收益率如表 8—3 的上半部分所示。在整个 8 年里每年都计算了样本均值。每年的样本均值在该年的月收益率下面显示。同样还显示了样本标准差。（请注意样本标准差同样是估计的——它们的精确度会在下一小节讨论）。请注意由样本平均值决
216 定的单个年均值的估计值从一年到另一年的跳跃幅度是很大的。在这个分析里，我们预期这些估计值的标准差为 1.25%，而且看起来结果也与此一致。即使 8 年的估计值与真实值相距甚远。当然，我们在均值—方差最优化问题里应用这些估计值时会犹豫不决。

在图 8—4 里显示了每月收益率的直方图。请注意与均值相比，样本的标准差很大。你可以直观地看出，从这些样本里不可能确定真实均值的精确估计。相对于分布的宽度，均值太接近于零了，因此不能在实际值的很小比例范围内确定估计值。

表 8—3　　月收益率和均值估计（以百分数来表示）

	年收益率								全部
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1 月	−8.65	2.61	6.39	−4.52	1.28	4.49	−1.44	3.30	
2 月	8.61	−2.38	−1.22	2.30	0.14	7.58	−4.34	3.75	
3 月	5.50	−3.28	1.12	−3.96	−2.63	5.02	1.24	3.95	
4 月	2.04	7.45	3.69	−0.84	3.15	−0.51	8.92	−3.13	
5 月	7.51	7.96	0.28	0.35	−0.47	−0.19	−0.46	−0.31	
6 月	−2.50	−9.37	3.61	6.96	7.04	1.18	8.28	−0.89	
7 月	2.28	−7.27	−1.45	4.23	3.68	1.61	−5.33	−6.39	
8 月	1.85	−5.30	6.83	0.21	2.74	2.62	−1.01	−0.60	
9 月	5.86	5.69	2.32	0.14	−2.08	−2.32	3.77	−0.76	
10 月	1.37	5.24	−3.79	−6.48	1.73	−3.08	4.18	1.92	
11 月	3.17	2.94	−0.52	−1.11	6.18	5.42	−2.27	−3.97	
12 月	9.23	1.94	2.77	2.86	0.38	2.93	4.91	5.18	
均值	3.02	0.52	1.67	0.01	1.76	2.06	1.37	0.17	1.32
σ	5.01	5.88	3.21	3.81	2.98	3.24	4.66	3.55	4.12

每一栏表示一年里产生的随机收益率。真实均值都为 1%，但是估计值与这个真实值的偏差很大。

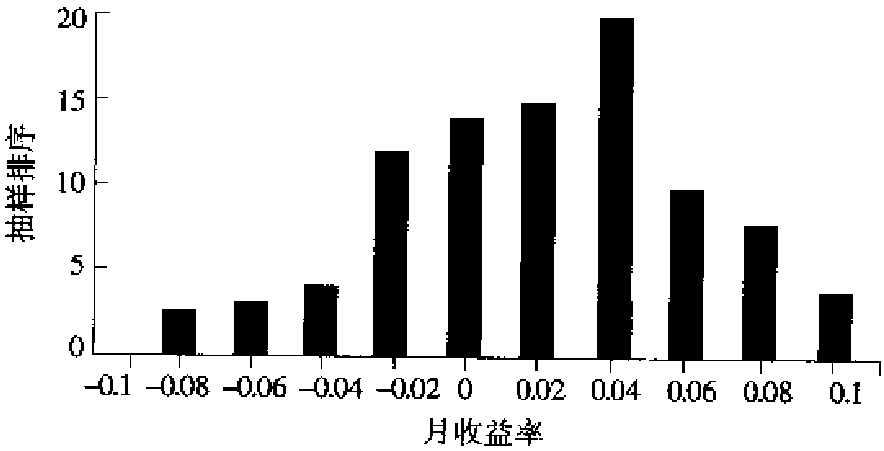


图 8—4　月收益率的直方图

该分布太广了，以至于无法将这个真实均值 0.01 限定在月收益率很小的比例里。

8.6 其他参数的估计

217 根据历史数据得出的其他参数的估计同样受误差的影响。在有些情况下误差水平可以接受，而在其他情况下则不能接受。在任何情况中，认识到误差的存在和确定它们的大概数值是很重要的——否则你可能会提出复杂但有根本缺陷的资产组合构建程序。

σ 的估计

在估计方差和协方差时的模糊效应没有估计均值时的模糊效应严重。再次假设我们有 n 期样本的收益率 r_1，r_2，…，r_n。我们计算样本的均值为：

$$\hat{\bar{r}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$$

样本方差为：

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \hat{\bar{r}})^2$$

分母是 $n-1$ 而不是 n 弥补了求和式中用$\hat{\bar{r}}$而不是用真实的（但是未知的）$\bar{r}$ 的事实。然后得到 $E(s^2) = \sigma^2$。（见练习 4。）因此 s^2 提供了方差的无偏估计。

估计 s^2 的精确度由估计的方差（或标准差）确定。可以证明，如果原来的样本是正态分布的，则 s^2 的方差是：

$$\mathrm{var}(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

或者，等价地，有：

$$\mathrm{stdev}(s^2) = \frac{\sqrt{2}\sigma^2}{\sqrt{n-1}}$$

说明了方差的标准差是真实方差的 $\sqrt{2/(n-1)}$ 倍，因此如果 n 相当大的话，对 σ^2 估计的相对误差不是很大。

例 8.4（1 年的数据） 再次假定我们用的每期长度为 1 个月。用 12 个月的数据，我们得出 $\text{stdev}(s^2)=\sigma^2/2.35$，这已经比 σ^2 本身的值少了一半以上。因此用 1 年的历史数据就可以使 σ 的估计值相当精确。

从表 8—3 里的试验可以看出这个结论是有根据的。最后一行 σ 每年的估计值都相当地接近于真实值 4.33%（当然它们都比对 $\bar{r}$ 的估计值要优良得多），实际上 8 年的估计值都很优良。

α 的模糊

模糊现象适用于因素模型里的参数，但主要适用于 α 值的确定。事实上 218
α 的模糊现象可以从均值—混乱现象推导出，但是我们忽略掉（稍复杂的）细节。

α 估计值固有的很差的精确性在一种称为 β 手册里有所反映，它由美林公司出版，在表 8—4 里显示了一页。请注意 α 的报告标准差比 α 值本身大很多。而估计 β 时的相对误差稍微好一点。

8.7 偏离均衡*

运用均值—方差理论的方法要依赖于 CAPM 的思想，也就是说，如果每个人都用均值—方差的方法，并且每个人都认同这些参数，那么有效的风险资产基金将是市场组合。利用这种思想，你不必作任何计算，仅仅去购买市场资产组合和无风险资产组合之间的组合就行了。

表 8—4

β手册的一页

股票代码	证券名称		1993年12月收盘价	β	α	R^2	残差标准差	β的残差标准误差	α的残差标准误差	调整后的β	观察值的个数
COH	COHU INC		19.125	0.99	1.67	0.09	10.87	0.38	1.45	0.99	60
CLN	COLEMAN INC NEW		28.000	0.62	0.34	0.01	5.72	0.65	1.28	0.75	22
CM	COLES MYER LTO	SPNSRD ADR NEW	30.000	0.61	0.19	0.09	6.88	0.24	0.92	0.74	60
COFD	COLLECTIVE BANCORP INC		21.750	1.49	2.32	0.19	10.90	0.38	1.45	1.32	60
CL	COLGATE PALMOLIVE CO		62.375	1.01	0.88	0.36	4.96	0.17	0.66	1.01	60
CL P	COLGATE PALMOLIVE CO	PFD $4.25	74.000	0.08	0.38	0.01	3.04	0.11	0.41	0.39	60
CRIC	COLLABORATIVE RESH INC		3.750	0.47	3.10	0.01	25.08	0.88	3.34	0.65	60
CGEN	COLLAGEN CORP		27.750	1.30	0.94	0.11	12.86	0.45	1.71	1.20	60
COLL	COLLINS INDS INC		2.500	0.57	0.88	0.00	15.51	0.54	2.07	0.71	60
CLBGA	COLONIAL BANCGROUP INC	CLASS A	18.750	0.67	0.55	0.09	7.27	0.25	0.97	0.78	60
CCOM	COLONIAL COML CORP		0.313	0.01	0.27	0.02	19.06	0.67	2.54	0.35	60
CDT	COLONIAL DATA TECH CORP EC		4.313	0.01	3.63	0.02	28.01	1.09	3.98	0.34	51
CGES	COLONIAL GAS CO		22.500	0.19	0.85	0.01	4.65	0.16	0.62	0.46	60
COGRA	COLONIAL GROUP INC	CLASS A	28.000	1.07	0.76	0.21	7.46	0.26	0.99	1.05	60
CLOR-	COLOR Q INC		0.430	0.32	−3.16	0.02	14.03	0.74	2.44	0.55	38
CMED	COLORADO MEDTECH INC		1.125	−0.66	3.76	0.01	35.63	1.25	4.75	−0.10	60
COT	COLTEC INDS INC		18.750	2.45	−1.45	0.31	6.39	0.77	1.50	1.96	21
COLB	COLUMBIA BKG SYS INC		10.500	0.07	1.37	0.06	10.82	1.42	2.77	0.39	18
CLBF-	COLUMBIA FINL CORP		31.000	−0.02	0.40	0.03	5.50	0.22	0.90	0.32	40
CG	COLUMBIA GAS SYSTEM		22.375	0.18	−0.17	0.01	11.04	0.39	1.47	0.46	60
COL	COLUMBIA HEALTHCARE CORP		33.125	0.94	2.21	0.06	10.96	0.49	1.70	0.96	43
COB	COLUMBIA LABS INC		6.000	1.76	2.07	0.05	24.31	0.85	3.24	1.50	60
CFFS	COLUMBIA 1ST BK FSB WASH D C		33.000	1.57	1.02	0.11	15.61	0.55	2.08	1.37	60
CIV	COLUMBIA REAL ESTATE INVTS I		8.125	0.05	0.42	0.02	4.98	0.17	0.66	0.37	60
EGY	COLUMBIA ENERGY CORP		9.500	−0.20	1.22	0.01	8.04	0.28	1.07	0.21	60
COMR	COMAIR HOLDINGS INC		22.875	1.32	2.57	0.13	12.15	0.43	1.62	1.22	60
CMRO	COMARCO INC		4.875	1.29	0.18	0.11	12.65	0.44	1.69	1.19	60
CCPI	COMCAST CABLEVISION PHILA IN		103.000	0.21	1.75	0.00	7.25	0.25	0.97	0.48	60
CMCSA	COMCAST CORP CL A	CLASS A	36.375	1.69	1.03	0.29	9.72	0.34	1.29	1.46	60
CMCSK	COMCAST CORP CL A	CL A SPL	36.000	1.67	1.02	0.30	9.18	0.32	1.22	1.44	60

注意：很多情况下 α 估计值的标准误差比估计值本身还要大。

资料来源：Security Risk Evaluation. Merrill Lynch, Pierce, Fenner & Smith, Inc., January 1994. 转引经过允许。

很多投资者对这个解决办法都不完全满意，并且相信利用合适的参数直接解马克维茨均值—方差资产组合问题会得出更好的解。然而，我们已经明白根本不可能用历史数据获得对普通股票期望收益率的精确估计的。标准差（或者波动性）太大了。而且，马克维茨均值一方差资产组合问题的解对这些值相当敏感。这很不幸地导致单单用历史数据计算马克维茨问题的解基本上没有意义。只有当获得了均值的更好估计量时构建资产组合的马克维茨方法才有效。

仅仅当可以获得关于股票前景的信息以补充历史纪录里包含的信息时，才能获得更好的估计值。这些信息可以用不同的方法获得，包括：(1) 从对公司详细的基本面分析中得到，包含公司的未来项目分析、公司管理、财务状况、竞争力和产品与服务的未来市场；(2) 作为其他分析结论的综合；(3) 从基于新闻报导和个人经验的直觉和预感来得到。这些信息可以与从历史数据中得到的估计值系统地结合起来，以得到更好的估计值。

然而，马克维茨问题的解仍然对用到的估计值敏感，因此用新估计值得到的解将与市场资产组合大为不同。一个投资者在显著地背离 CAPM 的选择市场资产组合的建议时也许会觉得是不合意的。一种妥协方法就是同时用 CAPM 的观点和额外的信息。这就是本节所要展示的思想。

均衡均值

该方法的第一部分倒过来运用 CAPM。它确定产生市场资产组合所要求的期望收益率。即，得到了一组期望收益率，当把它们在均值—方差问题中用作收益率时，得出的解就是市场资产组合。让我们看看推算过程。 220

由 CAPM 公式得出了必要的 CAPM 收益率，即：

$$\bar{r}_i^e = r_f + \beta_i(\bar{r}_M - r_f)$$

我们加上了上标 e 来突出这是通过均衡观点而得出的 $\bar{r}_i$ 值。请注意这个 $\bar{r}_i^e$ 很容易获得。只需要估计 β_i（可以很可靠地估计出）和 $\bar{r}_M$（它更难一些，但是通常可以用一个大家认同的信息）。不需要解任何方程。

信息

真实的期望收益率是我们不可能确定知道的随机变量。前面计算的均衡值给了我们一些关于这些值的信息，但它们也仅是估计值。我们预期这些估计值都具有方差，并且它们相互之间相关。因此我们把该等式写成：

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i^e + \varepsilon_i$$

表明对每个股票 i 真实值 $\bar{r}_i$ 等于通过均衡观点得到的值加上误差。误差 ε_i 的均值为零。为了方便，通常将所有误差的方差设为某个微小值 τ，而假设误差的协方差为零。

关于期望收益率的其他信息可以用一种相似的方法来表示。例如，要包含资产 i 的历史数据，我们可以 $\bar{r}_i = \bar{r}_i^h + e_i$ 的形式写出一个等式，这里 $\bar{r}_i^h$ 是从历史数据里得出的 $\bar{r}_i$ 值，而 e_i 的方差等于历史纪录的时间长度隐含的方差。

同样，我们可以包含关于期望收益率的主观信息，或者基于对公司细致分析的信息。每种情况下我们同样要对估计值赋予一个方差。

可以设想如何一步一步地确定估计值。我们可以从基于均衡期望收益率的估计值着手。这将导致市场资产组合就是马克维茨问题的解。当加入额外信息时，该解将**偏离（tilt）**初始解。背离程度，或者说偏离程度，将取决于伴随方程的性质以及估计的置信度，它们由误差项的方差和协方差表达。

例 8.5（对数据的双重利用） 参考例 8.2 和表 8—2 的数据。这个表的大部分结论在这个表 8—5 里再次给出。该表的第一行给出了 10 年的平均收益
221 率。计算相应的 CAPM 估计值很简单。例如，对股票 1 我们有 $\bar{r}_1^e = 5.84 + 0.90 \times (13.83 - 5.84) = 13.05$。很显然这些估计值不等于历史平均值。

为了形成新的、综合的估计值，我们对每个估计值赋予一个方差。因为有 10 年的数据，用历史数据估计 $\bar{r}_i$ 时，用式（8—11）计算误差项的标准离差 $\sigma_i^h = \sigma_i / \sqrt{10}$ 是合适的。对股票 1，它是 $\sigma_1^h = \sqrt{90.28/10} = 3.00$。

为了在 CAPM 估计值中赋予误差量，我们注意到这些估计值都基于我们对 r_f，β_i，和 $\bar{r}_M$ 的估计。除了包含 $\bar{r}_M$ 的误差项，我们忽略其他所有的误差项。因此，$\bar{r}_1$ 的误差项的标准离差是 $\beta_1 \times \sigma_M/\sqrt{10}=0.90\sqrt{72.12/10}=2.42$。

表 8—5　　**偏离的数据**

	股票 1	股票 2	股票 3	股票 4	市场	无风险的
平均收益	15.00	14.34	10.90	15.09	13.83	5.84
方差	90.28	107.24	162.19	68.27	72.12	
协方差	5.08	73.62	100.78	48.99	72.12	
β	0.90	1.02	1.40	0.68	1.00	
CAPM	13.05	14.00	17.01	11.27		
偏离值	13.82	14.14	14.17	12.52		

历史平均收益率并不等于 CAPM 预测的平均收益率。两种估计值都有误差，但是它们可以结合起来形成新的估计值，称为偏离。

对股票 1，如果我们将 $\bar{r}_1$ 的历史估计值和 CAPM（均衡）估计值看成是独立的，这两个估计值由如下式子完美地结合得到新估计值[3]：

$$\bar{r}_1=\left[\frac{\bar{r}_1^\prime}{(3.00)^2}+\frac{\bar{r}_1^{\prime\prime}}{(2.42)^2}\right]\left[\frac{1}{(3.00)^2}+\frac{1}{(2.42)^2}\right]^{-1}=13.82$$

（见练习 8。）其他股票的新估计值也用相似的方法得出。

8.8　多期谬论

CAPM 理论是马克维茨单期均值—方差理论逻辑必然推出的一个简单而优美的理论。然而，在实际中均值—方差理论和导出的 CAPM 都适用于固有的多期情形，比如，可以在任意时间交易的普通股票的资产组合构建。

将均值--方差理论应用于多期情形的最简单的方法是由用于估计参数的
222 统计过程隐含的方法。特别地，选择基本时期长度，比如为1个月。以这个时期构造马克维茨问题。如果解出此问题，根据CAPM的假设，应该规定最优资产组合的权重向量 **w** 等于市场资产组合。这种思想可以继续推进到另一时期。如果假设下一期收益率的统计性质与前一期收益率统计特性相同，且新收益率与前一期的收益率不相关。则新的权重向量 **w** 与前一期的相等。然而，同时相对价格会发生变化，因此权重 **w** 不再与市场资产组合对应，因为市场权重是资本化价值权重，而价格变化会改变资本化价值。这就是一个主要的推理谬误，或者矛盾，因为马克维茨模型保持权重不变，而市场资产组合权重却每期都在变化。

让我们考虑一个简单的例子。假设只有两种股票，每种股票的初始价格相同，比如说等于1美元，收益率的均值和方差也相同，相互间的相关度为零。两种股票在股市中供应量相同——比如，每种有1 000股。假设我们有金额 X_0 用于投资。由于对称性，得出均值--方差解将是 $\mathbf{w}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，因此我们购买这两种资产的数量应该相等（相等的金额，相当于相等的股份数量，因为两种股票的价格相等）。这个解对应于市场资产组合。

假设在第一期里第一种股票的价值翻了一倍，而第二种股票价值不变。因此现在 $p_1=2$ 美元而 $p_2=1$ 美元，并且我们的总财富增加到 $1.5X_0$。因为统计性质保持不变，最优的均值—方差解仍然是 $\mathbf{w}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。这表示我们应该继续将钱平分于两种股票。但是如果那样做，我们将购买 $\frac{1}{4}1.5X_0$ 份股票1和 $\frac{1}{2}1.5X_0$ 份股票2。这与市场资产组合不相对应，市场资产组合包含的两种股票的份额是相等的。通常，随着相对价格的变化，市场的货币金额比例也会发生变化，但是均值—方差模型驱使最优资产组合的货币金额比例固定不变，这是一个矛盾。

通过假设期望收益率每期以保持市场资产组合最优化的方式变动，可以修正这个谬误，但是这又降低了模型的精美度。开发一个完备的多期方法可能更加令人满意（就如本书的第四部分）。多期方法颠覆了单期理论中的一些结论。例如，多期理论提出价格的波动性实际上是人们所乐于接受的，而不是不愿接受的。然而，马克维茨和 CAPM 的单期理论框架是引进数量分析时代的很美妙的理论，并且为进一步研究提供了完美的基础。

8.9　小结

特定的解析程序和建模技巧可以使均值—方差资产组合理论比该理论应用于最简单的形式时更具有现实意义。本章讨论的程序和技巧包含：（1）减少规定均值—方差结构所必要的参数个数的因素模型；（2）利用 APT 在 CAPM 中加入因素，并且避免了 CAPM 隐含的均衡性假设；（3）认识到以收益率的历史数据计算参数估计值时固有的误差；（4）将不同类型的参数估计值结合起来，以获得有根据的和合理的结果。 223

因素模型把每种资产的收益率表达成某些特定（随机）因素变量的线性组合。每种资产都用到相同的一些因素，但是这些因素的线性组合的系数因不同的资产而不同。除了因素项，还有常数项 a_i 和误差项 e_i。这些因素的系数称为因数载荷。在用模型进行计算时，通常假设误差项之间不相关，并且误差项与因素不相关。

因素模型有一个很大的优势在于它比均值—方差表达式的参数要少得多。实际上，3 到 15 种因素就可以很好地表现出成千上万种美国股票的收益率的协方差属性。

有几种选择因素的途径。最普遍的选择是市场资产组合的收益率。用这种单个因素的因素模型与 CAPM 有很紧密的联系。其他的选择包括联邦政府发布的各种经济指数，或者作为某些资产收益率的组合而推出的因素。加

人公司各种特定财务特征的组合以补充因素模型同样很有帮助。

当我们把超额市场收益率作为惟一因素时，可以把得出的因素模型阐述为在坐标图上定义的一条直线，横轴为r_M-r_f，纵轴为$r-r_f$。这条线称为资产的特征线。在纵轴上的截距称为阿尔法（α），斜率是 CAPM 的贝塔（β）。CAPM 预测阿尔法等于 0（但实际上它可能非零）。

套利定价理论（APT）是直接基于因素模型建立的。要使该理论有用，最重要的是基本的因素模型要有很好的代表性，也就是说误差项之间不相关，并且误差项与因素不相关。在这样的情况下，误差项可以通过对数目繁多的资产进行组合而使之分散。

APT 的结论是基本的因素模型的系数必须满足线性关系。在基本因素模型的单因素等于市场资产组合的超额收益率这种特殊情况下，CAPM 理论阐明$\alpha=0$。这是 APT 的一个特例，它表明资产收益率的表达式中常数项a是该资产因数载荷的线性组合。而且，应用 APT 的困难之处是确定合适的因素。

认为在应用均值—方差理论时必要的参数值——马克维茨公式的期望收益率、方差和协方差，或者因素模型表达式的a_i和b_{ij}——可以从收益率的历史数据中估计出来的这种假设是迷惑人的。虽然有些参数值可以这样估计出来，但另外一些参数值不能这样估计。特别地，利用 1 年内每周或者每天收益率数据可以在合理的精确度内估计股票的方差和协方差。然而，即使利用 10 年内的收益率纪录，期望收益率（均值）却受到模糊现象的影响不能在可行
224 的精确度内估计。在估计因素模型的a系数时同样存在这种模糊现象。

对基于历史数据的估计值的统计分析告诉我们：我们必须在这样的期望收益率估计值里附加上用其他方法得出的估计值。这个结论并不完全令人吃惊。人们认为：积极的资产组合管理（与仅仅投资于市场资产组合与无风险资产的消极投资策略相反）不能仅限于对历史数据单纯的计算机分析。其他数据资料也是有必要的。如果这些数据资料可以表示成估计值的形式，加上相关的方差，这些估计值可以在逻辑上与基于历史数据的估计值结合起来，得出误差更小的优良的估计值。这种类型的另一种估计是通过 CAPM 公式

本身提供的。

马克维茨资产组合理论的均值—方差公式和随后的 CAPM 理论、因素模型和 APT 为单期投资分析提供了很好的基础。这些发展详细阐述了分散化的好处，并且加深了我们对市场环境里风险的认识。这些理论也提供了可以应用的方法。事实上，这整个领域对资产组合管理的实际操作产生了深刻的影响：指数基金大量存在，金融领域里对贝塔的计算以及对它广泛的讨论，写出了很多二次规划程序求解马克维茨问题，构建并检验了无数的因素模型，巨额资金管理的指导思想至少有一些是来自这些思想和方法的。

但是均值—方差理论并不是进行投资时放之四海而皆准的灵丹妙药。所有投资者仅仅关注于均值和方差的假设是有问题的，很难估计这些必要的参数，看起来不可能（就如均衡观点要求的那样）每个人对参数有相同的估计，并且该方法必须在多期的框架里进行调整。通过将模型扩展、容许出现近似值或者对考虑的资产的性质观察得更加深入，每个困难都可以克服。大量创新工作就是这样做出来的。但是，要做出显著的进步，最终我们还是必须将分析的基本工具扩展到均值—方差之外。我们必须构造一种理论，这种理论建立在均值—方差方法的深刻见解之上，能够更明确地应付不确定性，并且直接针对多期情形。

练习

1.（简单资产组合）某人相信所有股票的组合满足一个以市场资产组合为因素的单因素模型，他向你提供了组成一个资产组合的 3 只股票的信息（见表 8—6）。另外，知道市场资产组合的期望收益率为 12%，标准差为 18%，无风险利率为 5%。

（a）该资产组合的期望收益率是多少？

（b）假设该因素模型是精确的，该收益率的标准差是多少？

225 表 8—6 简单的资产组合

股票	贝塔	随机误差项的标准差	占资产组合中的权重
1	1.10	7.0%	2.0%
2	0.80	2.3%	50%
3	1.00	1.0%	30%

2. （APT 因素）有两只股票满足双因素模型：

$$r_1=a_1+2f_1+f_2$$

$$r_2=a_2+3f_1+4f_2$$

另外，有一种收益率为 10%的无风险资产。已知 $\bar{r}_1=15\%$，$\bar{r}_2=20\%$。该模型的 λ_0，λ_1 和 λ_2 值为多少？

3. （主成分）假定有 n 个随机变量 x_1，x_2，…，x_n 并令 **V** 为相应的协方差矩阵。**V** 的**特征向量**（**eigenvector**）为 **V**=（v_1，v_2，…，v_n），存在某个 λ 满足 **Vv**=λ**v**（λ 称为 **V** 的特征值）。随机变量 $v_1x_1+v_2x_2+\cdots+v_nx_n$ 是一个**主成分**（**principal component**）。第一个主成分是与 **V** 的最大特征值对应的，第二个主成分与第二大的特征值对应，以此类推。

在 n 种资产收益率的单因素模型里，从 n 种收益率里提取出来的第一个主成分是作为因素的最好选择，也就是说，通过运用收益率协方差矩阵的主特征向量。求例 8.2 里面数据的第一个主成分。这个因素（当标准化后）是否类似于市场资产组合的收益率？（请注意：对于本部分，你需要一个在很多矩阵计算数据包里都有的特征向量计算器。）

4. （方差估计）令 $r_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为相互独立的样本收益率，其均值为 $\bar{r}$，方差为 σ^2。定义估计值

$$\hat{\bar{r}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i-\hat{\bar{r}})^2$$

请证明 $E(s^2)=\sigma^2$

5.（数据越多越有用吗？◇）假定一只股票的收益率的年均值和方差分别为 $\bar{r}$ 和 σ^2。要估计这些量，我们将 1 年分成 n 个相等的时期，并记录每期的收益率。令 $\bar{r}_n$ 和 σ_n^2 分别为每期收益率的均值和方差。特别地，假设 $\bar{r}_n=\bar{r}/n$ 和 $\sigma_n^2=\sigma^2/n$。如果 $\hat{\bar{r}}_n$ 和 $\hat{\sigma}_n^2$ 是相应的估计值，那么 $\hat{\bar{r}}=n\hat{\bar{r}}_n$ 并且 $\hat{\sigma}^2=n\hat{\sigma}_n^2$。令 $\sigma(\hat{\bar{r}})$ 和 $\sigma(\hat{\sigma}^2)$ 为这些估计值的标准差。

（a）证明 $\sigma(\hat{\bar{r}})$ 独立于 n。

（b）说明 $\sigma(\hat{\sigma}^2)$ 如何取决于 n。（假定收益率为正态随机变量。）回答本练习的题目上提出的问题。

6.（价格记录）股票 S 每年收益率（以百分比表示）的记录如表 8—7 所示。 226

表 8—7　　收益率记录

月	收益率（%）	月	收益率（%）
1	1.0	13	4.2
2	0.5	14	4.5
3	4.2	15	−2.5
4	−2.7	16	2.1
5	−2.0	17	−1.7
6	3.5	18	3.7
7	−3.1	19	3.2
8	4.1	20	−2.4
9	1.7	21	2.7
10	0.1	22	2.9
11	−2.4	23	−1.9
12	3.2	24	1.1

（a）估计收益率的算术平均值，以每年百分比的形式表达。

(b) 估计这些收益率的算术标准差，同样以每年百分比的形式表达。

(c) 估计 (a) 和 (b) 中估计值的精确度。

(d) 如果你得到的是 2 年内的每周数据而不是每月数据，你认为 (c) 中的答案会如何变化？(见练习 5。)

7. (聪明的想法，但不完美◇) 杰文·琼斯想出了一种在 1 年内得到 24 个月收益率而不是 12 个月收益率的好办法，他采用交叠样本，也就是，第一个样本从 1 月 1 日到 2 月 1 日，第二个样本从 1 月 15 日到 2 月 15 日，等等。他用这种方法计算出估计值 $\bar{r}$ (用收益率均值) 的误差将会减少。分析杰文的想法。如何将这种方法计算出的估计值的方差与用 12 个月不交叠的月收益率计算出的方差进行比较？

8. (一般的偏离◇) 关于期望收益率信息的一般模型可以用向量—矩阵的形式表示成：

$$\mathbf{p}=\mathbf{P}\,\bar{\mathbf{r}}+\mathbf{e}$$

模型中 $\mathbf{P}$ 是一个 $m\times n$ 的矩阵。$\bar{\mathbf{r}}$ 是一个 n 维向量，$\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{e}$ 是 m 维向量。向量 $\mathbf{p}$ 是一组观察值，$\mathbf{e}$ 是均值为 0 的误差向量。误差向量的协方差矩阵为 $\mathbf{Q}$。对 $\bar{\mathbf{r}}$ 的最好 (方差最小) 估计为：

$$\hat{\bar{\mathbf{r}}}=(\mathbf{P}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{p} \qquad (8-12)$$

(a) 设有单种资产并且只有一种测量形式 $p=\bar{r}+e$。证明：根据式 (8—12)，我们有 $\hat{\bar{r}}=p$。

(b) 假设有两种不相关的测量，值分别为 p_1 和 p_2，方差为 σ_1^2 和 σ_2^2。证明：

$$\hat{\bar{r}}=\left(\frac{p_1}{\sigma_1^2}+\frac{p_2}{\sigma_2^2}\right)\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)^{-1}$$

227 (c) 考虑例 8.5。测量形式为

$\bar{r}_1=p_1+e_1$

$\bar{r}_2=p_2+e_2$

$\bar{r}_3=p_3+e_3$

$\bar{r}_4=p_4+e_4$

$\bar{r}_1 = r_f + \beta_1 f_M$

$\bar{r}_2 = r_f + \beta_2 f_M$

$\bar{r}_3 = r_f + \beta_3 f_M$

$\bar{r}_4 = r_f + \beta_4 f_M$

这里的 e_i 之间是不相关的，但是 $\text{cov}(e_i, f_M) = 0.25\sigma_i^2$。假设 β_i 是确切地知道的，用该例的数据，求出 $\bar{r}_i$ 最好的估计值。(请注意：你只需要求 2×2 的矩阵的逆矩阵即可。)

【注释】

[1] 这种估计公式的详细阐述见 8.6 节。

[2] 你可以从一个三维空间里想像这个结论。比方说，固定一个向量 **b** 沿着与墙面垂直的地面运动。假定对于所有的 **x** 都有 $\mathbf{x}^T\mathbf{b}=0$。同样，$\mathbf{x}^T\bar{\mathbf{r}}=0$ 也成立。**x** 的集合都位于墙面上。那么你应该会得出存在某个 λ 使 $\bar{\mathbf{r}}=\lambda\mathbf{b}$。

[3] 这两个估计值并不是真的相互独立，因为历史市场收益率部分是基于股票 1 的历史收益率的。而且，不同股票的 CAPM 误差项高度相关，因为它们都依赖于市场。为了简化，我们忽略掉这些相关性。

【参考文献】

构建一组收益率的因素分析方法发展得很好。文献 [1] 是一篇很好的概述。还可以参考文献 [2]。APT 是由罗斯 (Ross) 在文献 [3] 提出的。实际的应用请参考文献 [4]。因素模型和 APT 介绍性的阐述请参考第 2 章参考文献列出的金融学教材。从历史数据得出的参数估计值的误差分析早就有了，但是没有被广泛地运用，一个很好的运用见文献 [5]。应用于全球资产管理的关于偏离的详细例子见文献 [6]。

1. Sharp, W. F. (1982), "Factors in New York Exchange Security Returns 1931－1979," *Journal of Portfolio Management*, 8, Summer, 5—19.

2. King, B. F. (1966), "Market and Industry Factors in Stock Price Behavior," *Journal of Business*, 39, January, 137—170.

3. Ross, S. A. (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing," *Journal of Economic Theory*, 13, 341—360.

4. [illegible] Journal, September/October, 28—45.

9.1 引言

基本上，有两种方法可以用来给随机现金流定价：(1) 用期望值和方差直接估价；(2) 将此随机现金流转化为另外的一些已经被评估过的现金流的组合间接定价。本章集中讨论这两种方法，说明如何将这两种方法用于单期投资问题，并说明这两种方法如何结合起来以产生强有力的和有用的定价关系。 228

本章会比前面的章节更加抽象，主要是为第二和第四部分的一般多期问题的学习做准备。读者可以直接跳至第 10 章（甚至第 11 章），因为不学习本章也可以理解第 3 部分的大多数内容。我们这里提供一个学习计划，就是先学习本章的前面一部分——前 5 节，即期望效用理论。然后在学习第四部分时，读者可以返回来再学习本章第二部分，即一般定价理论。另外一些读者可能希望按部就班地学习本章，因为本章是单期投资理论框架的逻辑顶点。

9.2 效用函数

假设，你今天坐在这里，有许多不同的投资机会，这些投资机会将影响你的年末总财富。一旦你决定将你的资金分配于这些投资选择，你的未来财富就取决于相应的随机变量。如果所有投资机会的结果都是确定的，那么对这些投资选择进行排序就很容易——只需选择可以带来最大财富的投资机会即可。但在一般的随机情形下，并非如此显而易见。你需要一个对随机财富水平进行排序的方法。效用函数就提供了这样的方法。

形式上，效用函数是一个定义于实数（代表可能的财富水平）上的，并
229 且函数值也是实数的函数 U。一旦效用函数被确定下来，所有可能的随机财富水平可以通过对它们的期望效用水平的评估排序。特别地，比较两个随机财富水平 x 和 y 时就可以直接比较相应的 $E[U(x)]$ 和 $E[U(y)]$，数值大者更受欢迎。

不同的个人所具体使用的效用函数不同，主要取决于他们的个人风险忍耐程度和个人所处的财务环境。最简单的效用函数是线性函数 $U(x)=x$。使用这个效用函数的个人按期望值高低将随机财富水平排序。这个效用函数（和使用此效用函数的个人）被称为**风险中性**的（**risk neutral**），因为，我们后面即将讲到，这个函数并没有考虑到风险因素。其他的效用函数一般会考

虑到风险。

效用函数形式的一个常用的限制条件是它是递增的连续函数，即，如果 x 和 y（非随机的）均是实数，且 $x>y$，那么就有 $U(x)>U(y)$。在这个限制条件下，理论上效用函数可以采用任何形式，但是在实际中有一些标准的函数是常用的，下面是一些最常用的效用形式（如图9—1）。

1. 指数形式

$$U(x)=-e^{-ax}$$

其中参数 $a>0$。注意此效用函数取值为负。取负值并没有关系，因为重要的是相对值的大小。此函数递增并趋于0。

2. 对数形式

$$U(x)=\ln(x)$$

注意此函数仅在 $x>0$ 时才有意义。$x\approx0$ 时会产生一个严重的不利后果。实际上，只要 x 为0的概率为正值，那么期望效用将会是 $-\infty$。

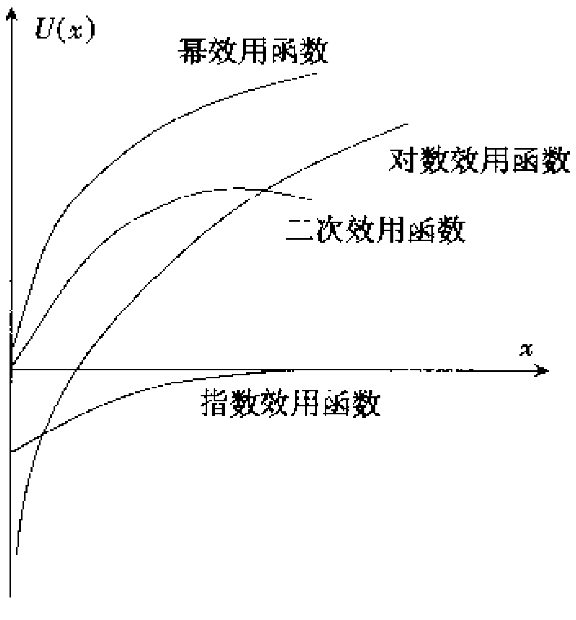


图9—1 几个常用的效用函数

效用函数随财富增加而上升，因为高财富值比低财富值更受欢迎。简单的效用函数形式便于描述和分析。

230 3. 幂形式

$$U(x)=bx^b$$

其中参数 $b\leqslant1$，$b\neq0$。这类函数包含（$b=1$）风险中性效用函数。

4. 二次形式

$$U(x)=x-bx^2$$

其中，参数 $b>0$。注意此函数仅在 $x<\dfrac{1}{2b}$时递增。

在考察效用函数更多的性质，并研究效用函数应用的例子后，我们将讨论投资者如何选择适合的效用函数。

例 9.1（风险投资者） 一个风险投资者，西柏，她正在考虑来年两个可能的投资选择。第一个选择是购买短期国库券，这会给她带来 6 百万美元的确定性收入。另一个投资机会有三种可能结果。分别以 0.2、0.4 和 0.4 的概率产生财富 10 百万美元、5 百万美元和 1 百万美元。她决定使用幂形式的效用函数 $U(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 来评估这两个投资选择（其中 x 的单位是百万美元）。

第一个选择的期望效用是$\sqrt{6}=2.45$，第二个选择的期望效用是 $0.2\times\sqrt{10}+0.4\times\sqrt{5}+0.4\times\sqrt{1}=0.2\times3.16+0.4\times2.24+0.4=1.93$。所以对西柏来说，第一个选择优于第二个选择。

使用效用函数的期望值作为决策的标准有很强的依据。事实上这种方法可以由一系列描述理性行为的适当公理推导而得[1]。总体上讲，这种方法有许多优点：简单、在选择不同的效用函数时有很好的灵活性和坚实的理论依据。

等价效用函数

既然效用函数是用以对不同的投资选择提供排序，那么它的实际数值（即基数值）自然就没有实际意义。重要的是计算出每个选择的期望效用函

数后怎样排序。很显然，效用函数进行一定的初等变换后并不会改变它所提供的排序。现在我们考察这个性质。

首先，很容易观察到，在效用函数上加任一常数后不会改变排序。也就是说，如果我们使用效用函数 $U(x)$，然后定义另一个效用函数 $V(x)=$ 231
$U(x)+b$，这个新效用函数提供与原效用函数完全相同的排序。这可以由期望值运算的线性关系推得。具体来讲即，$E[V(x)]=E[U(x)+b]=E[U(x)]+b$。因此，新的期望效用值等于原来的期望效用值加上常数 b，这一变化不会改变投资选择之间的排序。

类似地可以看到效用函数 $V(x)=aU(x)$（a 为常数，且 $a>0$）也不会改变原来的排序，因为 $E[V(x)]=E[aU(x)]=aE[U(x)]$。

总的来讲，给定效用函数 $U(x)$，任一如下形式的效用函数

$$V(x)=aU(x)+b \tag{9—1}$$

（其中 $a>0$）是与 $U(x)$ **等价**（**equivalent**）的效用函数。等价效用函数提供相同的排序（可以证明如（9—1）所进行的转换是使得所有随机结果的排序不变的惟一的转换形式。）。例如，效用函数 $V(x)=\ln(cx^a)$（$a>0$）与对数效用函数 $U(x)=\ln x$ 等价，因为 $\ln(cx^a)=a\ln x+\ln c$。

实际上，我们认识到效用函数可以被转化成等价形式，并且可以利用这一事实更方便地刻画出一个效用函数。

9.3　风险厌恶

效用函数的主要目的是提供一个系统的方法给投资选择排序，这一排序体现风险厌恶原则。可以证明任意凹效用函数都可以满足上述风险厌恶原则。下面我们正式提出这一定义。

⇒***凹效用函数和风险厌恶***（*concave utility and risk aversion*）*如果对任意*

$0\leqslant\alpha\leqslant1$和任意$x$和$y\in[a,b]$满足下列不等式，定义于$[a,b]$上的函数$U$被称为凹的（concave）。

$$U[\alpha x+(1-\alpha)y]\geqslant\alpha U(x)+(1-\alpha)U(y) \tag{9—2}$$

效用函数U如果在[a, b]上是凹的，则称为在[a, b]上风险厌恶（risk averse on [a, b]）。*如果U处处是凹的，那么称它是风险厌恶的*（risk averse）。

这一定义在图9—2中表示出来。图中曲线代表一个凹的效用函数。为检验其凹性，我们任取两个值x和y，和任意的$0\leqslant\alpha\leqslant1$，如图所示。那么点$x^*=\alpha x+(1-\alpha)y$是$x$和$y$的加权平均值，因此$x^*$介于$x$和$y$之间，此点上的效用函数值大于$U(x)$和$U(y)$两点连线上$x^*$所对应的值。通常，凹性条件使得函数上任意两点的连线一定在原函数曲线的下方。简单地讲，一个递增的凹效用函数随着函数值的上升其对应的切线斜率下降。

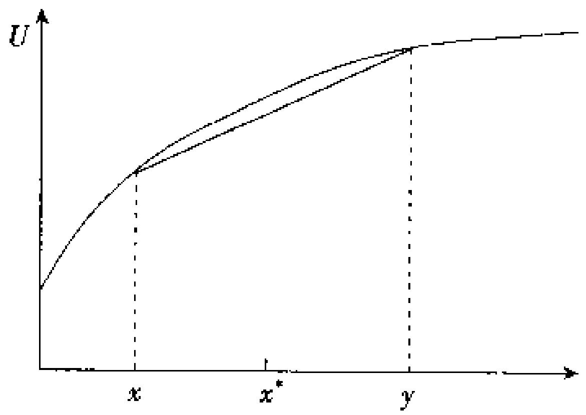


图9—2 凹性和风险厌恶

连接x和y的直线在任意一个中间点都处于函数的下方。一个特殊情况就是，确定值$x^*=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$比50—50概率的$x$和$y$更受欢迎。

在图9—2中我们说明函数的凹性如何同风险厌恶相联系。假设我们有两个投资选择。第一个投资可以使我们在期末分别以概率1/2获得x和y。第二个选择给我们提供确定的财富$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$。假设我们的效用函数如图

9—2所示。那么第一种选择的期望效用（50—50 概率）等于 $U(x)$ 和 $U(y)$ 连线上点 $x^*=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$ 所对应的函数值，因为它是两个效用值的加权值。而第二种选择（无风险）等于效用函数上 $x^*=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$ 所对应的函数值 $U(x^*)$。显然在凹性条件下后者的数值大于前者，所以确定性的财富 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$ 比 50—50 概率的 x 和 y 更受欢迎。两个投资机会有相同的期望财富值，但是无风险的投资机会更受欢迎。 232

一个特殊的例子是风险中性函数 $U(x)=x$（和它的等价形式 $V(x)=ax+b$，$a>0$）。根据前述的定义，此函数是凹性的，但它是一种极限情形。严格地讲，此函数表示零风险厌恶。我们常常在 U 是严格凹的条件下才称之为风险厌恶，这就是说当 $x\neq y$ 时，式（9—2）是一个严格的不等式。

例 9.2（掷硬币） 举个具体的例子，假设你有两个选择。第一个选择的收入由掷硬币来决定——正面，你得 10 美元；反面，你得 0 美元。第二个选择是你可以确定地得到 M。你的货币效用函数是 $x-0.04x^2$。现在让我们来评估这两种选择权。第一个选择的期望效用为 $E[U(x)]=\frac{1}{2}(10-0.04\times10^2)+\frac{1}{2}\times0=3$；第二个选择的期望效用是 $M-0.04M^2$。如果 $M=5$，则期望效用为 4，大于第一个选择的效用值。这意味着你更偏好于第二种选择，即，相对于以 50—50 的概率得到 10 美元和 0 美元来讲，你更喜欢确定性的 5 美元。

我们可以进一步地讨论 M 为何值时可使得第二种选择的效用等于第一种选择的效用。解方程 $M-0.04M^2=3$。可得到 $M=3.49$ 美元。于是可以得出结论，你对确定的 3.49 美元收入和以 50—50 概率得到收入 10 美元和

0 美元的评价相同。

导数

我们可以将效用函数的许多重要性质同其导数相联系。首先，如果 $U'(x)>0$，则 $U(x)$ 关于 x 是递增的。再者，如果 $U''(x)<0$，则 $U(x)$
233 关于 x 是严格凹的。举个例子，考虑指数效用函数 $U(x)=-e^{-ax}$。我们求得 $U'(x)=ae^{-ax}>0$，所以 U 是递增的。而且 $U''(x)=-a^2e^{-ax}<0$，所以 U 是凹的。

风险厌恶系数

效用函数的风险厌恶程度与函数图像的弯曲程度相联系——弯曲程度越大，风险厌恶程度越高。这一概念可以由效用函数的二阶导数进行量化。

风险厌恶程度的正式定义是**阿罗－普拉特绝对风险厌恶系数（Arrow-Pratt absolute risk aversion coefficient）**，即

$$a(x)=-\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

分母的 $U'(x)$ 是为了对此系数进行标准化，标准化后的 $a(x)$ 对所有等价效用函数都相同。风险厌恶系数 $a(x)$ 大致上说明了随着财富水平的变化，风险厌恶程度是如何变化的。对于许多个人来说，随着拥有财富的增加，它们的风险厌恶程度会下降，这体现了这样的事实：当资金比较充裕时，他们愿意冒更大的风险。

看一个具体的例子，让我们再次考虑指数形式的效用函数 $U(x)=-e^{-ax}$。我们可以求得 $U'(x)=ae^{-ax}$ 和 $U''(x)=-a^2e^{-ax}$，于是得到 $a(x)=a$，在此例子中，对任意的 x 值，风险厌恶系数均为常数 a。如果我们对其等价效用函数 $U(x)=1-be^{-ax}$ 进行计算，可以发现 $U'(x)=bae^{-ax}$ 和 $U''(x)=-ba^2e^{-ax}$，于是同样可以得到 $a(x)=a$。

再看另一个例子，考虑对数形式的效用函数 $U(x)=\ln x$。这里 $U'(x)=\frac{1}{x}$，$U''(x)=-\frac{1}{x^2}$。因此，得到 $a(x)=\frac{1}{x}$，在此例中，随着财富的增加，风险厌恶程度下降。

确定性等价

如果不与其他投资选择进行比较的话，一个随机财富变量的期望效用函数的具体数值并没有多大的意义。但是我们可以推出一种有直观意义的基数衡量方式。这种度量方式就是**确定性等价（certainty equivalent）**[2]。

随机财富变量 x 的确定性等价定义为效用水平与 x 的期望效用相等的确定的（即，无风险的）财富数额。换句话说，随机财富变量 x 的确定性等价 C 是满足下式的数值 C：

$$U(C)=E[U(x)]$$

对于同一随机变量，使用任何等价效用函数所计算出的确定性等价是相等的，而且确定性等价以财富的单位表示。

举个例子来说，考虑前面讨论过的掷硬币的例子。我们计算出以 50—50 概率获得收入 10 美元和 0 美元的确定性等价是 3.49 美元，因为确定性地获得 3.49 美元同掷硬币所得的收入具有相同的效用。 234

对于凹效用函数来讲，随机变量 x 的确定性等价一般都小于或等于随机变量 x 的期望值，也就是说，$C\leqslant E(x)$。实际上这个不等式是定义风险厌恶的另一种（等价的）方法。

如图 9—3 所示，我们画出了有两个结果 x_1 和 x_2 的随机变量 x 的确定性等价。由 $U(x_1)$ 和 $U(x_2)$ 连线与点 $E(x)$ 的垂线的交点向左做水平线，同效用函数曲线相交即得到确定性等价点 C。

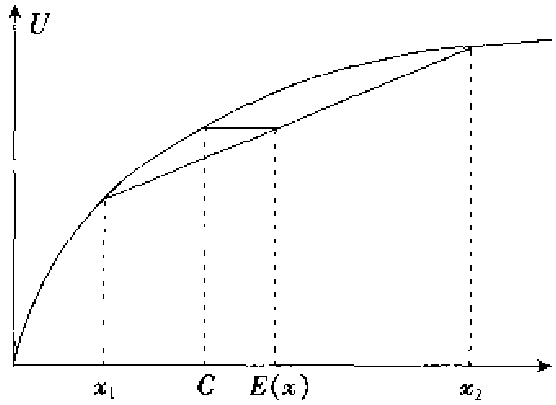


图 9—3 确定性等价

确定性等价通常低于风险厌恶者的期望财富值。经 Fidelity 投资公司允许翻印。

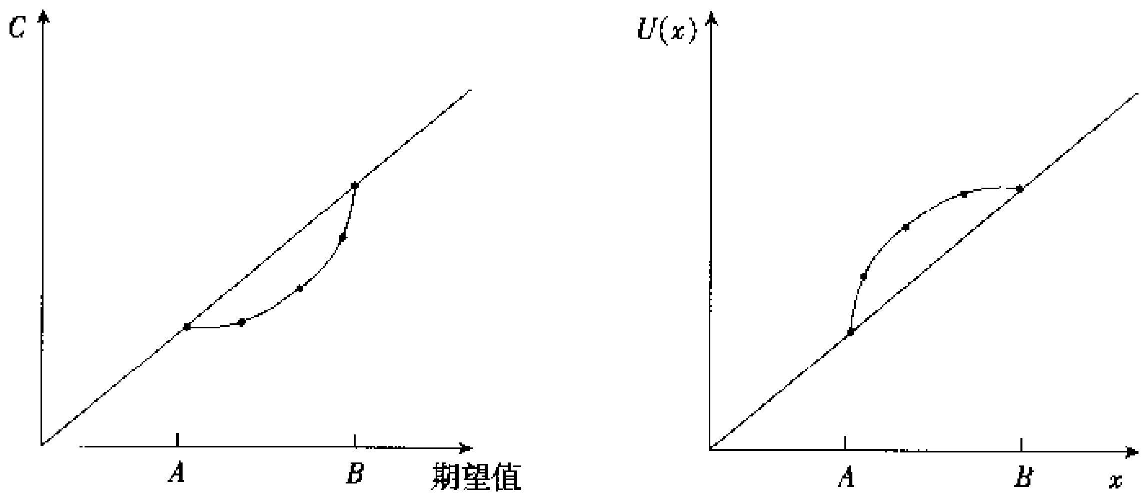
9.4 效用函数评述*

有多种系统的方法赋予投资者一个合适的效用函数，其中有些方法十分复杂。我们概述几种普遍运用的简单方法。

效用的直接度量

确定投资者效用函数的一种方法是让此投资者对不同的风险投资赋予不同的确定性等价。这种程序的特别美妙的方法是：选择两个确定性的财富值 A 和 B 作为参照点。通过抽奖的形式决定产生结果 A 的概率 p 和产生结果 B 的概率 $(1-p)$。取不同的 p 值，询问投资者会接受多高水平的确定性财富值 C 以代替抽奖所得的收入。C 的数值随着 p 的变化而变化。请注意 A、B 和 C 表示的是总财富值，而不是基于赌局而获得的增加值。概率为 p 的抽奖的期望财富值 $e=pA+(1-p)B$。而对于一个风险厌恶的投资者来说，他会接受低于 e 的确定性财富以规避抽奖的风险。所以 $C<e$。

不同的 p 值与投资者所提供的相应的 C 值可以在图 9—4（a）中描点。 235
C 值高于相应的 e 值。通过描点获得一条曲线，确定曲线函数 $C(e)$。为了从此图定义效用函数，我们可通过规定 $U(A)=A$，$U(B)=B$ 而实现标准化。(这个规定是合理的，因为效用函数有两个自由度)。通过这样的标准化，可以得出抽奖的期望效用是 $pU(A)+(1-p)U(B)=pA+(1-p)B$，与期望财富值 e 完全相同。因为 C 定义要使得 $U(C)$ 等于抽奖的期望效用，于是我们有 $U(C)=e$。可得 $C=U^{-1}(e)$，由 $C(e)$ 定义的曲线是效用函数的反函数。因此通过转换坐标轴而得到反函数的方法就可以得到效用函数，如图 9—4（b）所示。[3]



(a) (b)

图 9—4 经验确定的效用函数

(a) 对于支付 A 或 B 且均值为 e 的抽奖，要求投资者说明确定性等价 C。(b) 通过一定的转换获得效用函数。

例 9.3（风险投资者） 西柏，一个稳健成功的风险投资者，急切希望能清楚地知道自己的效用函数。一位咨询顾问让她考虑结果不是 100 万美元就是 900 万美元的抽奖。要求她遵循前面所述的直接过程，考虑收到 100 万美元的概率 p 不断变化下的不同的抽奖。对于 50—50 概率的情形来说，期望

收入是 500 万美元，但是她给出的确定性等价是 400 万美元，其他情况下的确定性等价如表 9—1 所示。

表 9—1　　　　　　　　　　期望效用值和确定性等价

p	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
e	9	8.2	7.4	6.6	5.8	5	4.2	3.4	2.6	1.8	1
C	9	7.84	6.76	5.76	4.84	4	3.24	2.56	1.96	1.44	1

由于 $U(C)=e$，效用函数也可以由表 9—1 表示出来。（只需要将第二行的 e 换成 U，根据最底行的 C 可得到不同财富水平下的效用。）例如，$U(4)=5$，然而表中所列的 C 没有将所有 C 能取的数值包含进去，因此此
236 表格不能完全满足投资者的要求。我们可以基于表 9—1 通过插值法构建新的效用函数表，比如说（尽管可能并不明显），

$$U(2)=\frac{3.4(2.00-1.96)+2.6(2.56-2.00)}{2.56-1.96}=2.65$$

参数族

另一种确定效用函数的简单方法是选择一组带参数的函数，然后再确定恰当的参数值。

此方法在运用时一般假定效用函数是指数形式的，即 $U(x)=-e^{-ax}$。因此我们只需确定参数 a，即效用函数的风险厌恶系数。此参数可以通过评价单个抽奖所得的确定性等价求得。比方说，我们可以询问一个投资者可以接受多高的确定性收入以代替以 50－50 的概率得到 100 万美元或者 10 万美元的彩票。假设此投资者给出的确定性财富是 40 万美元，我们有：

$$-e^{-400\,000a}=-0.5e^{-1\,000\,000a}-0.5e^{-100\,000a}$$

解得（通过一个反复的过程）$a=1/$（623 426 美元）。

许多投资者喜欢运用对数或幂形式的效用函数，因为这些函数具有风险

厌恶程度随着财富值上升而下降的性质。当然，对对数效用函数来讲，风险厌恶系数为 $a(x)=1/x$，对幂效用函数 $U(x)=\gamma x^{\gamma}$ 来讲，风险厌恶系数为 $a(x)=(1-\gamma)/x$。基于第 15 章的理论，我们可以有很好的依据来证明这些函数对关心财富值的长期增长的投资者，是比较合理的。

我们知道效用是总财富值的函数时，许多投资决策只涉及总财富值的小幅度增加。基于这种情况，我们可以使用一种折中的，或者说是复合的方法。如果 x_0 是初始财富，而 w 是增量，合适的效用函数是 $U(x_0+w)$。但我们可以直接运用指数效用函数 $-e^{-aw}$ 近似地评估增量的效用。不过，如果假设真实的效用函数是 $\ln x$ 时，在上述的指数近似式子中我们取 $a=1/x_0$。

例 9.4（曲线拟合） 例 9.3 表中的结果（用于风险投资者西柏）可以简洁地通过拟合一条曲线来描述。如果我们假设效用函数为幂函数，其形式为 $U(x)=ax^{\gamma}+c$，我们的标准化要求： 237

$$a+c=1$$

$$a9^{\gamma}+c=9$$

所以，$a=8/(9^{\gamma}-1)$，$c=(9^{\gamma}-9)/(9^{\gamma}-1)$。因此只需要决定 γ 的取值。我们可以找到最好的 γ 值来拟合，使表 9—1 中的 $U(C)$ 与 e 匹配。事实上我们求得（通过一个最优化电子表格）$\gamma=\frac{1}{2}$ 是最好的拟合。于是得出 $U(x)=4\sqrt{x}-3$，或者其等价形式 $V(x)=\sqrt{x}$。

问卷方法

个人的风险厌恶特性取决于其对风险的感受，他或她目前的财务状况（比如说净财产），预期的财务收入以及必需的支出（比如说，上大学的费用）和他或她的年龄。因此，为了推出合理的风险系数和效用函数，一种途径是发出类似图 9—5 所示的调查问卷，此问卷由菲德里蒂投资公司设计。

这给出了一个很好的量化评估，得出的结果可以用来确定一个想要的具体函数。

在问卷中，注意五项（第1，6，7，8，9）是关于投资者目前状况的，另外有五项（第2，4，5，11，12）是关于投资者的投资方法的（主要刻画其对风险的喜好程度），一项描述市场，还有一项询问管理的基金价值。这份问卷体现了这样的理念：风险忍耐程度不仅取决于投资者个人对风险的内部感觉，还取决于其财务环境。

238

1. 我从工作岗位上获得的工资和总收入在将来几年可能大幅度增加。 (a) 强烈反对 (b) 不同意 (c) 既不同意也不反对 (d) 同意 (e) 坚决同意	7. 到我希望退休剩下的年数大约是： (a) 当前退休 (b) 不足5年 (c) 5年～14年 (d) 15年～24年 (e) 25年或更长	评分系统 评分：每个答案“a”给1分，每个答案“b”给2分，每个答案“c”给3分，每个答案“d”给4分，每个答案“e”给5分。
2. 如果我要决定如何在退休计划中投资捐赠款，我将选择能够提供稳定的固定收益的投资。 (a) 坚决同意 (b) 同意 (c) 既不同意也不反对 (d) 反对 (e) 强烈反对	8. 我的总净值（我的资产价值减去债务价值）是： (a) 15 000美元以下 (b) 15 001美元～50 000美元 (c) 50 001美元～150 000美元 (d) 150 001美元～350 000美元 (e) 350 000美元以上	**46分或更高**：你可能很有钱并且有冒险的倾向。高风险投资包括增长型股票、开办公司、商品、垃圾债券和限制性合伙关系，股票期权和房地产投资也是高风险的。但要确信至少将一部分组合投资于较安全的资产。甚至你可能失去所有的价值并对高风险承受能力后悔。
3. 我相信在今天波动剧烈的股票市场上投资就像在拉斯维加斯玩轮盘赌一样——机会对你不利。 (a) 坚决同意 (b) 同意 (c) 既不同意也不反对 (d) 反对 (e) 强烈反对	9. 我节省下来以应付突然情况，如失业或意想不到的医疗费支出的资金等于： (a) 一个月的工资或更少 (b) 2个月～6个月的工资 (c) 7个月～1年的工资 (d) 1年～2年的工资 (e) 2年以上的工资	**41－45分**：你的风险承受能力高于平均水平并且可能有足够的时间和资金弥补损失。这类投资者明智地将高风险投资和低风险投资混合在一起。

4. 如果我要选择一只股票投资，我将寻找正在开发将来的热门产品（如下一代盘尼西林）的公司。 (a) 强烈反对 (b) 不同意 (c) 既不同意也不反对 (d) 同意 (e) 坚决同意	10. 我宁愿投资股票共同基金而不愿投资单个股票，因为共同基金提供专业管理和投资多样化。 (a) 坚决同意 (b) 同意 (c) 既不同意也不反对 (d) 反对 (e) 强烈反对	**36—40 分**：你的风险承受能力很一般，但不喜欢赌博。考虑一个长期投资的组合，这些投资过去的收益表现坚实可靠而稳定。蓝筹股、高级公司债券、共同基金和房地产都是可能的选择。
5. 如果我要为我孩子的大学教育基金选择一种投资，我将选择： (a) 存款证 (b) 政府支持的抵押证券或市政债券 (c) 公司债券 (d) 股票共同基金 (e) 商品期货合约	11. 我想并需要降低个人财务的总债务水平。 (a) 坚决同意 (b) 同意 (c) 既不同意也不反对 (d) 反对 (e) 强烈反对	**31—35 分**：你的风险承受能力低于一般水平，或者因为你的年龄或者因为你的收入和家庭环境。你的安全舒适的投资可能包括住房、高级债券、政府支持证券和联邦担保储蓄账户。
6. 下面的随从人员个数依赖于我给他们的财务待遇。 (a) 4 个或 5 个 (b) 3 个 (c) 2 个 (d) 1 个 (e) 只有我自己	12. 当进行投资时，如果能得到保障的话，我愿意满足于低收益，而不是不太确定的高收益。 (a) 坚决同意 (b) 同意 (c) 既不同意也不反对 (d) 反对 (e) 强烈反对	**30 分和 30 分以下**：实际上你没有风险承受能力。寻找政府支持的投资机会，如银行和节俭存款单、国库券和中长期国债。

图 9—5　风险小测试

投资者对待风险以及对待不同类型投资的态度，可以从类似此图所示的问卷的答案归纳出来。

资料来源：Fidelity Investments，1991. Developed in association with Andrew Comrey，Ph. D.，Professor of Psychology，University of California at Los Angeles.

9.5 效用函数与均值—方差准则*

我们可以通过下列两种方法中的任何一种使期望效用方法与马克维茨投资组合问题中的均值—方差准则一致：（1）使用二次效用函数；（2）假定刻画收入的随机变量均是正态分布（高斯）随机变量。我们下面讨论这两种特殊情况。

二次效用函数

二次效用函数可以定义为 $U(x)=ax-\frac{1}{2}bx^2$，其中 $a>0$，$b\geqslant 0$。如图9—6所示为函数的图像。

此效用函数仅在 $x\leqslant\frac{a}{b}$ 时才有意义，因为在此区域内函数是递增的。注意 $b>0$ 时，此函数是处处严格凹的，所以是风险厌恶的。

我们假定所有随机的收入变量取值都在 $x\leqslant\frac{a}{b}$ 范围内，也就是说，在二次效用函数有意义的区域内。

239

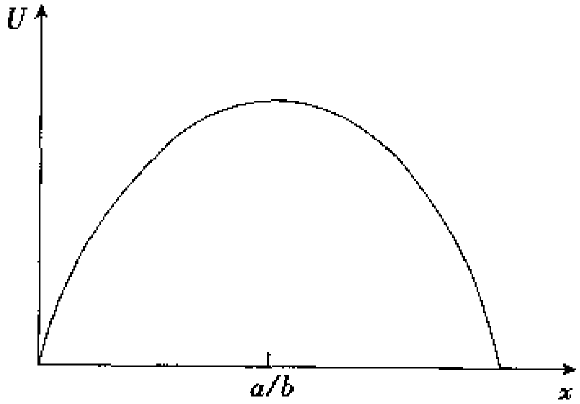


图 9—6 二次效用函数

此效用函数仅在 $x\leqslant\frac{a}{b}$ 时才有意义。

假定一个投资组合所能得到的财富值为随机变量 y，使用期望效用准则，我们用下式来评估此投资组合：

$$E[U(y)]=E(ay-\frac{1}{2}by^2)$$

$$=aE(y)-\frac{1}{2}bE(y^2)$$

$$=aE(y)-\frac{1}{2}b[E(y)]^2-\frac{1}{2}b\text{var}(y)$$

最优投资组合是在所有可能的 y 中使得上式的取值最大的组合。

可以看出这与均值—方差方法等价。首先，为了方便起见，假设初始财富值为 1，这样 y 刚好对应于收入 R。再假设解的期望财富值 $E(y)=M$。显然地，在所有使得 $E(y)-M=1+m$（m 是期望收益率）的 y 中，我们需要找到使得 $\text{var}(y)$ 最小的 y。由于 $y=R$，我们可以得出结论：得出的解一定对应于均值—方差有效点。

取不同的 a 和 b 可以得出不同的均值—方差有效点。同样，如果初始财富值不是 1，可以加入一个不同的系数（见练习 5）。

正态分布收入

如果所有的收入都是正态分布的随机变量，均值—方差准则也与任何风险厌恶效用函数的期望效用方法等价。为推出上述结论，我们先选择一个效用函数 U。假设一个随机财富变量 y 服从均值为 M，标准差为 σ 的正态分布。由于概率分布完全由 M 和 σ 来定义，很显然可以知道期望效用是 M 和 σ 的函数，即：

$$E[U(y)]=f(M,\sigma)$$

（也许不能将此函数表示成封闭形式，但是这并没有关系。）如果 U 是风险厌恶的，那么 $f(M,\sigma)$ 会关于 M 递增，关于 σ 递减。现在假设所有资产的收益都是正态分布变量。于是（也是最关键的性质）这些资产的任何线性组合也都是正态分布的变量。其期望和标准差由不同的线性组合方式来决定 240

(见附录 A)。因此这些资产组成的任意投资组合都只有正态随机变量收益。所以此投资组合问题等价于使 $f(M, \sigma)$ 最大化的资产组合选择。对于一个风险厌恶效用函数，这再次表明在任意给定的均值水平下，应该使方差最小化。换句话说，它的解必须是均值—方差有效的。因此在所有的收入是正态分布的情况下均值—方差准则是适用的。

9.6 线性定价

现在我们转而考虑证券定价的一个基本性质——也就是线性性。我们将会发现这一性质有许多深刻的含义，并且可以解释在前面章节所得出的许多理论。(本章剩下的章节最好在学习完第三部分后进行阅读。)

我们正式将证券 (security) 定义为一个随机收入变量，比如说，为 d。报酬只有到期末才能确定并得到。(我们可以将此报酬理解为股利，用字母 d 是有道理的。) 证券的价格以 P 表示。比如说，我们设想某证券在明天下雨的情况下，支付 $d=10$ 美元，如果晴天的话，$d=-10$ 美元，初始价格为 0。(这相当于一个赌注为 10 美元的，对明天是否下雨的赌局) 或者我们考虑一份 IBM 的股票，其年末的价值未知，报酬 d 是随机的，价格是 IBM 股票的现行价格。

A 型套利

证券的线性定价来自于这样一个假定：基本套利不可能存在。我们按下面所述的方式定义基本套利：如果一种投资方式可以立刻获得正的收益而没有未来的支付 (或正或负)，那么这种投资就称为 **A 型套利 (type A arbitrage)**。

换句话说，如果你进行 A 型套利，可以立即获得收入而无须支付任何东西。你投资于价格为负的证券而此证券支付给你的报酬为 0。很显然，假

定不存在此类事情是合理的。

为了证明 A 型套利不存在的假设可以推得证券的线性定价，我们假设 d 是价格为 P 的证券。考虑证券 $2d$，此证券总是恰好支付证券 d 支付的两倍。假设它的价格为 P'，这里 $P'<2P$。然后我们可以以 P' 购买此种双份股票然后进行分拆，并以价格 P 分别出售分拆所得的两份证券，于是可以获得净利润 $2P-P'$，并且没有进一步的支付义务，因为我们已经将所购得的证券出售掉。我们可以立即获得利润，也就是找到一种 A 型套利方式。反过来推导，也可以得出结论，即双份证券的价格不能高于 $2P$。我们的结论可以扩展到任意实数 α，即 αd 的价格必须是 αP。

同样，如果 d_1 和 d_2 分别是价格为 P_1 和 P_2 的证券，那么证券 d_1+d_2 的价格必须是 P_1+P_2。因为如果 d_1+d_2 的价格 $P'<P_1+P_2$，那么我们就可以以 P' 购买此组合证券，然后拆成 d_1 和 d_2，并分别以 P_1 和 P_2 出售，于是可以获得净利润 $P_1+P_2-P'>0$。同前面所述的一样，如果 $P'>P_1+P_2$ 这个推导可以反过来。所以 d_1+d_2 的价格必定为 P_1+P_2。一般地讲，$\alpha d_1+\beta d_2$ 的价格必然等于 $\alpha P_1+\beta P_2$，这就是**线性定价（linear pricing）**[4]。 241

除了 A 型套利不存在这一假定外，前述的推导还假定了市场的一个理想化功能：它假定了证券可以被任意地分拆，并且不存在交易成本。在实际中，这些假设并不能完全满足，但是在考虑流动性很高的市场中的大批量地交易证券时，可以认为这些假设近似地得到满足。

投资组合

现在假设有 n 种证券 d_1，d_2，…，d_n。这些证券的一个投资组合由一个 n 维向量 $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ 来描述。第 i 个元素 θ_i 表示投资组合中证券 i 的数额，于是投资组合的报酬如下：

$$d=\sum_{i=1}^{n}\theta_i d_i$$

在不存在 A 型套利的假定下，投资组合 θ 的价格可以由线性性得出，于是总价格是：

$$P = \sum_{i=1}^{n} \theta_i P_i$$

这是线性定价的更一般的表达形式。

回忆一下 CAPM 的定价公式是线性的。

B 型套利

我们可以确认另一种形式的套利。如果一种投资的成本非正，但获得正收益的概率为正，而获得负收益的概率为 0 时，我们就称此类投资为 **B 型套利（type B arbitrage）**。

换句话说，B 型套利是指投资者支付 0（或负）但可以以某一概率获得收益。比如说一张免费的彩票——你无需为此彩票支付任何东西，但是却有机会获得大奖。显然，在证券市场上此类彩票很少见。

两种套利方式仅以明确的定义相区分。在进一步的讨论中，假设 A 型
242 和 B 型套利都不存在，我们就说**不存在套利机会（no arbitrage possibility）**。然而，我们已经证明 A 型套利不存在可推出线性定价。那么再排除 B 型套利后，可以得出更强的结论，如下节所述。

9.7 投资组合选择

现在我们准备运用本章前面章节所得出的结论，考虑一位投资者的投资组合问题，此投资者使用期望效用函数准则对投资选择进行排序。

若 x 是一个随机变量，记 $x \geqslant 0$ 表示此随机变量不小于 0。记 $x > 0$ 表示此随机变量不小于 0，并且以一定的正的概率严格为正。

假设某位投资者的效用函数 U 严格递增，并且初始财富值为 W。有 n

种证券d_1，d_2，…，d_n。投资者希望构建一个投资组合使得最终财富x的期望效用值最大。我们以$\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$定义此投资组合，$\theta$中的各元素表示不同证券的数额。于是此投资者的问题即为：

$$\max E[U(x)] \tag{9—3a}$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{n}\theta_i d_i = x \tag{9—3b}$$

$$x \geqslant 0 \tag{9—3c}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i P_i \leqslant W \tag{9—3d}$$

此问题可以表述为：投资者必须选择一个总成本不高于初始财富值W的投资组合（最后一个约束条件）；期末的财富值x由投资选择定义（第一个约束）；且对于任何的可能结果x必须非负（第二个约束条件）；投资者希望使期末财富值的期望效用最大化。

⇒**投资组合选择定理**（portfolio choice theorem）：*假设$U(x)$连续递增且当$x\to\infty$时趋于无穷。再假设存在投资组合θ^0，使得$\sum_{i=1}^{n}\theta_i^0 d_i>0$，那么当且仅当不存在套利机会时，(9—3a)所表述的最优投资组合问题有解。*

证明：我们只证明定理的必要性。假设存在由组合$\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$产生的A型套利机会。应用组合$\theta$，可以获得额外的初始财富却不影响最终的收益。于是我们可以购买任意数额的投资组合θ^0。这表明$E[U(x)]$没有最大值，因为给定任一可行投资组合，此投资组合可以追加任意数额θ^0 243
以增加$E[U(x)]$。如果存在B型套利机会，我们就可以获得（以零或负成本）一项收益为$\bar{x}>0$的资产（即$\bar{x}$为正的概率非零）于是我们可以获得任意数额的此类资产以随心所欲地增加$E[U(x)]$。所以如果（9—3a）有解，则A型与B型套利均不存在。

我们可以在上述的最优解存在性的结论上更进一步刻画此最优解。假设

不存在套利机会，所以存在最优投资组合，我们以 θ^* 表示。再假设相应的收入 $x^* = \sum_{i=1}^{n}\theta_i^* d_i$ 满足 $x^*>0$。我们可以立即推得最优解 θ^* 使得不等式 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i P_i \leqslant W$ 的等号成立。否则的话，可以加入一定的比例为正的投资组合 θ^0（或者 θ^*），以使结果得以改进。

为推得最优解所需满足的等式，将 $x=\sum_{i=1}^{n}\theta_i d_i$ 代入目标函数，并忽略 $x\geqslant 0$，因为我们已经假定它满足严格的不等式。于是问题转化成：

$$\max E\left[U\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i d_i\right)\right]$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{n}\theta_i P_i = W$$

对约束条件引入拉格朗日乘数 λ，并使用最优投资组合的收入 $x^* = \sum_{i=1}^{n}\theta_i^* d_i$，我们可以通过对下面拉格朗日函数的求导获得必要条件（见附录 B)

$$L = E\left[U\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i d_i\right)\right]-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i P_i - W\right)$$

对于每个 θ_i，有：

$$E[U'(x^*)d_i]=\lambda P_i \qquad (9\text{—}4)$$

其中 $i=1，2，\cdots，n$。这代表 n 个方程，最初的预算约束 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i P_i = W$ 是另一个方程，总共就有（$n+1$）个方程。而未知数为 $\theta_1，\theta_2，\cdots，\theta_n$ 和 λ 也是（$n+1$）个。可以证明 $\lambda>0$。

这些方程十分重要，因为它们有两个作用。首先，也是很明显的，它们给出了足够的等式来求解最优投资组合问题。在后面的例 9.5 中我们会进行演示。其次，既然这些等式在不存在套利机会的情形下都是正确的，那么它们就给出了无套利假设下，有关证券价格的很有价值的刻画，在下一节我们会解释这些等式在这方面的运用。

如果存在无风险资产，总收益为 R，应用于式（9—4）有 $d_i=R$ 和

$P_i=1$。因此有：

$$\lambda=E[U'(x^*)]R$$

将此 λ 值代入（9—4）可得： 244

$$\frac{E[U'(x^*)d_i]}{RE[U'(x^*)]}=P_i$$

由于这些等式的重要性，我们特别地加以强调：

⇒**投资组合定价方程（portfolio pricing equation）** *如果 $x^*=\sum_{i=1}^{n}\theta_i^* d_i$ 是最优投资组合问题（9—3a）的解，于是对于 $i=1, 2, \cdots, n$，*

$$E[U'(x^*)d_i]=\lambda P_i \tag{9—5}$$

其中 $\lambda>0$。如果存在收益为 R 的无风险资产，于是

$$\frac{E[U'(x^*)d_i]}{RE[U'(x^*)]}=P_i \tag{9—6}$$

其中 $i=1, 2, \cdots, n$。

例 9.5（电影风险投资） 一位投资者考虑进行一个娱乐电影的风险投资。他知道这类投资风险很高。在这个例子中，他了解到此投资基本上有三种可能的结果，如表 9—2 所示：（1）以 0.3 的概率使投资翻 3 倍；（2）以 0.4 的概率使投资收入等于其初始投资；（3）以 0.3 的概率损失全部初始投资。在 2 年后会发生其中的一个结果。在此期间他还可以进行无风险投资，在 2 年后获得 20%的无风险收益率。他想知道他是否应投资于电影风险投资，如果应该的话，应投入多少？

这是一个很实际的问题的简单化。期望收入是 $0.3\times3+0.4\times1+0\times0.3=1.3$，稍微高于无风险条件下可得的收益。你应该分配多少资金于这样的风险投资呢？仔细考虑一下这个问题。

此投资者决定使用效用函数 $U(x)=\ln x$，一般来讲这是一个很好的选择（我们将在第 15 章进行解释）。他的问题是选择 θ_1 和 θ_2 投资于两种可获

245 得的证券——电影风险投资和无风险投资。每种投资单位价格为 1。于是此问题转化为求（θ_1，θ_2），使得：

表 9—2 **电影风险投资**

	收益	概率
高度成功	3.0	0.3
中度成功	1.0	0.4
失败	0.0	0.3
无风险	1.2	1.0

有三种可能的收益结果与相应的概率。另外也可以投资于无风险资产获得总收益 1.2。

$$\max\left[0.3\ln(3\theta_1+1.2\theta_2)+0.4\ln(\theta_1+1.2\theta_2)+0.3\ln(1.2\theta_2)\right]$$

$$\text{s.t.}\quad \theta_1+\theta_2=W$$

由（9—5）的必要条件或通过直接计算，可得：

$$\frac{0.9}{3\theta_1+1.2\theta_2}+\frac{0.4}{\theta_1+1.2\theta_2}=\lambda$$

$$\frac{0.36}{3\theta_1+1.2\theta_2}+\frac{0.48}{\theta_1+1.2\theta_2}+\frac{0.36}{1.2\theta_2}=\lambda$$

这两个等式，再加上约束条件 $\theta_1+\theta_2=W$，就可以解出未知数 θ_1、θ_2 和 λ（必须解一个二次方程）。结果为 $\theta_1=0.089W$，$\theta_2=0.911W$ 和 $\lambda=1/W$。换句话说，投资者应分配 8.9% 的财富于此风险投资，剩下的部分投资于无风险证券。

例 9.6（残值投资权） 在考虑投资于电影风险投资的同时，投资者发现还可以对电影残值进行追加投资，这在电影十分成功时能得到高收益。投资于残值的每一美元在电影取得巨大成功时能获得 6 美元，而在另两种情形下只能得到 0。这位投资者应该怎么做?

他必须根据这个新的信息来重新求解投资组合最优化问题。现在有三种证券：初始的电影风险投资、无风险投资和残值投资权利，他分别购买的数

额为 θ_1、θ_2 和 θ_3。于是可得必要的方程式为：

$$\frac{0.9}{3\theta_1+1.2\theta_2+6\theta_3}+\frac{0.4}{\theta_1+1.2\theta_2}=\lambda$$

$$\frac{0.36}{3\theta_1+1.2\theta_2+6\theta_3}+\frac{0.48}{\theta_1+1.2\theta_2}+\frac{0.36}{1.2\theta_2}=\lambda$$

$$\frac{1.8}{3\theta_1+1.2\theta_2+6\theta_3}=\lambda$$

加上财富约束条件 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=W$，这些等式可以解出 $\theta_1=-1.0W$，$\theta_2=1.5W$，$\theta_3=0.5W$ 和 $\lambda=1/W$。换句话说，此投资者应卖空普通的电影风险投资，且卖空金额等于其初始的总财富值，然后再投资于另两种证券。

9.8 对数最优定价*

前一节所得的投资组合定价公式为：

$$E[U'(x^*)d_i]=\lambda P_i \quad i=1,2,\cdots,n \tag{9—7}$$

此公式可以衍生出许多重要结论，它可以转化为一系列简便的专门的定价公式。本节提出一种十分完美的公理。

这些定价关系的主要思想就是将上述等式转化成价格 P_i 的表达式。我 246
们设定价格 P_i 已知后推出了最优的 x^*。现在我们要用最优的 x^* 反过来推出价格，这就是基本思想。

我们选择 $U(x)=\ln x$ 和 $W=1$ 作为特例进行研究。x^* 是使期末财富的对数的期望值最大的，与投资组合相关的期末财富变量。在这个特例中，我们可以用 R^* 来表示 x^*。其中 R^* 是使对数效用最优的收益。我们称 R^* 为对数—最优收益（log-optimal return）。

由于 $\mathrm{d}\ln x/\mathrm{d}x=1/x$，定价公式（9—7）变成：

$$E\left(\frac{d_i}{R^*}\right)=\lambda P_i \tag{9—8}$$

对所有 i 都成立。由于此等式对任何一个证券 i 都成立，那么通过线性性，我们知道（9—8）对对数—最优投资组合本身也成立。由于此投资组合价格为 1，我们就可以得出：

$$1=E\left(\frac{R^*}{R^*}\right)=\lambda$$

这样就得出了此例中的 λ 值。

如果存在无风险资产，那么定价公式（9—7）同样对它有效。设无风险资产的报酬等于 1，价格为 $\frac{1}{R}$，其中 R 是总的无风险收益。于是就有：

$$E(1/R^*)=1/R$$

所以我们得出结论即 $1/R^*$ 的期望值等于 $1/R$。

代入 $\lambda=1$，定价等式（9—8）得：

$$P_i=E\left(\frac{d_i}{R^*}\right)$$

由于这对任一证券 i 都成立，由线性就有：此等式对任意投资组合都成立。所以我们就有下面的一般定价公式：

⇒***对数—最优定价（log-optimal pricing）*** *任一股利为 d 的证券（或投资组合）的价格为：*

$$P=E\left(\frac{d}{R^*}\right) \tag{9—9}$$

其中 R^* 是对数—最优投资组合的收益。

这是不是一个既简单又好记的结论？这个公式与 d 确定情况下的定价公式很类似，因为在 d 确定的情况下 $P=d/R$。在随机的例子中我们只需以 R^* 代替 R 然后再取期望即可。如果 d 刚好是确定性的，这个更具一般性的公式就变成上述简单公式，因为 $E(1/R^*)=1/R$。

例 9.7（电影变化）假定设计一种新的证券，此证券的收入只取决于前述的电影风险投资的可能的结果。比如说，可以设计一种即使在风险投资失败的情况下仍然有收益的证券。这种一般证券的收入 d^1、d^2 和 d^3 分别对应于高度成功、中度成功和失败。我们可以使用例 9.6 中计算出来的对数–最优投资组合来计算此类证券的价格。 247

注意我们不能使用由例 9.5 所计算出的简单的对数一最优投资组合，因为在例 9.5 中仅有两种证券即电影风险投资和无风险资产。如果新证券可以表示成这两种证券的组合，那么我们可以运用简单形式的对数一最优投资组合来定价。但是如果是一般形式的新证券的话，我们必须使用例 9.6 所计算出的对数一最优投资组合，因为例 9.6 包含了三种可能性的三种证券。任何新证券都将是这三种证券的组合。

对数一最优投资组合有下面的收益：

	高度成功	中度成功	失败
R^*	1.8	0.8	1.8

这些收益值由例 9.6 中所求得的 θ_i 计算而得。比如，在十分成功时，$R^*=-1.0\times3+1.5\times1.2+0.5\times6=1.8$。

收益为 d^1、d^2 和 d^3 的证券的价值为 $E(d/R^*)$，即

$$P=0.3\frac{d^1}{1.8}+0.4\frac{d^2}{0.8}+0.3\frac{d^3}{1.8}$$

你可以将原来三种证券的收益值代入此公式，它们的价格应该是 1。比如说，对初始的风险投资，$P=0.3\frac{3}{1.8}+0.4\frac{1}{0.8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$。

在第 15 章我们会回过头来讨论对数一最优等式。现在暂时地认为它是一般的定价公式的特殊形式——用 $\ln x$ 作为效用函数后所得的公式。

记住所进行的推导，我们运用证券的初始价格求得 x^*。现在又用 x^* 重

新推出这些价格。然而由于定价是线性的，我们可以运用相同的定价公式求所有初始证券的线性组合的证券价格。

如果新的证券 d 不是初始证券的线性组合怎么办？我们依然可以使用此公式。但是这种方法求出的价格可能并不正确。此公式仅对初始证券以及这些初始证券的线性组合形式有效。

9.9 有限状态模型

假设在进行一项具体投资时，可能出现的结果可以由有限数量的可能**状态**（**state**）来描述（如图 9—7）。在初始时点，我们只知道其中一个状态会发生。而到期末时才会知道哪个发生。有时这些状态描述某种物理现象。举个例子，我们可以为明天的天气定义两个状态：晴或者雨。今天我们不知道明天会发生哪种状态，但是一到明天，这种不确定性的结果就被揭晓了。或
248 者，举另一个例子，这些状态可以对应于不同的经济事件，如在电影风险投资例子所述，就有三种可能的状态：高度成功，中度成功和失败。正规地，我们使用数字 $\{1, 2, 3, \cdots, S\}$ 来对这些状态进行编号。

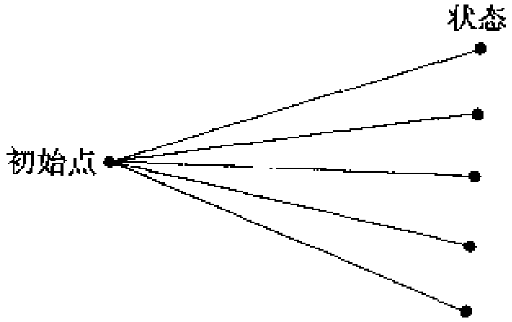


图 9—7 状态

不同的状态可以用简单而有效的方法描述不确定性。

状态以最基本的方式定义不确定性。我们甚至无需知道各个状态发生的概率，尽管这是我们后来要做的。实际上，本节的一个重要观点就是：许多结论可以在不提及概率的情况下得出。在某种重要意义下，定价关系同概率无关。

证券（security）可以定义为对应其状态的一系列的收入——一种收入对应于一个可能的状态（仍然与概率无关）。这样证券就可以由向量 $d=\langle d^1, d^2, \cdots, d^S\rangle$来表示。我们使用符号〈〉来区别普通的向量，因为这些向量的元素都是状态报酬。在此例中，元素 d^s（$s=1, 2, \cdots, S$）表示在状态 s 发生时的报酬。同前面一样，以 P 表示证券价格。在我们前面的9.6节开始所举的例子中，某证券在明天下雨的情况下支付10美元，而在明天天晴的情况下支付－10美元（价格为0），也可以用本节的方法来表示，并且无需说明各个状态发生的概率。我们可以以〈10，－10〉来表示此证券。

状态价格

特殊形式的证券是只在一种状态下才有收入的证券。实际上，我们可以定义 S **基本状态证券（elementary state security）** $e_s=\langle 0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0\rangle$，其中1是第 s 个元素（$s=1, 2, \cdots, S$）。如果存在这样一种证券，我们记其价格为 Ψ_s。

如果整个系列的状态证券组存在（每一种对应一个状态），那么就可以很容易地决定另外任何一种证券的价格。证券 $d=\langle d^1, d^2, \cdots, d^S\rangle$ 可以表示成基本状态证券的组合：$d=\sum_{s=1}^{S} d^s e_s$，再根据定价的线性性，d 的价格应该是：

$$P=\sum_{s=1}^{S} d^s \Psi_s \tag{9—10}$$

如果基本状态证券不存在，我们也可能通过对确实存在的证券进行组合来人为地构建出基本状态证券。比如，在两状态世界中，如果〈1，1〉和〈1，－1〉存在，那么此两种证券之和的二分之一相当于第1个基本状态

证券〈1，0〉。

正状态价格

249 如果整个系列的基本状态证券存在，或者可以通过已存在的证券组合构建而得，那么很重要的一点是它们的价格必须为正，否则的话就存在套利的机会。为了证明这一点，我们假定基本状态证券的价格为零或者为负。那么这种证券就表示可以以一定的概率获得收入（如果状态 s 发生，就有收入 1），而其成本却非正。这是 B 型套利。所以如果基本状态证券存在或者可以被其他证券构建出来，那么它们的价格必须为正以排除套利的可能性。

实际上，通过下述定理我们可以知道无套利机会与正的状态价格的存在性是等价的。

⇒***正状态价格定理***（*Positive state prices theorem*）*当且仅当没有套利机会时，正状态价格组存在。*

证明：首先假设存在正的状态价格。很显然不存在套利机会。为证明这一点，假定证券 d 可以以 $d \geqslant 0$ 构建。我们有 $d=\langle d^1, d^2, \cdots, d^S \rangle$，其中 $d^s \geqslant 0 (s=1, 2, \cdots, S)$。那么 d 的价格是 $P=\sum_{s=1}^{S} \Psi_s d^s$，由于所有的 $\Psi_s > 0$，我们可得 $P \geqslant 0$。事实上，如果 $d \neq 0$，就有 $P > 0$，$d=0$ 时有 $P=0$。所以不存在套利机会。

为了证明充分性，我们假设套利机会不存在，然后利用 9.7 节的投资组合选择问题中的结论。这个证明需要一些另外的假设。（在练习 12 中简述了更一般的证明）我们假设存在投资组合 θ^0，使得 $\sum_{i=1}^{n} \theta_i^0 d_i > 0$。确定正的概率 $p_s (s=1, 2, \cdots, S)$ 对应不同的状态，其中 $\sum_{s=1}^{S} p_s = 1$。然后选择一个严格递增的效用函数 U。由于不存在套利，由 9.8 节中的投资组合选择定理，可以推出存在最优投资组合。我们假设最优收入 $x^* > 0$。由必要条件

(9—5) 可得对任意价格为 P 的证券 d：

$$E[U'(x^*)d]=\lambda P \qquad (9-11)$$

其中 x^* 是最优投资组合的（随机）收人，$\lambda>0$ 是拉格朗日乘数。

如果我们进行期望效用的运算，将式（9—11）展开，于是就有：

$$P=\frac{1}{\lambda}\sum_{s=1}^{S}p_sU'(x^*)^sd^s$$

其中 $U'(x^*)^s$ 是在状态 s 下的 $U'(x^*)$ 的值。

现在我们定义：

$$\Psi_s=\frac{p_sU'(x^*)^s}{\lambda} \qquad (9-12)$$

可以得出 $\Psi_s>0$，因为 $p_s>0$，$U'(x^*)^s>0$，$\lambda>0$，于是我们有： 250

$$P=\sum_{s=1}^{S}\Psi_sd^s$$

这表明 $\Psi_s(s=1, 2, \cdots, S)$ 是状态价格，且都是正的。

注意此定理仅说明这种正的价格存在，但并没有说明它们是惟一的。如果存在比证券种类更多的状态，就可能有不同的方法来确定状态价格，以使其同现存证券的价格一致。此定理仅说明其中一种方法的状态价格为正。

例 9.8（普通的电影风险投资） 再次考虑原始的电影风险投资，存在三种状态，但是只有两种证券：原始风险投资和无风险投资。因此状态价格不惟一。

我们利用式（9—12）和例 9.5 中得出的 θ_i 值和 $\lambda=1$ 可以得出一系列的正状态价格。我们有：

$$\Psi_1=\frac{0.3}{3\theta_1+1.2\theta_2}=0.221$$

$$\Psi_2=\frac{0.4}{\theta_1+1.2\theta_2}=0.338$$

$$\Psi_3=\frac{0.3}{1.2\theta_2}=0.274$$

这些状态价格只可用来为原来两种证券的组合进行定价。它们不能运用于，比如，购买残值投资权的定价。我们可以代入检查初始风险投资价格是否为 1，显然 $P=3\times0.221+0.338=1$。

例 9.9（扩展的电影风险投资） 现在考虑有三种证券的电影风险投资，如例 9.6 所讨论的，加入了残值投资权。由于有三种状态和三种证券，那么求得的状态价格是惟一的。实际上通过设定三种证券的价格都为 1，我们就可以求得状态价格：

$$3\Psi_1+\Psi_2=1$$

$$1.2\Psi_1+1.2\Psi_2+1.2\Psi_3=1$$

$$6\Psi_1-1$$

此方程组有解

$$\Psi_1=\frac{1}{6},\Psi_2=\frac{1}{2},\Psi_3=\frac{1}{6}$$

于是我们得出收入为 $\langle d^1, d^2, d^3\rangle$ 的证券的价格为：

$$P=\frac{1}{6}d^1+\frac{1}{2}d^2+\frac{1}{6}d^3$$

251 将此式子同例 9.7 所得出的 P 相比较，它们是完全一样的。

注意这里所得的状态价格，虽然同前例中所得的结果不同，但与原来的电影风险投资只有两种证券的证券组合的价格相同。比如说，基本风险投资的价格是 $P=\frac{3}{6}+\frac{1}{2}=1$。

9.10 风险中性定价

假设存在正状态价格 $\Psi_s(s=1, 2, \cdots, S)$，于是任何证券 $d=\langle d^1, d^2, \cdots, d^S\rangle$ 的价格由下式决定：

$$P=\sum_{s=1}^{S}d^s\Psi_s$$

我们现在将这些状态价格标准化使其和为1。因此我们令 $\Psi_0=\sum_{s=1}^{S}\Psi_s$，$q_s=\Psi_s/\Psi_0$ 。于是定价公式变为：

$$P=\Psi_0\sum_{s=1}^{S}q_s d^s \tag{9—13}$$

可以将 $q_s(s=1,2,\cdots,S)$ 看作是（假想的）概率，因为它们都为正且和为1。使用这些数值作为概率，我们可以得出定价公式为：

$$P=\Psi_0\hat{E}(d) \tag{9—14}$$

其中 $\hat{E}$ 是关于假想概率 q_s 的期望。

Ψ_0 值有一个很有用的解释。因为 $\Psi_0=\sum_{s=1}^{S}\Psi_s$，我们知道 Ψ_0 是证券 $(1,1,\cdots,1)$ 的价格，即此证券在任何一种状态下都支付1——是无风险债券。根据定义，它的价格是 $1/R$，其中 R 是无风险收益率。于是我们可以将定价公式化成：

$$P=\frac{1}{R}\hat{E}(d) \tag{9—15}$$

此等式说明证券的价格等于按假想概率计算的期望报酬的贴现值。我们称之为**风险中性定价（risk-neutral pricing）**，因为它刚好是真实概率为 q_s，并利用风险中性效用函数（即线性效用函数）推出的定价公式。我们也称 $q_s(s=1,2,\cdots,S)$ 为**风险中性概率（risk-neutral probabilities）**。

这种技巧由于过于简单而具有迷惑性，在以后的章节里，我们会发现由它可以得出许多很有意义的结论。实际上本书第三部分的主要部分都是对这种简单思想的深入的讨论。下面有三种求风险中性概率 q_s 的方法：

(a) 用无风险利率乘以正状态价格可以得出风险中性概率。这是本节开始时我们对风险中性概率的定义。

(b) 如果正的状态价格是由投资组合问题求出的，且存在无风险资产， 252
我们可以运用式（9—6）定义：

$$q_s = \frac{p_s U'(x^*)^s}{\sum_{t=1}^{S} p_t U'(x^*)^t} \qquad (9—16)$$

上述公式在我们以后的讨论中很有用。

(c) 如果存在 n 种状态以及至少 n 种价格已知的相互独立的证券，且不存在套利机会，那么风险中性概率可以直接由解下述方程组求得：

$$P_i = \frac{1}{R}\sum_{s=1}^{S} q_s d_i^s, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

此方程组共有 n 个未知的 q_s。

例 9.10（电影风险投资） 我们得出全额的电影风险投资的状态价格（三种证券）为

$$\Psi_1 = \frac{1}{6}, \Psi_2 = \frac{1}{2}, \Psi_3 = \frac{1}{6}$$

乘以无风险利率 1.2，我们可得风险中性概率：

$$q_1 = 0.2, q_2 = 0.6, q_3 = 0.2$$

于是收入为 $\langle d^1, d^2, d^3\rangle$ 的证券的价格为：

$$P = \frac{0.2d_1 + 0.6d_2 + 0.2d_3}{1.2}$$

再次要说明的是，此定价公式仅对原来的三种证券及此三种证券的组合有效。推导出的风险中性概率可以用于对原来证券的定价。

风险中性定价理论可以推广至一般性的没有假定状态数量有限的情况。(见练习 15。)

9.11 定价方法的选择*

让我们回顾已有的定价方法。假设一个存在 n 种价格已知的证券的世界，在此世界中加入一种新的证券，新证券由期末的（随机）现金流 d 定

义。那么如何确定新证券的正确价格？这里列了五种可供选择的用以确定其价格的方法，在每种方法中 R 是单期的无风险收益率。

1. 期望值贴现：

$$P=\frac{E(d)}{R}$$

2. CAPM 定价： 253

$$P=\frac{E(d)}{R+\beta(\bar{R}_M-R)}$$

其中 β 是资产相对于市场的贝塔值，R_M 是市场组合的收益率，我们假设市场组合即为马克维茨风险资产基金。

3. CAPM 的确定性等价形式：

$$P=\frac{E(d)-\mathrm{cov}(R_M,d)(\bar{R}_M-R)/\sigma_M^2}{R}$$

4. 对数一最优定价：

$$P=E\left(\frac{d}{R^*}\right)$$

其中 R^* 是对数—最优投资组合的收益率。

5. 风险中性定价：

$$P=\frac{\hat{E}(d)}{R}$$

其中 $\hat{E}(d)$ 是关于风险中性概率的期望值。

第 1 种方法是确定性情形下的定价方法的简单推广。然而，一般地，这种方法所得出的价格一般偏高（至少对那些同其他资产存在正相关关系的资产）。其价格必须降低。第 2 种方法所得的价格低于第 1 种方法得到的价格，因为它在分母中增加了一项，这种方法本质上提高了贴现率。第 3 种方法所得的价格也低于第 1 种方法所得的结果，因为它在分子中减去一项，使用了确定性等价进行贴现。第 4 种方法所得的价格也比第 1 种方法得到的结果低，因为它将收益 R^* 放进期望的计算中。尽管 $E(1/R^*)=1/R$，但是我们

由此方法所得的结果总是低于第1种方法所得的价格。第5种方法通过改变求期望值的概率求得的价格低于第1种方法求得的价格。

方法2—5代表修正方法1以获得更合适的结果的四种不同方法。这四种修正方法之间有什么差别呢？也就是说，从不同公式求得的价格将会怎样不同呢？仔细考虑一下。当然，答案是如果新证券是原来的 n 种证券的线性组合，所有四种修正方法给出相同的价格。每种方法都是表示线性定价的方法。

如果 d 不是 n 种证券的线性组合，那么由不同的方法所确定的价格就不一样，因为这些公式被应用于推导它们时所限定的范围之外。方法2和3所得出的结果总是一致。方法4和5（原文为3和4，疑有误。——译者注）在运用对数 最优公式计算风险中性概率时所得的结果一致。否则，它们得出的价格也不相同。

如果现金流 d 同 n 种初始证券完全独立，那么所有五种方法，包括第一种，所得出的价格都一样。(请读者自行检验!)

254 在最优投资组合问题中具体指定其他形式的效用函数后，我们可以得到更多的定价方法。对于 n 种初始证券，其价格同所运用的效用函数互相独立。不过，我们这里所提出的方法看起来是最为有用的方法。

9.12 小结

本章主要讲述一般性的理论，所以在一定程度上比其他的章节更加抽象，但是本章所提出的研究工具十分有力。读者学习完第三部分后应该回顾一下本章的内容，在学习完第四部分后应再次回顾一下本章。

本章前一部分讲述期望效用理论基础，效用函数解释了金融决策中的风险厌恶问题，并提供了同均值一方差框架相比更加一般化和更加有用的方法。在此方法中，不确定的期末财富水平通过计算财富效用的期望值来进行

评估。如果某种随机财富水平的期望效用高于另一种，那么前者会更受投资者喜爱。一般效用函数都表示成解析形式。比较常用的效用函数有：指数形式、对数形式、幂形式和二次形式。效用函数 $U(x)$ 可以转化成 $V(x)=aU(x)+b(a>0)$，而且新函数 V 在做金融决策时与 U 等价。

一般假定效用函数是递增的，因为高财富值比低财富值更受欢迎。凹效用函数体现了风险厌恶原则。如果效用函数可导，且是递增、凹的，就有 $U'(x)>0$，$U''(x)<0$。

对应于随机财富水平，存在数量 C 称为此随机财富水平的确定性等价。确定性等价是效用函数为 U 的投资者可以接受的，用以代替给定的随机财富水平的最小财富值（非随机）。即 C 被定义为使 $U(C)$ 等于给定的随机财富水平时期望效用的财富值。即定义 C 为这样的财富值，它能使 $U(C)$ 等于由随机财富水平确定的期望效用。

为了运用效用函数方法，就必须选择合适的效用函数。一种选择方法是评估不同彩票的确定性等价，然后反过来求对应这些确定性等价的效用函数。

效用函数时常被假定为指数形式 $-e^{-ax}$（其中 a 近似等于财富值的倒数）、对数形式 $\ln x$ 或幂函数 $\gamma x^{\gamma}(\gamma<1$ 接近于 0)。这些参数可以通过抽奖结果来决定，也可以通过关于投资者财务状况和对待风险态度的问卷调查来求得。

本章第二部分简述线性定价的一般理论。在完全市场中（无交易成本，并且可以购买或者出售任意数额的证券），证券价格必须是线性的——就是说，大量证券组合的价格等于组合中各种证券的价格之和——否则的话，就存在套利机会。

本章区分了两种形式的套利机会：A 型套利，消除不花一分成本而能立刻得到收益的可能性；B 型套利，消除不需现在的成本而在将来得到收益的可能性。排除 A 型套利就可以推得线性定价，而排除 A、B 型套利就意 255
味着最大化期望效用的投资组合问题存在明确的解。

最优投资组合问题可以被运用于解决实际的投资问题（比如电影风险投资问题）。进一步地，此问题的必要条件可以反过来考虑，将证券价格表示成一个期望值。选择不同的效用函数会得出不同的定价公式，但是当应用于在初始最优投资组合问题中考虑的证券的线性组合证券时，这些定价公式都是等价的。效用函数为二次形式（可推得 CAPM 公式）和对数形式时，可以得出十分简单的定价等式。

使用有限状态模型可以推出很有意义的结论，并且有很多实际的优点。在此模型中引入了很有用的状态价格的概念。当且仅当不存在套利机会时，与给定证券一致的一组正状态价格存在。一种求正状态价格组的方法是解最优投资组合问题。状态价格直接取决于所得的最优投资组合。

另一个很有意义的概念是风险中性定价。通过引入假想的概率，定价公式可以变为 $P=\hat{E}(d)/R$。其中 R 是无风险资产的收益率，$\hat{E}$ 是关于假想（风险中性）概率的期望。风险中性概率组可以这样求得：以无风险资产的总收益率乘以状态价格即可。

现在可以在一个特定空间里设想定价过程。首先从（随机）收入 d_i 定义的 n 种证券着手，定义空间 S 为这些证券的所有线性组合。可以得出的主要推论是：在不存在套利机会的条件下，存在另一随机变量 v(v 不必在 S 中)，使得空间 S 中任意证券 d 的价格为 $E(vd)$。特别地，对于每个 i，有 $P_i=E(vd_i)$。既然 v 不必在 S 中，所以就存在多种选择。一种选择体现了 CAPM，此时 v 在 S 内。另一种选择是 $v=1/R^*$，其中 R^* 是对数最优投资组合的收益，此时，v 通常不在 S 中。最优投资组合问题可以选择其他的效用函数求出其他的 v。如果公式 $P=E(vd)$ 应用于 S 外的证券 d，对于不同的 v 所得出的结果一般都会不同。

如果证券是在有限状态模型定义下的，并且存在与状态数量相同的（互相独立的）证券，那么这个市场被称为是完全的。这种情形下空间 S 包含了所有可能的随机向量（在此模型中），所以 v 必定也在 S 中。实际上，v 是惟一的，可以通过求解最优投资组合问题而得，所有的效用函数得出同样的 v。

练习

1. （确定性等价）某位投资者的工资效用函数为 $U(x) = x^{1/4}$。他有一份支付80 000美元并附加一份奖金的新工作。奖金可能是 0 美元、10 000美元、20 000美元、30 000美元、40 000美元、50 000美元、60 000美元，每个结果发生的概率相同，那么此工作薪金的确定性等价是多少？

2. （财富的独立性）假设一位投资者的效用函数为指数形式 $U(x) = -e^{-ax}$，初始财富水平 W。他现在面临这样的投资机会：投资 $w \leqslant W$，获得随机收入 x。证明他对此增量投资的估价与 W 无关。 256

3. （风险厌恶不变性）假设 $U(x)$ 是阿罗—普拉特风险厌恶系数为 $a(x)$的效用函数。令 $V(x) = c + bU(x)$，V 的风险厌恶系数是多少？

4. （相对风险厌恶）阿罗—普拉特相对风险厌恶系数是

$$\mu(x) = \frac{xU''(x)}{U'(x)}$$

证明效用函数 $U(x) = \ln x$ 和 $U(x) = \gamma x^{\gamma}$ 的相对风险厌恶系数是常数。

5. （等价性）一位年轻女性使用 9.4 节所描述的第一个程序来推导其在 $A \leqslant x \leqslant B$时的效用函数 $U(x)$。她使用标准化形式 $U(A) = A$，$U(B) = B$。为检验她所得的结果，她在 $A' \leqslant x \leqslant B'$重复了整个过程，其中 $A < A' < B' < B$。其结果是效用函数 $V(x)$，其中 $V(A') = A'$，$V(B') = B'$。如果结果是一致的，那么 U 和 V 应该等价，也就是说 $V(x) = aU(x) + b(a > 0)$。求 a 和 b.

6. （双曲线绝对风险厌恶◇）双曲线绝对风险厌恶（hyperbolic absolute risk aversion）效用函数族定义为

$$U(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{ax}{1-\gamma} + b\right)^{\gamma} \qquad (b > 0)$$

此函数中的 x 定义在使括号内式子为正的范围内。说明参数如何取值才能

获得下列的特殊形式（或等价形式）。

（a）线性或风险中性：$U(x)=x$

（b）二次形式：$U(x)=x-\frac{1}{2}cx^2$

（c）指数形式：$U(x)=-e^{-ax}$（取 $\gamma=-\infty$）

（d）幂形式：$U(x)=cx^\gamma$

（e）对数形式：$U(x)=\ln x$（取 $U(x)=(1-\gamma)^{1-\gamma}(x^\gamma-1)/\gamma$）

7.（风险投资者）效用函数为 $U(x)=\sqrt{x}$ 的风险投资者实施例 9.3 的程序，求出 C 为 e 的函数及 e 为 C 的函数的解析表达式。验证该例中表9—1中所列的数据是否满足这些函数？

8.（确定性近似◇）可以简易地推出确定性等价的一个很有用的近似，在 $\bar{x}=E(x)$ 附近的二阶展开可得：

$$U(x)\approx U(\bar{x})+U'\bar{x}(x-\bar{x})+\frac{1}{2}U''(\bar{x})(x-\bar{x})^2$$

因此，

$$E[U(x)]\approx U(\bar{x})+\frac{1}{2}U''(\bar{x})\mathrm{var}(x)$$

257 另一方面，如果以 c 表示确定性等价，并假定其接近于 $\bar{x}$，我们可以使用一阶展开：

$$U(c)\approx U(\bar{x})+U'(\bar{x})(c-\bar{x})$$

使用这些近似，证明：

$$c\approx\bar{x}+\frac{U''(x)}{U'(x)}\mathrm{var}(x)$$

9.（二次形式的均值—方差）拥有单位财富的投资者最大化其效用函数 $U(x)=ax-\frac{1}{2}bx^2$ 的期望值，并且获得均值—方差有效投资组合。他的一位朋友拥有财富 W 和相同的效用函数，进行同样的计算后却得到了一个不同的投资组合回报，但是将 b 改为 b' 后就可以得出相同的结果。那么 b' 值应

该为多少？

10. （投资组合最优化）假设投资者效用函数为 U。有 n 种风险资产，收益率为 $r_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 和一种收益率为 r_f 的无风险资产。投资者初始财富为 W_0。假设投资者的最优投资组合有（随机）收益 x^*，证明：

$$E[U'(x^*)(r_i-r_f)]=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

11. （资金回收保证）电影风险投资的发起人为吸引犹豫不决的投资者，设计了一种新的投资方式：在十分成功时的一单位新投资的回报为3 000美元，否则的话就返还初始的投资。假设例 9.6 中所描述的三种投资选择仍然存在，那么这种有资金回收保证的投资的价格是多少？

12. （一般的正状态价格结论◇）下面是由矩阵理论所得的一般化的结论：令 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，假定等式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{p}$ 不能得到 $\mathbf{p}\geq\mathbf{0}$，除非 $\mathbf{p}=\mathbf{0}$。那么就存在向量 $\mathbf{y}>\mathbf{0}$，使得 $\mathbf{A}^T\mathbf{y}=\mathbf{0}$。使用这一结论证明如果不存在套利的话，就存在正状态价格，即证明 9.9 节中的正状态价格定理。（提示：如果存在 S 种状态和 N 种证券，令 $\mathbf{A}$ 为合适的（$S+1$）$\times N$ 矩阵。）

13.（二次形式定价）假设某投资者使用二次效用函数 $U(x)=x-\frac{1}{2}cx^2$。假设有 n 种风险资产和一种总收益为 R 的无风险资产。令 R_M 是最优风险资产组合的总收益率，证明任意资产 i 的期望收益率是：

$$\bar{R}_i-R=\beta_i(\bar{R}_M-R)$$

这里 $\beta_i \mathrm{cov}(R_M,R_i)/\sigma_M^2$

（提示：利用练习 10，将其结果引用到 R_M 本身）

14. （跑马比赛）在周六跑马比赛中杰文·琼斯研究比赛形势后，总结出名为“无套利”的那匹马有 25%的机会赢，并以 4 比 1 的赌注下注（对于杰文下注的每一美元，如果该马赢了，就得到 5 美元；如果输了，就一无所获），它可以赌该匹马或者将钱揣在口袋里，杰文对钱的效用函数是平方根形式的。

(a) 杰文应该将他的钱的多少比例分配于“无套利”？ 258

(b) 赌“无套利”输获得的隐含回报是多少?

15. (一般风险中性定价) 我们可以将对数最优定价公式转化为风险中性定价公式,由对数最优定价公式我们有:

$$P=E\left(\frac{d}{R^*}\right)$$

其中R^*是对数最优投资组合的收益。下面我们可以定义一个新的期望运算$\hat{E}$:

$$\hat{E}(x)=E\left(\frac{Rx}{R^*}\right)$$

这可以认为是假想概率下的期望。注意通常的期望规则都满足。也就是说:

(a) 如果x是确定的,则$\hat{E}(x)=x$。这是因为$E(1/R^*)=1/R$。

(b) 对于任意随机变量x和y,有$\hat{E}(ax+by)=a\hat{E}(x)+b\hat{E}(y)$。

(c) 对于任意非负随机变量x,有$\hat{E}(x)\geqslant 0$。

使用此种新的期望运算,证明任意证券d的价格是:

$$P=\frac{\hat{E}(d)}{R}$$

这就是风险中性定价。

【注释】

[1] 存在几个公理框架可推出理性投资者选择效用函数的结论。最早的公理集是冯·诺伊曼—摩根斯坦(Von Neumann-Morgenstern)公理体系。另外一个重要的公理体系是萨维奇(Savage)公理体系 。(见本章后面的参考文献。)

[2] 这个确定性等价的一般概念与7.7节里用到的具有相同名称的概念有间接的联系。

[3] 如果A、B的取值不同,那么可以得到新的效用函数,这与原来的效用函数等价;也就是说,新函数仅仅是原函数的线性变形。(见练习5。)

[4] 线性定价也可以从一价定律(law of one price)推出:如果$d_1=d_2$,则$P_1=P_2$。

【参考文献】

系统运用期望效用作为金融决策的基础性工具是由冯·诺伊曼（Von Neumann）和摩根斯坦（Morgenstern）率先在文献［1］中提出的，另一系列的公理组由萨维奇（Savage）在文献［2］中提出。此理论的实际运用在文献［3］中被详细地提及。文献［4］主要是处理更广泛的财务问题。文献［5］中的第1章重点讲述了本章第二部分即线性定价。线性定价的思想在文献［6］中形成。文献［7］中解释了对数最优投资组合理论如何决定价格。风险中性定价思想形成于布莱克（Black）和斯科尔斯（Scholes）在文献［8］的开创性的期权定价方法，并且在文献［9］中正式成形。文献［10］将所有的概念一般化，这些概念已成为现在投资科学的基本组成部分。

1. von Neumann, J., and O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
2. Savage, L. J. (1954, 1972), *Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954; 2nd ed., Dover, New York, 1972.
3. Luce, R. D., and H. Raiffa (1957), *Games and Decisions*, Wiley, New York.
4. Ingersoll, J. E., Jr. (1987), *Theory of Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield, Savage, MD.
5. Duffie, D. (1996), Dynamic Asset Pricing, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, NJ.
6. Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7, 229—263.
7. Long, J. B., Jr (1990), "The Numeraire Portfolio," *Journal of Fi-* 259 *nancial Economics*, 26, 29—69.
8. Black, F., and M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, 637—654.

9. Ross, S. (1961), "A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams," *Journal of Business*, 34, 411—433.

10. Harrison, J. M., and D. Kreps (1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, 20, 381—408.

10.1 引言

衍生证券是其回报明确地与其他证券的 263
价值相关联的证券。然而，这种宽泛的定义实际上常常被进一步限定为衍生证券是其回报明确地与某些金融证券的价格相关联的证券。一个假设的衍生证券是6个月后可以变卖为一股IBM股票价值量的现金的某种凭证。因为它的回报取决于IBM股票的将来

价格，所以这种凭证属于衍生证券。现实中的大部分衍生证券都具有重要的风险控制特征，并且其回报关系比假设衍生证券更难以捉摸。一个比较现实的例子是6周后以每磅12美分的价格购买2 000磅糖的远期合约。这里没有一个与之关联的回报——远期合约仅仅保证糖的购买——但事实上隐含着一个回报。这个回报是由6周后糖的价格决定的。如果6周后糖的价格是每磅13美分，那么这个远期合约具有每磅一美分或20美元的价值。因为该合约持有者可以按每磅12美分的价格购买糖，然后可以在市场上以每磅13美分的价格将糖售出。这个远期合约是衍生证券，因为该合约的价值取决于糖的价格。另一个实际例子是给予某人3个整月后以每股60美元的价格购买100股GM公司股票的权利，而不是义务的合同。很明显，这是购买GM公司股票的期权。这个期权的报酬将由3个月后GM公司股票的价格决定。如果3个月后GM公司股票的价格是每股70美元，那么这个期权的价值为1 000美元，因为那时候期权所有者可以按期权合约以每股60美元的价格购买100股GM公司的股票，然后可立即以每股70美元的价格全部售出。最后一个例子是，假定你取得一笔抵押贷款，其利率水平根据主要大银行提供的抵押贷款利率的加权平均利率定期地调整。你获得的抵押贷款是衍生证券，因为它的价值由其他金融资产价格，即通行的利率水平决定。

264 如前所述，衍生证券的回报通常是由其他金融证券的价格决定的。在前述例子中，这些价格分别是IBM公司股票的价格、糖的价格、GM公司股票的价格和通行的利率水平。决定衍生证券价值的证券被称为基础证券。然而，根据宽泛的衍生证券定义，衍生证券的回报可以是非金融变量，如天气或者选举结果的函数。主要原因是，从衍生证券获得的回报是其他变量的确定性函数，其中这些变量的值将在获得衍生证券回报时或之前被决定。

衍生证券的主要种类有：远期合约、期货合约、期权、期货期权和互换。[1]这些衍生证券在日常商贸业务中起着非常重要的作用，因为衍生证券提供了抵补基础证券风险的有效工具。例如，经营一大笔糖的业务——也许是糖的生产者、加工者、市场营销者或者糖的商业使用者——一般要面临与

糖的价格波动相关的巨大风险。这些使用者利用衍生证券（这种情况主要是利用糖的期货合同）能够控制糖的价格波动导致的风险。实际上，衍生证券组合——业务、机构或者个体——的主要功能是控制风险。

本教材的第三部分论述了衍生证券的许多方面的内容。首先，这些章节说明有那些种类的衍生证券，并且远期合约、期货合约、互换和期权是怎么构造出来的。其次，通过理论和实例说明衍生证券怎样用于控制风险，也就是说衍生证券怎样改善包含风险因子的证券组合的总体结构。再次，这些章节介绍了衍生证券的定价理论。这是教材最引人注意的方面。最后，这些章节还提出了如何对证券价格波动进行模型化处理的技术问题。这也是下一章的主要主题。这一章介绍远期合约和期货合约，它们是最简单也最有用的衍生证券。

在开始这个主题之前，我们提出一个小小的警戒和建议。这一章的难度不是一页一页逐步增加的，但它包含许多新概念。你会发现你读这一章的进度比读其他章节要慢。因为后面的三章并不以这一章为基础，所以我们建议的阅读策略是先简要地浏览这一章然后跳到第十一章，然后再回到这一章。然而，远期、期货和互换的学习既实用又令人着迷，所以这一章的某些内容需要深入地研究。

10.2　远期合约

远期合约和期货合约在结构上紧密相关，但远期合约是这两种合约中最简单的一种。远期商品合同是在将来特定的时间以特定的价格购买或销售一定数量的商品的合同。例如，一个典型的远期合同是明年 3 月 15 日以每磅 12 美分的价格购买100 000磅糖。这是两个当事人，即买方和卖方之间的合同。买方被称为100 000磅糖的多头，而卖方则被称为100 000磅糖的空头。给定数量的多头或空头就是当事人的头寸。远期商品合同已经存在数千年 *265*

了，因为事实上它们是贸易的天然附属物。大宗商品的供货方和消费者经常发现锁定与将来商品让渡有关的价格的益处所在。

远期合同是由法律文件规定的，它使合同双方将来的特定交易受这个法律文件的约束。然而，一种定价资产（如糖）的远期合同也是一种金融工具，因为它具有由基础资产决定的内在价值。除了物理商品的远期合同外，远期合同在现代已被大大拓展到包括多种多样的基础资产。例如，许多公司使用外币远期合同或利率工具远期合同。

大多数远期合同规定所有的权益都在规定的将来日期清算；合同双方必须在规定的日期履行合同的义务。与远期合同相关的初始支付几乎永远等于零。双方都不需支付任何货币资金就可以取得合同（虽然有时双方要求上缴证券保证金）。远期价格是将来商品交付时的价格。这个价格通过谈判决定，所以初始支付是零，也就是说合同开始时的价值是零。

基础资产交易达成即马上交付的开放市场称为现货市场。这是与远期市场有区别的，远期市场是交易将来交付商品的合同的。在远期合同的有效期内，现货价格可能发生波动。因此，虽然远期合同的初始价值是零，但它的后续价值作为基础资产现货价格的函数也会发生变化。以后我们将探讨基础资产的远期价格和当前价值之间的关系。

远期利率

在第 4 章研究利率期限结构时，我们讨论过一个相当高级的远期合同。远期利率定义为将来特定的时间间隔借贷货币的利率。如果使用标准的金融证券，怎样安排这笔远期贷款并不是显而易见的；但事实上，从下面的例子看，它还是相当简单的。

例 10.1（国库券远期合同） 假定你希望安排一笔 3 个月后开始的 6 个月期的贷款。假定 3 个月后的 6 个月期远期利率为 10%。执行这笔贷款的合适的合同可能是，从现在以后 3 个月，银行交付一张 6 个月期的

国库券（也就是说，从交付日起，国库券还有 6 个月到期）给你。交付国库券的价格必须今天达成，国库券到期按1 000美元的面值支付。面 266 值1 000美元的国库券的准确价格可以由远期利率决定，也就是年利率为 10%，或 6 个月期利率为 5%。因此，这个国库券的价值应该是 1 000/1.05＝952.38 美元，这就是 3 个月后国库券交付给你时，你今天同意支付的价格。6 个月后你收到国库券的1 000美元面值。因此，总体而言，你贷出了 6 个月的资金 952.38 美元，获得的回报为1 000美元。这个合同与其他远期合同是相同的，特殊点是将来要交付的基础资产是国库券。远期合同的价格直接反映了远期利率。

远期利率可以用利率期限结构确定，而利率期限结构可以通过当前的债券价格决定。这些远期利率是所有商品和资产的远期合同定价的基础，因为远期利率提供了比较的标准。对给定的关于糖的远期合同，它的回报能够和与纯借款和贷款相关的回报比较。市场一致性（或没有套利机会）支配（理论的）远期价格，这是我们下面要说明的问题。

10.3　远期价格

如前所述，存在两个与远期合同相关的价格或价值。第一个是远期价格 F。这是在将来特定时间交割单位基础资产的交割价格。它是今天签署的远期合同规定的交割价格。远期合同的第二个价格或价值是它的当前价值，以 f 表示。远期价格 F 是这样决定的：开始，当前价值 $f=0$，所以签署合同时没有任何货币交易。初始时间后，当前价值 f 会发生变化，这种变化取决于基础资产的现货价格、通行的利率水平和其他因素的变化。同样，与原始合同的交割条款相同的新合同的远期价格 F 也会发生变化。

这一节我们研究时间 $t=0$ 时签署，时间 T 时交割一种资产的远期合同的理论远期价格 F 的决定问题。我们的分析依赖于一般的假设：没有交易

成本，并且资产是任意可分的。我们还假定开始时，不需要成本地储存基础资产是可能的，并且卖空基础资产也是可能的。以后我们将考虑基础资产的储存成本，但仍然要求在合同持续期内，储存基础资产是可能的。对许多资产如黄金、糖或国库券来说，这是一个很合适的假设，但对容易腐烂的商品如橘子，这也许不是一个合适的假设。

假如在时间 $t=0$ 时基础资产的现货价格为 S，今天设计的远期合同的交割时间是 T。我们怎样决定远期合同的价值呢？关键是要认识到商品的远期合同能够结合该商品的现货市场用来间接借入资金或借出资金。这种交易
267 中隐含的利率一定等于正常的利率水平；否则在直接借出资金和间接借出资金之间能够创造套利机会。

特别地，假定我们在现货市场以价格 S 购买一单位某种商品，并且同时签署一个时间 T 以价格 F 交割一个单位该商品的远期合同（也就是，我们卖空一单位该商品）。我们储存这种商品直到时间 T，然后交割，以履行我们的义务获得货币 F。与这两个市场交易相关的现金流序列是 $(-S, F)$，该现金流在时间 $t=0$ 时被完全决定。这一定与时间 $t=0$ 和时间 $T=0$ 之间的利率水平一致。因此，

$$S=d(0,T)F$$

其中 $d(0, T)$ 是时间 0 和 T 之间的贴现因子。换句话说，因为商品储存是不费成本的，所以以价格 S 购买商品与借出现金 S 并在时间 T 时收到现金 F 是完全一样的。

我们可以断言关系式 $S=d(0, T)F$ 利用了基本的现值分析方法：现金流序列 $(-S, F)$ 的现值一定等于零。然而这种现值分析是以市场是完备的、没有交易成本和不存在套利机会的假设为基础的。下面我们将套利思想规范化，并不是这里的实际所需，而是为今后的不完备市场环境建立研究空间：由于市场的不完备性，现值公式被打破。

⇒远期价格公式 *假定某种资产可以以零成本被储存，也可以被卖空。再假*

定这种资产当前的现货价格（时间 $t=0$）为 S。理论上的远期价格（时间 T 时交割）是：

$$F=S/d(0,\ T) \tag{10—1}$$

其中 $d(0,\ T)$ 是时间 0 和 T 之间的贴现因子。

证明：首先反设 $F>S/d(0,\ T)$。我们构造如下组合：在现在时间借入现金 S，在现货市场以价格 S 购买一单位基础资产，然后在远期市场持有一单位的空头头寸。这个组合的总成本是零。在时间 T 时我们交割该资产（我们已经储存的），收到现金 F，并且我们偿还贷款 $S/d(0,\ T)$。结果我们以零的净投资获得一个正收益 $F-S/d(0,\ T)$。这是一个套利机会，而我们假定套利机会是不存在的。这些交易的细节见表 10—1。

表 10—1

时间 $t=0$	初始成本	最终收入
借入 S 美元	$-S$	$-S/d\ (0,\ T)$
购买一单位并储存	S	0
卖空一个远期	0	F
合　　计	0	$F-S/d\ (0,\ T)$

如果 $F<S/d(0,\ T)$，我们可以构造一个相反的组合。但是，这要求我 268
们卖空一单位资产。这个卖空交易是通过如下操作实现的：从某个计划在这段时间内储存该资产的人手中借入这种资产，然后以现货价格将借入资产卖出，并在时间 T 时归还借入资产。这个套利组合是这样构造的：卖空一单位资产，在时间 0 和 T 之间借出收益 S，并在远期市场持有一个单位的多头。这个套利组合在时间 0 时的净现金流是零。在时间 T 时，我们从贷款中收到 $S/d(0,\ T)$，支付现金 F 获得一单位资产，最后我们归还这一单位资产给贷款者。交易细节如表 10—2。

表 10—2

时间 $t=0$	初始成本	最终收入
借出 S 美元	S	$S/d\ (0,\ T)$
卖空一单位资产	$-S$	0
持有一个远期多头	0	$-F$
合　计	0	$S/d(0,\ T)\ -F$

我们的盈利为 $S/d(0,\ T)\ -F$（我们可能与贷款者分享这份收益，因为他使做空成为可能）。

因为两个不等式都导致了套利机会的出现，所以要证的等式必然成立。

现货价格 S 和远期价格 F 的关系如图 10—1 所示。现货价格从 $S(0)$ 开始随机地发生变化，最后变成 $S(T)$。但时间 0 时的远期价格是用当前的现货价格以现行利率向前推算出来的。

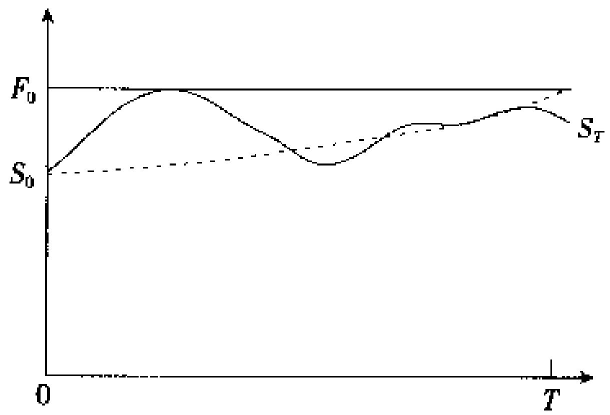


图 10—1　远期价格

时间 0 时的远期价格等于现金 $S(0)$ 规定的将来价值。

例 10.2（远期铜）一个重型电器设备制造商希望持有 9 个月后交割铜的远期合同的多头。铜的当前价格是每磅 84.85 美分，而 9 月期的面值 1 000美元的国库券的价格是 970.87 美元。铜的合适的远期价格是多少呢?

269 若忽略储存成本，并用 9 个月期国库券利率，则铜的合适价格是每磅 84.85/0.970 87=87.40 美分。

例 10.3（连续时间复利） 如果存在连续复合的常数利率 r，则远期利率公式变成：

$$F=S\cdot e^{rT}$$

远期价格公式中的贴现率 $d(0,\ T)$ 应该与利率市场的利率一致。远期和期货的职业交易商一般都利用与回购协议（回购协议是先出售这种证券，并在短时间后以稍高的价格购回）有关的回购利率。回购利率仅仅比相应的国库券利率稍高。

持有成本

前面的分析假定没有与持有基础资产相关的储存成本。但现实并不总是这种情况。持有一种物质资产如黄金，需要保管箱租金和保险费等储存成本。另外，持有一种证券也需要负成本，相当于股息和利息支付。这些成本（或收入）都会影响理论的远期价格。

我们将用离散时间（多期）模型进行分析。交割期 T 是将来的 M 期（如月数）。我们假定储存是周期性的，我们就是按这种周期测度时间的。从周期 k 到 $k+1$（在每期开始时支付）持有一单位资产的储存成本是 $c(k)$。因此，该资产的远期价格由对应于这种资产和持有成本的远期利率结构决定。

⇒**带持有成本的远期价格公式** *假定某资产在周期 k 的单位持有成本为 $c(k)$，并且该资产可以卖空。再假定初始现货价格是 S。因此，理论的远期价格是：*

$$F=\frac{S}{d(0,M)}+\sum_{k=0}^{M-1}\frac{c(k)}{d(k,M)} \qquad (10—2)$$

其中 $d\ (k,\ M)$ 是时间周期 k 到 M 的贴现因子。等价地，

$$S=-\sum_{k=0}^{M-1}d(0,k)c(k)+d(0,M)F \qquad (10—3)$$

证明：简单的证明是：在现货市场购买一单位某种商品，并签署一个在时间 T 时交割一个单位该商品的远期合同。与这个交易相关的现金流是
270 $(-S-c(0),\ -c(1),\ -c(2),\ \cdots,\ -c(M-1),\ F)$。这个现金流的现值一定等于零，这就给出了 F 的固定的公式。我们将给出无套利条件下的详细证明。

假定 F 大于由式（10—3）给出的值。我们将建立如下的套利机会。开始时，以远期价格 F 的远期合同卖空一单位该商品并以价格 S 购买一单位该资产。同时借入现金 S 并安排每个时间 $k=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1$ 借款 $c(k)$。所有这些贷款都在最后时间 M 偿还，所以每个贷款偿还额由时间 k 到 M 的相应的远期利率决定。与这个贷款计划相关的最初的现金流是零，因为我们要立即借入足够的资金以购买该资产。而且，每一期的现金流也应该是零，因为我们借入足够的资金以支付运输费用。因此，在最后一期之前，其净现金流都是零。

在最后一期，我们按规定交割该资产，并收到现金 F，偿还所有贷款，总的偿还额为 $S/d(0,M)+\sum_{k=0}^{M-1}c(k)/d(k,M)$。在我们的不等式假设下，这代表着一个套利收益，所以我们原来的不等式的假设肯定是错误的，详见表 10—3。假定卖空是可能的，我们可以将上述分析完全颠倒证明反向不等式同样是不可能成立的。（见练习 5。）

表 10—3 套利的细节

时间 0 时的行为	时间 0 时的成本	时间 k 时的成本	时间 M 时的收入
卖空一个远期	0	0	F
借入 S 美元	$-S$	0	$\frac{-S(0,M)}{d(0,M)}$
购买一单位现货	S	0	0
借入 $c(k)$ 个远期	$-c(0)$	$-c(k)$	$-\sum_{k=0}^{M-1}\frac{c(k)}{d(k,M)}$
支付储存费	$c(0)$	$c(k)$	0
合　　计	0	0	$F-\frac{S}{d(0,M)}-\sum_{k=0}^{M-1}\frac{c(k)}{d(k,M)}$

另一个公式（10—3）只要将公式（10—2）两边分别乘以 $d(0, M)$，并且对任意 k 利用公式 $d(0, M) = d(0, k)\ d(k, M)$。这个公式可能是最容易理解的，因为它是标准的现值方程。我们认为可以按价格 S 购买该商品并在时间 M 以完全确定的方式按照远期合同交割该商品。持有这种商品引致的现金流就是运输费用和交割价格。这个现金流的现值一定等于 S。

例 10.4（有储存成本的糖） 糖的当前价格是每磅 12 美分。我们希望确定 5 个月后交割的糖的远期价格。糖的运输成本是月初支付的每磅每月 0.1 美分，利率是常数年利率 9%。 271

月利率是 0.09/12＝0.007 5。相应的 1 个月（任何一个月）贴现率为 1.0075。因此，我们得到：

$$F=(1.0075)^5(0.12)+[(1.0075)^5+(1.0075)^4+(1.0075)^3+(1.0075)^2+1.0075](0.001)=0.1295 \text{ 美元}=12.95 \text{ 美分}$$

例 10.5（债券远期） 考虑一张面值为10 000美元，息票利率为 8%，还有几年到期的财政部债券。当前这种债券的售价为 9260 美元，前期利息已经支付。这种债券一年后交割的远期价格是多少呢？假定一年后的利率水平维持在 9%。

我们认为在债券交割前有两次利息：一次是 6 个月后，另一次是交割前。因此，利用现值公式（10—3）和 6 个月复利规则，我们立即得到：

$$\$9\,260=\frac{F+\$400}{(1.045)^2}+\frac{\$400}{1.045}$$

解这个方程（或利用方程式（10—2）求解）得：

$$F=\$9\,260(1.045)^2-\$400-\$400(1.045)=\$9\,294.15$$

（这里是十进位小数，而不是 32 分之几。）

紧致市场

在任何时间，对给定的某种商品设定几种不同的远期合同是可行的，其

中每个远期合同具有不同的交割日。如果这种商品是物质商品如豆粉，前面的理论分析意味着不同的远期合同的远期价格将随着交割日期的推移而平稳地增加，因为公式（10—2）中 F 的值随着 M 的增加而增加。然而，事实上并非总是如此。

例如，考虑表 10—4 列出的大豆价格。这个表[2]显示在一定的时间范围内价格随着时间的增加而减少。怎么解释这种现象呢？当然，豆粉的持有成本不是负的。实际上，持有豆粉的人正在放弃赚取套利收益的机会。

为了证明套利机会的存在性，先注意到某人，如拥有豆粉的农场主可以现在（12 月份）以 188.20 美元的价格将豆粉卖掉并在明年 3 月以 184.00
272 美元的价格将这些豆粉买回，从而赚取确定的收益而能节省可能引起的持有成本。可农场主为什么不这么做呢？原因是豆粉经常供不应求；那些持有豆粉的人这么做的原因是他们要为其他合同供货或自己使用。确实如此，他们卖掉所持有的豆粉并购买远期豆粉能够赚取小部分收益，但这一小部分收益低于手头不持有豆粉引起的成本。

同样，套利者也不能卖空一份远期合同，因为没有人会借给他们豆粉。从而，假定卖空是可能时的理论价格关系不能适用。

但只要储存是可能的，理论关系的一个方向确实是成立的。大多数资产（包括豆粉）都是这样。在储存是可能的情况下，（10—1）和（10—2）的第一个方向成立。换句话说，就是：

$$F \leqslant \frac{S}{d(0,M)} + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{c(k)}{d(k,M)} \qquad (10\text{—}4)$$

在没有套利机会时一定成立。

另一方面，卖空依赖于存在一个正的储存量，以便在期间 0 到 T 之间可以借入。某些人或某些团体，不管市场怎么变化，都应该计划在整个期间拥有超额存货。如果存货很低，或潜在地低，以现货价格卖空基本上是不可行的。这意味着式（10—1）和式（10—2）的证明的第二个方向不成立。从而，只能推出不等式（10—4）。事实上，正如豆粉的例子显示的那样，这是

一种相当普遍的情况。

利用定义**机会收益**的技巧，这个不等式可以转换为等式，机会收益可以衡量持有该商品的收益。例如，在豆粉的例子中，机会收益可以代表手头拥有豆粉维持农场经营的价值。机会收益也可以认为是一种负的持有成本，所以如果结合到式（10—4），机会收益将降低右边的值而使之成为等式。结合机会收益的方法之一是修正（10—4）为：

$$F=\frac{S}{d(0,M)}+\sum_{k=0}^{M-1}\frac{c(k)}{d(k,M)}-\sum_{k=0}^{M-1}\frac{y}{d(k,M)}$$

这里 y 是每期的机会收益。

10.4 远期合约的价值

假定远期合同是过去签署的，交割价格是 F_0。对同一交割时间的远期合同，现在时间 t 的远期价格是 F_t。我们要决定原远期合同的当前价值 f_t。这个价值由下面的论述给出。 273

⇒远期合同的价值 *假定将来时间 T 交割的远期合同的交割价格为 F_0，当前的远期价格为 F_t。因此，这个远期合同的价值为：*

$$f_t=(F_t-F_0)d(t,T)$$

这里 $d(t, T)$ 是期间 t 到 T 之间的无风险贴现因子。

证明：考虑构造时间 t 时的如下组合：时间 T 到期，交割价格为 F_t 的一个单位远期合同多头，交割价格为 F_0 的一个单位该远期合同空头。这个组合最初的现金流是 f_t。时间 T 时的最终现金流为 F_t-F_0。这是一个完全确定性的现金流，因为空头和多头交割要求相互抵消了。这个组合的现值是 $f_t+(F_0-F_t)\ d(t, T)$，并且它一定等于零。因此，立即可得到要证明的

结果。

10.5 互换*

大多数投资问题是通过适当的市场或技术行为将一个现金流转化成另一个现金流的动机引发的。**互换**能够直接实现这种愿望——因为互换是将一个现金流交换另一个现金流的协定。互换市场上数千亿美元的交易额可以证明互换对投资者的吸引力。互换时常为某一特定的情形设计，但最常见的是**普通互换**，其中互换的一方将一系列固定支付流交换另一方的一系列变动支付流。这一节我们要分析的就是这种互换。我们将看到，这种互换可以看成是一系列远期合约，因此，互换可以利用远期交易的概念进行定价。

作为一个例子，考虑一个普通的利率互换。A 方同意按照某一名义本金、以固定利率、每半年支付一次的方式，将一系列现金流支付给 B。（这里使用“名义本金”这个术语，是因为没有贷款发生。这个本金只不过是为了确定每次支付的额度。）相应地，B 按照同一名义本金、以浮动利率（如当前的六个月期的 LIBOR 利率）、每半年支付一次的方式，将一系列现金流支付给 A。通常，互换只要计算其中一方欠另一方的要求支付的差额就够了。

这种互换可以由 B 以浮动利率贷出资金给第三方 C 而引发；但 B 宁愿接受固定利率支付。因此，与 A 方进行的互换有效地将浮动利率资金流转变为固定利率资金流。

274 作为商品互换的例子，考虑一个每月要给发电设备购买石油的电力公司。如果在现货市场购买石油，电力公司将经受现货价格波动引起的随机波动的现金流。电力公司可能希望将这种随机波动的支付流与一个稳定不变的支付流进行互换。只要它能够找到一个愿意互换的伙伴即可，如图 10—2。这个互换方同意按石油现货价格支付一固定桶数的石油款项给电力公司，反

过来，电力公司在互换的有效期内按固定价格支付同样桶数的石油款项。从而，变动现金流被转换为一个固定不变的现金流。

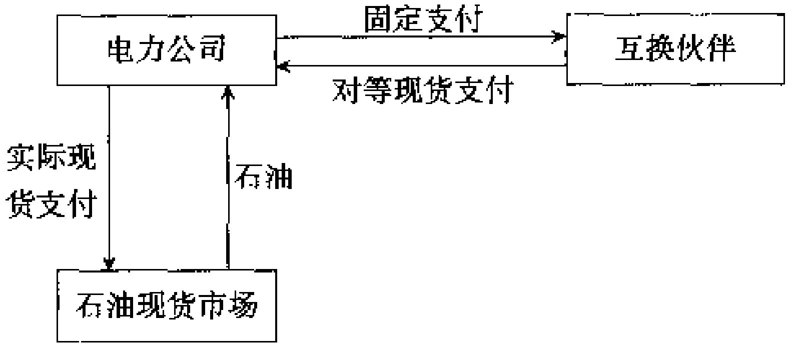


图 10—2 商品互换

电力公司每月在现货市场购买石油。电力公司与互换伙伴（或互换经纪人）安排一个互换交易，以固定支付流交换现货支付。净效应是电力公司消除了支付流的变动性。

商品互换的定价

考虑这样一个协议，A 方每期收到 N 单位商品的现货价款，同时每次支付一个固定金额 X，共支付 N 次。如果签订的协议有 M 个周期，那么 A 方收到的净现金流为（S_1-X，S_2-X，S_3-X，S_M-X）乘以商品单位数 N，这里 S_i 表示商品在时间 i 的现货价格。

我们可以利用远期市场的概念给这个现金流定价。在时间 0 时，一单位商品在时间 i 时的远期价格为 F_i。这意味着我们并不在乎在时间 i 时收到现金 S_i（当前是不确定的）与时间 i 时收到现金 F_i。通过贴现，我们断定时间 i 时收到的现金 S_i 在时间 0 时的价值是 $d(0,\ i)\ F_i$，其中 $d(0,\ i)$ 是时间 i 时收到的现金贴现到时间 0 时的贴现因子。

如果将这个分析过程应用到每一期，可得到现金流的总价值是：

$$V=\sum_{i=1}^{M}d(0,i)(F_i-X)N \qquad (10—5)$$

因此，互换的价值可以通过远期价格序列决定。通常选择 X 使 V 值为零，以致互换表示一个等值交换。

例 10.6（黄金互换） 考虑一个电气公司签订的收到黄金现货价值与一个固定支付的互换协议。假定黄金供应充足且储存不需要成本——这意味着这
275 个互换方案几乎是一个很普通的形式。在这种情况下，远期价格为 $F_i=S_0/d(0,i)$。因此公式（10—5）变成：

$$V=\left[MS_0-\sum_{i=1}^{M}d(0,i)X\right]N$$

和式等于一个债券的利息支付流的价值。利用这个事实，容易将现金流价值公式转变成：

$$V=\left\{MS_0-\frac{X}{C}\left[B(M,C)+100d(0,M)\right]\right\}N \qquad (10\text{—}6)$$

这里 $B(M,C)$ 表示期限 M 到期、每次利息支付为 C 的债券的价格（相对于 100）。任何 C 值都是适用的。（见练习 8。）

利率互换的定价

考虑一个普通的利率互换，A 方同意在 M 期内按照名义本金额 N 以固定利率 r 支付利息并愿意接受按照同一名义本金额 N 的浮动利率支付。A 收到的现金流是（c_0-r，c_1-r，c_2-r，…，c_M-r）乘以本金 N。所有 c_i 都是浮动利率。

我们可从浮动利率债券的知识演变而来的特殊技巧给这个互换的浮动利率部分定价。（利用远期合约定价概念的直接证明，可参见练习 10。）除了最后没有本金支付外，这个浮动利率现金流与一个本金为 N 到期期限为 M 的浮动利率债券产生的现金流完全一样。我们知道浮动利率债券的初始价值（包括最终的本金支付）等于票面价值；因此，互换的浮动利息部分的价值等于票而价值减去时间 M 收到的本金的现值。换句话说，互换的浮动利息流的价值为 $N-d(0,M)N$。

而固定利息流部分的价值就等于按照当前的贴现利率期限结构将固定支付流进行贴现的价值之和。总之，互换的价值为[3]：

$$V=\left[1-d(0,M)-r\sum_{i=1}^{M}d(0,i)\right]N$$

其中和式可以用黄金互换例子中的方法进行变形。

10.6 期货合约基础

因为远期交易是如此实用，所以很久以前人们就希望将远期合约标准化并在有组织的交易所进行交易。交易所帮助规定通用价格水平并提供交易便 276 利和保障，因为交易个体不需要自己寻找交易对手，也不需要面对交易对手违约的风险。单个合约是和交易所订立的，所以交易所本身就是交易者的多头交易者和空头交易者。但标准化提出了一个有趣的挑战。考虑在交易所进行交易的远期合约的可能的交易机制。将一系列交割期、交割的商品数量、交割商品的质量和交割地点（即使这些项目中存在某些微妙的东西）标准化是比较简单的事情。但将远期价格进行标准化是不可能的。为了弄明白这个问题，假定合约是今天签订的，其交割价格为 F_0。交易所将关注所有这样的合约。而且明天的远期价格可能发生变化，而明天创立的远期合约可能具有不同的交割价格 F_1。事实上，合适的交割价格可能在一整天的时间里连续发生变化。成千上万的未清算的远期合约可能每个都有不同的交割价格，即使所有其他条件都是相同的。这可能是一个簿记噩梦。

这个问题是通过期货市场的卓越发明解决的，它是远期市场的替代物。随着价格环境的变化而修改合约消除了交割价格的多样性。再次考虑以交割价格 F_0 签订的远期合约，而且第二天的新合约的交割价格是 F_1。第二天，与交易所相关联的清算所将所有较早的合约的交割价格都校正到 F_1。为了能够这么做，合约持有者或者支付或者收到两个价格的差额，这取决于价格变化反映的究竟是损失还是盈利。特别地，假定 $F_1>F_0$ 并且我持有一单位交割价格为 F_0 的多头。于是我的合约价格变为 F_1 并且我从清算所收到

F_1-F_0，因为我在后来收到交割商品时将不得不支付 F_1 而不是 F_0。

调整合约的过程称为盯市。详细过程如下：交易个体首先要求向经纪人开立保证金账户。这个账户必须包括每个期货合约规定金额（通常大约为每个期货合约价值的5%～10%）的保证金。所有合约持有者，无论是多头还是空头，都必须开立这种保证金账户。这些账户在每个交易日结束时都要进行盯市。如果期货合约价格（在该交易所决定的价格）在某个交易日上涨了，那么多头方将收到一笔利润，利润规模等于价格变化乘以期货合约数量。这笔利润被存人他们的保证金账户。而空头方损失同样的金额，且这笔损失要从他们的保证金账户中扣除。因此，每个保证金账户的价值随着期货价格的变化天天都在波动。由于这个程序，每个多头期货合约持有者与每个空头合约持有者拥有同样的期货合约数量。在交割日，将按交割时的期货合约价格交割，这个价格可能与最初购买期货合约时的期货价格有很大的差别。

277 事实上，按期货合约条款进行商品交割的情况极为罕见；90%以上的期货交易者在交割日前将他们持有的头寸平仓。即使需要商品进行生产的商业机构也常常卖出它们的多头并在现货市场向它们习惯的供货方购买商品。

期货价格被刊载在金融报纸如《华尔街日报》中。图10—3列出了玉米期货的例子。表头说明了一个标准玉米期货合约规模是5 000蒲式耳，期货价格是按每蒲式耳多少美分报价的。表中第一列列出了各种不同合约的交割日，交割日最早的排在第一位。后面各列列出了前一个交易日的各种不同的价格：开盘价、最高价、最低价、收盘价、与前一个交易日收盘价格比较的变化、合约开始以来的最高价、合约开始以来的最低价。最后一列是未平仓的合约总数。（多头和空头头寸都计算在内，所以未平仓合约总数实际上等于合约义务数的两倍。）商品交割可以在规定的月内的任何时间进行。

保证金账户不仅充当收集或支付每日利润的账户，而且保证金账户还保证合约持有者不会违背合约义务。保证金账户通常不支付利息，所以实际上保证金账户上的现金是要遭受损失的。然而，许多经纪人允许国库券或其他证券和现金一样充当保证金，因此，可以间接地赚取利息。如果保证金账户

的价值下降到规定的维持保证金水平（一般为初始保证金价值的 75%），合约持有者会收到**催交保证金通知**，要求上缴追加保证金。否则，期货头寸将以持有相同规模反向头寸的形式被平仓。

谷物和油料种子

	开盘价格	最高价格	最低价格	交割价格	变化幅度		合约开始以来的最高价格	合约开始以来的最低价格	未平仓合约
玉米（CBT）5 000 蒲式耳；美分/蒲式耳									
12 月	336	337	326½	327¼	—	3¾	339	235½	162 928
1996 年 3 月	344	344	333½	334½	—	3¼	344¼	249½	215 702
5 月	344½	345	333½	334	—	4½	345	259½	36 974
7 月	342	342	331	331¾	—	4¼	342	254	47 422
9 月	299	299	294½	295	—	1¼	300	260	8 173
12 月	284	284½	280½	281	—	¾	284½	239	23 244
1997 年 5 月	289½	289¾	286½	286¾	—	1¼	289¾	279¼	796
7 月	292	293¼	290	290	—	1¾	293¼	284	176
12 月	272	273	271	271½	-	…	273	249¾	325

Est vol 100 000；vol Wd 85 650；open int 495 740，+145.

图 10—3 玉米期货报价

各种不同的交割日的期货合约报价都列在表中。
资料来源：The Wall Street Journal，November 10，1995。

例 10.7（保证金） 假定史密斯先生持有三月份交割的交割价格为 2.10 美元（每蒲式耳）的玉米期货合约一份（5 000蒲式耳）。并且假定经纪人要求的保证金为 800 美元，维持保证金为 600 美元。

第二天这个期货合约的价格下降到 2.07 美元。这表示损失了 0.03×5 000＝150 美元。经纪人将从保证金账户扣除这笔资金，剩下的保证金余额为 650 美元。接下来的一天，期货价格下降到 2.05 美元。这表示又损失

100 美元，并再次从保证金账户中扣除。这时保证金账户的价值是 550 美元，低于维持保证金水平。经纪人打电话给史密斯先生并告诉他，必须在保证金账户上存入至少 50 美元，否则他的期货头寸将被平仓，这意味着史密斯先生将被迫放弃他的期货合约，在保证金账户上剩下 550 美元。

10.7 期货价格

278 在任何时候，只有一个价格与期货合约有关——交割价格。现存合约的价值总是等于零，因为期货合约要被盯市。交割价格一般与基础资产的现货价格不同，但这两个价格之间存在某种联系。事实上，随着到期时间的临近，期货价格和现货价格一定会相互接近，实际上收敛于同一个值。这个结果称为收敛，并用图 10—4 表示。

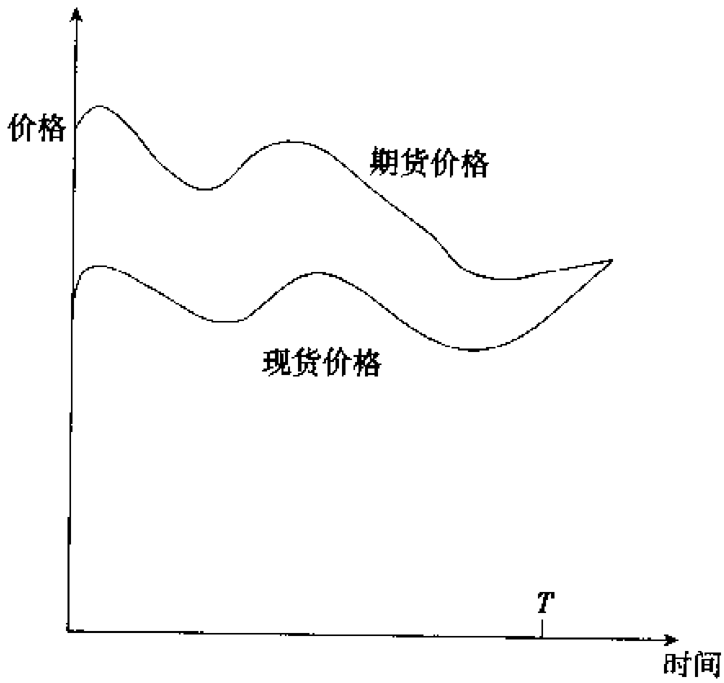


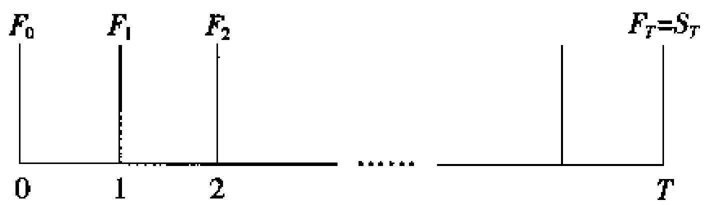
图 10—4 期货价格和现货价格的收敛

随着时间接近交割日，期货价格收敛于现货价格。

作为一般规律，我们希望理论的期货价格必须与远期价格、远期合约的交割价格具有密切的关系。两个价格都是将来交货的价格。然而，即使我们假定没有交易成本、没有保证金（或保证金可以获得竞争性利息）使远期交易和期货交易机制理想化，远期交易和期货交易的现金流过程之间仍然存在根本的差别。对远期交易而言，在最终期限之前没有任何现金流，或者履行商品交割，或者按照现货价格与以前订立的交割价格的差额以现金清算。对期货交易而言，在第一期后，每一期都有根据最近时间期货价格变动决定的现金流。表面上看，可能是现金流的差异导致远期价格和期货价格的偏离。然而，事实上，假定利率是确定性的并且遵循动态预期，正如第 4 章描述的那样，如果排除了套利机会，远期价格和期货价格一定是一致的。下面将证明这个重要结果。

⇒期货价格—远期价格的一致性 *假定利率是已知的，并遵循动态预期规律。因此，相应的期货合约和远期合约的期货价格和远期价格是相同的。*

证明： 令 F_0 表示期货的初始价格（但要记住起初没有发生任何支付）。令 G_0 表示相应的远期价格（在交割时支付）。假定有 $T+1$ 个时点，并且相 279
应的期货价格表示为：



令 $d(j, k)$ 表示时间 k 到期的单位面值债券在时间 j 时（$j<k$）的贴现率。

现在，我们分别考虑参与期货市场和远期市场的两种策略。

策略 A

- 在时间 0：持有 $d(1, T)$ 单位的期货多头。
- 在时间 1：将多头头寸增加到 $d(2, T)$
- 在时间 k：多头头寸增加到 $d(k+1, T)$
- 在时间 $T-1$：多头头寸增加到 1。

在时间 $k+1$ 从前一期获得的利润是：

$$(F_{k+1}-F_k)d(k+1,T)$$

作为策略 A 的一部分，我们将这笔利润在时间 $k+1$ 时投资于利率市场直到时间 T。因此，最终金额变成：

$$\frac{d(k+1,T)}{d(k+1,T)}(F_{k+1}-F_k)=F_{k+1}-F_k。$$

因此，从策略 A 获得的总利润是：

$$\text{profit}_A=\sum_{k=0}^{T-1}(F_{k+1}-F_k)=F_T-F_0=S_T-F_0。$$

注意到期前的每一步，都有一个零净现金流，因为所有的利润和损失都被利率市场所吸收。因此，零投资额产生 profit_A。

策略 B

持有一个远期合约的多头。这要求没有初始投资并产生利润

$$\text{profit}_B=S_T-G_0$$

现在我们可以构造一个新策略 A—B。这个组合策略也要求在最后到期前没有任何现金流，在最后时点产生的利润为 G_0-F_0。这是一个确定的量，如果没有套利机会，它一定等于零。因此，$G_0=F_0$。

280 当利率是不确定的时候，这种相等性可能不会成立，但常规分析这种相等性被认为还是相当精确的。这个结果很重要，因为它至少部分说明了利用远期合约（现金流仅仅发生在交割日或者清算日）进行相应套期简化了期货套期分析的结论至少部分是合理的。

例 10.8（小麦合约） 1 月份一个大型商用面粉和面包生产商希望锁定一大笔小麦定单的价格。这个生产商可能购买 5 月份交割的500 000蒲式耳的小麦远期合约。虽然，这个生产商可能安排一个特殊的远期合约，但他还是决定利用期货市场，因为期货市场是有组织的并且更方便。这个生产商认识到（并且证实）期货价格等于他能够谈判的远期价格。

5 月份交割的期货（或远期）现行价格为每蒲式耳 3.30 美元。标准小麦期货合约的规模是5 000蒲式耳。因此，该生产商判断他需要 100 个期货合约。

期货市场交易的详细情况列在表 10—5。为简化起见，这个表描述的结算账目是按月计算的，而不是按天计算的。

表 10—5　　期货交易和远期交易

日期	价格	远期合约	期货合约 1				期货合约 2			
		盈利	头寸	盈利	利息	余额	头寸	盈利	利息	余额
1 月 1 日	330	0 $	100	0 $	0 $	0 $	97	0 $	0 $	0 $
2 月 1 日	340	0	100	50 000	0	50 000	98	48 500	0	48 500
3 月 1 日	355	0	100	75 000	500	125 500	99	73 500	485	122 485
4 月 1 日	345	0	100	−50 000	1 255	76 755	100	−49 500	1 225	74 210
5 月 1 日	352	110 000	0	35 000	768	112 523	0	35 000	742	109 952
总　计		110 000	110 000				107 500			

注：表中列出了远期合约、固定期货合约和设计的模拟远期交易的期货合约策略。

表的左边部分列出了各个日期和 5 月份交割的期货合约相应的假想价格（以美分表示）。接下来这一栏标题是"远期合约"，表示交易 5 月份交割的500 000蒲式耳小麦的远期合约的结果，紧随其后的是该合约的对冲，所以实际上没有发生交割。在 5 月份以前，没有与这个合约有关的任何现金流。因此，5 月份每蒲式耳有 22 美分的利润，或者110 000美元的总利润。

表的下一栏标题是"期货合约 1"，描述的是 1 月份交易 100 个期货多头并在 5 月份对冲这个头寸的结算账目细节。假定建立一个账户记录所有的

利润和损失。再假定现行利率是12%，或者是每月1%，并且没有保证金要
281 求。这表明签订合约时不需要任何资金。在第二个月获得了5 000美元的利润，因为期货价格上涨了10美分。这笔利润进入盈亏账户。下一个月的余额反映了增加的利润和账户的利息。总的现金流是110 000美元，与远期交易所获得的利润恰好相同。然而，由于现金流发生在不同的时间，最终的实际余额是112 523美元。(因为价格早就上升了，所以这种结果更为有利，但这不是问题的要害。)

表的下面一栏标题是"期货合约2"，通过期货价格—远期价格相等性结果的证明方法说明了怎样利用期货合约更精确地复制远期合约。既然利率是每月1%，那么贴现率每月增长大约1%。因此，按照这种处理方法，该生产商最初购买97个合约多头，然后每个月增加一个合约多头，最后达到100个合约多头。同前一种方法采用完全一样的记账结算制度。在这种情况下，最后导致的余额是109 952美元，与一个纯远期合约获得的利润相当接近——这个细微差额是由于将贴现率四舍五入成整数百分点造成的，以致能够使用整十个合约。

这个例子说明，如果合约个数是固定的，履行远期合约和期货合约确实存在细微的差别。然而，实际上，在一个较短的时间间隔内，比如几个月，使用远期合约和期货合约的差别是很小的。进一步，如果利率是确定性的并且遵循动态预期规律，这样在**限定整十个合约数**引起的四舍五入误差以内，使用远期合约和期货合约的差别能够降低到0。

10.8 与预期现货价格的关系*

在时间0时，形成一种商品在时间T时的现货价格的看法或预期是合乎逻辑的。时间T交割的现行期货价格是将来的现货价格的可靠估计，即$F=E(S_T)$吗?

如果不等式成立，如 $F<E(S_T)$，投机者可能持有期货多头，然后在时间 T 按照期货合约以价格 F 购买该商品并以价格 S_T 售出该商品，获得预期利润 $E(S_T)-F$。如果反向不等式成立，那么投资者可能持有期货空头，执行相反的计划。因此，投机者可能对任何不等关系作出反应。

另一方面，套期保值者参与期货市场，主要是为了降低商业交易的风险，而不是在商品价格上进行投机。因此，套期保值者不可能受期货价格与预期现货价格之间细微偏差的影响。

现在假定碰巧期货市场上空头套期者比多头套期者更多。为了平衡市场，投机者一定会进入市场并持有多头。当且仅当他们相信 $F<E(S_T)$ 时，他们才会这么做。相反，如果期货市场上多头套期者比空头套期者更多，当且仅当投机者相信 $F>E(S_T)$，他们才会相应地持有空头。

这两种情形都有特殊的名字。如果期货价格低于未来的预期现货价格， 282
称为**正规后跌**。如果期货价格高于未来的预期现货价格，称为**期货溢价**。

10.9　完全套期

期货合约的主要用途是风险套期。套期策略可能是简单的或复杂的；在这一章的剩下部分将分析套期策略设计的一些主要方法。

最简单的套期策略是**完全套期**，与将来交付或接受一种资产的义务相关的风险可以通过在期货市场上持有**相等并且反向**的头寸而完全消除。同样，构建套期是为了立即有效地创造预期的期货市场购买或销售。这样做锁定了期货市场的价格；而绝对不存在价格风险。但当且仅当存在关于资产性质、交割条款和被套期的义务恰好匹配的期货合约时，这种策略才是可能的。

例 10.9（小麦套期保值） 再次考虑例 10.8 的面粉和面包生产商。该生

产商已经接受以规定价格在 5 月 20 日交割的大笔定单。为了履行这个定单，该生产商在定单到期前不久将在现货市场购买500 000蒲式耳小麦。该生产商已经计算了按现行小麦价格获得的利润，但要是小麦价格显著地上升，这个定单可能变得无利可图。该生产商可能在小麦期货市场持有相等规模的反向头寸进行套期。(即，该生产商有义务供应经过加工的小麦，所以他承担相反的义务并购买小麦。另外，该生产商可以把最后必须购买的小麦看作提前购买。)

如果我们忽略由于现金流时点的差异引起的期货和远期的细微偏差，我们可能会把期货合约和远期合约一样对待。该生产商将在期货市场对冲掉他的头寸然后在现货市场购买小麦。既然小麦的现货价格将与对冲的期货价格一样，其净效应是该生产商按最初的每蒲式耳 3.30 美元的价格支付。

例 10.10 (外汇套期) 一个美国电器公司收到 90 天以后向德国客户销售设备的定单。规定的定单价格是500 000德国马克，并在交货时付款。这个美国公司面临与德国马克和美元汇率相关的风险。

该公司可能利用四个 90 天到期的德国马克合约（每个合约125 000德国马克）进行外汇风险套期。既然该公司将在 90 天后收到德国马克，它现在可以通过持有相同规模的反向头寸进行套期——也就是说，它卖空四个德国马克合约。(另一种看法是，收到德国马克后，该公司将卖掉这些马克，所以通过持有空头提前卖出了马克。)

10.10 最小方差套期

283 利用期货合约构建一个完全套期并非总是可能的。可能根本就不存在包含价值必须套期的恰好符合要求的资产合约，如可达成的合约的交割日期可

能与资产合约的日期不匹配，指定偿还债务的资产规模不是合约规模的整数倍，也可能期货市场缺乏流动性，或者合约的交割条款与偿债款项的交割条款不一致。在这些情况下，利用期货合约不可能完全消除原来的风险，但通常可以降低风险水平。

套期完全性缺乏程度的度量标准是基差，定义为现货价格和期货价格之间的错位。具体地说，

$$\text{基差}=\text{套期资产的现货价格}-\text{使用的期货合约的期货价格}$$

如果套期资产与期货合约的资产相同，那么在交割日基差将等于 0。但一般地，由于上述理由，最终基差也可能不是像预期的那样等于 0。通常，最终基差是一个随机量，并且这种现象排除了出现完全套期的可能性。基差风险需要另外的套期技术。

在存在基差风险时，普通的套期方法是最小方差套期。这种套期的一般程序可以相当容易地推演。假定在时间 0 时，套期状态为时间 T 发生现金流 x。例如，如果付款义务是在时间 T 时购买 W 单位的某资产，我们有 $x=WS$，这里 S 是该资产在时间 T 时的现货价格。令 F 表示用于套期的期货合约的期货价格，并令 h 表示持有的期货头寸。假定期货账户上的所有利润（或损失）都在时间 T 时结算，因此，我们忽略了保证金账户的利息支付。因此时间 T 的现金流等于原付款额加上期货账户上的利润。所以，

$$\text{现金流}=y=x+(F_T-F_0)h$$

我们求得现金流的方差是：

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(y)&=E[x-\bar{x}+(F_T-\bar{F}_T)h]^2\\&=\operatorname{var}(x)+2\operatorname{cov}(x,F_T)+\operatorname{var}(F_T)h^2\end{aligned}$$

将这个方差关于 h 取导数并令导数等于零使方差最小化。因此导出下面的结果：

⇒**最小方差程式** *最小方差套期和推导出的方差是：*

$$h = -\frac{\text{cov}(x, F_T)}{\text{var}(F_T)} \tag{10—7}$$

$$\text{var}(y) = \text{var}(x) - \frac{\text{cov}(x, F_T)^2}{\text{var}(F_T)} \tag{10—8}$$

284 当付款义务是现货价格为 S_T 的资产的固定规模 W 时，式（10—7）变成：

$$h = -\beta W \tag{10—9}$$

这里 $\beta = \frac{\text{cov}(S_T, F_T)}{\text{var}(F_T)}$

当然，这提醒我们第 7 章的一般均值—方差公式，并且事实上这个公式与一般均值－方差公式是紧密相关的。

例 10.11（完全套期） 作为一个特例，假定期货商品与被套期的现货商品是一样的。在这种情况下，$F_T = S_T$。再假定付款义务是 W 单位的商品，所以 $x = WS_T$。这时，$\text{cov}(x, F_T) = \text{cov}(S_T, F_T)W = \text{var}(F_T)W$。因此，根据式（10—7）我们有 $h = -W$，而根据式（10—8）我们求得 $\text{var}(y) = 0$。换句话说，当期货价格与被套期商品的现货价格完全相关时，最小方差套期变成了完全套期。

例 10.12（用另一种期货进行外汇套期） BIG H 公司（一家美国公司）从丹麦公司获得了一个大笔定单。将在 60 天以后支付 100 万丹麦克郎。BIG H 公司希望对外汇风险进行套期，但是没有丹麦克郎的期货合约。虽然德国马克与丹麦克郎并不是恰好同步变化，但 BIG H 公司财务部的副总裁还是决定公司利用德国马克进行套期。

他注意到现行汇率是 $K = 0.164$ 美元/丹麦克郎，$M = 0.625$ 美元/德国马克。因此，德国马克与丹麦克郎之间的汇率是 $K/M = 0.164/0.625 = 0.262$ 德国马克/丹麦克郎。因此，按照现行汇率收到 100 万丹麦克郎等于

收到262 000德国马克。他推算相同规模的反向套期应该是卖空262 000德国马克。

正在 BIG H 公司工作的一个实习生建议应该考虑将最小方差套期作为另一种选择。公司给该实习生几天时间设计出具体细节。他迅速做了一些历史分析并估计美元汇率 K 和 M 每月波动的相关系数大约是 0.8。而马克波动的标准差是每月马克价值的 3%，丹麦克朗的波动幅度略低，为丹麦克朗价值的 2.5%。在这个问题中，式（10—7）中的 x 表示 100 万丹麦克朗 60 天以后的美元价值，而 F_T 表示 60 天以后德国马克的美元价值。我们可以计算出 $x=K\times100$ 万。因此该实习生估计 β 系数是：

$$\beta=\frac{\operatorname{cov}(K,M)}{\operatorname{var}(M)}=\frac{\sigma_{KM}}{\sigma_K\sigma_M}\times\frac{\sigma_K}{\sigma_M}=\rho\frac{\sigma_K}{\sigma_M}=0.8\times\frac{0.025K}{0.03M}$$

因此，最小方差套期是： 285

$$h=-\frac{\operatorname{cov}(x,F)}{\operatorname{var}(F)}=-\frac{\operatorname{cov}(k,M)\times1\,000\,000}{\operatorname{var}(M)}$$

$$=\left[-0.8\times\frac{2.5}{3.0}\times0.262\times1\,000\,000\right]$$

$$=-175\,000\text{DM}$$

最小方差套期小于以交易比率为基础的完全套期；它是由于相关系数和标准差的影响而降低的。

我们还可以进一步分析并且弄明白套期与什么也不做相比实际上是如何有效的。我们有 $x=K\times100$ 万。因此，$\operatorname{cov}(x,M)=100$ 万 $\times\sigma_{KM}$，并且 $\sigma_x=100$ 万 $\times\sigma_K$。结合这两个关系，我们有 $\operatorname{cov}(x,M)=\sigma_{KM}\times\sigma_x/\sigma_K$。利用最小方差套期公式，我们得到：

$$\operatorname{var}(y)=\operatorname{var}(x)-\frac{\operatorname{cov}(x,M)^2}{\sigma_M^2}=\left[1-\left(\frac{\sigma_{MK}}{\sigma_K\sigma_M}\right)^2\right]\operatorname{var}(x)$$

因此，

$$\operatorname{stdev}(y)=\left(\sqrt{1-0.8^2}\right)\operatorname{stdev}(x)=0.6\times\operatorname{stdev}(x)$$

所以最小方差套期通过一个 0.6 的因数降低了风险。如果能找到一个套期工

具与丹麦克郎有更高的相关性，就能够得到一个具有较低风险的套期。

例 10.13（利用股票指数期货改变组合的贝塔值）史密斯小姐拥有一个高技术股票的权重很高的庞大证券组合。她相信在以后几个月内这些证券的表现从总体上说要超过市场表现。但是，史密斯小姐认识到她的证券组合（关于市场）的贝塔值是 1.4，因而具有很高的市场风险。如果市场普遍下跌，即使她的证券像她相信的那样能赚取高于 CAPM 模型预测值的超额回报，她的证券组合的价值也会下跌。

所以史密斯小姐决定针对市场风险进行套期。她能够通过卖出一些股票指数期货来改变她的证券组合的值。她可以通过卖空 120 天以后到期的 200 万×1.4=280 万标准普尔 500 股票指数期货建立她的 200 万美元证券组合的最小方差套期。因为她的证券组合的标准的贝塔值是按标准普尔 500 计算的，这个值与一般方程（10—9）计算的贝塔值是一样的。在持有股票指数期货空头头寸后，她的套期组合的总的新贝塔值等于零。

10.11 最优套期*

虽然最小方差套期很实用而且相当简单，但从组合的角度看套期问题，
286 最小方差套期能够进一步加以改进。再假定时间 T 有一个现存的现金流义务 x。并假定该现金流将以 h 个期货合约来套期，导致的最终现金流为 $x-h(F_T-F_0)$。如果效用函数是既定的，解下述问题是合适的[43]：

$$\max_h E\{U[x+h(F_T-F_0)]\} \tag{10—10}$$

这种处理方法充分解释了基差风险并且完全符合个人或机构面临风险时的风险厌恶特征。

例 10.14（均值—方差套期）效用函数的一个显而易见的选择是二次

函数：

$$U(x)=x-\frac{b}{2}x^2$$

其中 $b>0$。因此式（10—10）变成一个涉及变量的均值、方差和协方差的最大化问题。但认识到这个最大化问题基本上等价于最大化

$$V(x)=E(x)-r\text{var}(x)$$

r 是某个正常数，可得到整齐的导数和匀称的公式。函数 V 可以看成变形的均值—方差效用函数。

为了得到有意义的结果，r 的数值必须由问题本身决定。合理的选择是 $r=1/(2\hat{x})$，其中 $\hat{x}$ 是 $E(x)$ 的最后价值的粗略估计。因此，它使方差和 $[E(x)]^2$ 的一半获得大致相等的权重。

用 $V(x)$ 作为目标函数，最优套期问题变成：

$$\max\{E[x+h(F_T-F_0)]-r\text{var}(x+hF_T)\} \qquad (10\text{—}11)$$

经过代数运算可以直接求得问题的解为：

$$h=\frac{\bar{F}_T-F_0}{2r\text{var}(F_T)}-\frac{\text{cov}(x,F_T)}{\text{var}(F_T)} \qquad (10\text{—}12)$$

注意到上式的第二项恰好是最小方差解。而第一项可以解释参与期货交易获得的预期收益。换句话说，第二项是纯套期项，而第一项解释了套期是一种投资方式，该投资方式的预期回报应该合并到证券组合的回报。

但这个简单公式描述了与最优套期相关的实际困难。要得到 $\bar{F}_T-F_0$ 的有意义的估计值是相当困难的。事实上，在许多情况下，合理的估计是这个差等于零，所以为什么许多套期者喜欢仅仅使用解的最小方差部分是可以理解的。

例 10.15（小麦套期） 考虑例 10.8 面粉和面包生产商。这个生产商可 287
能是市场上的一个大交易者，对小麦市场状况知道得较多。假定这个生产商预期三个月后小麦价格上涨 5%。但该生产商认识到小麦市场价格每年大约有 30%的波动，所以该生产商设定三个月预测价格的变化为 15%（15%=

$30\%/\sqrt{4}$)。

利用 $x=500\ 000F_T$ 并利用式（10—12），我们得到：

$$h=-500\ 000+\frac{1}{2r\text{var}\ (F_T)}\ (\overline{F}_T-F_0)$$

$$=-500\ 000+\frac{1}{2rF_0\text{var}\ (F_T/F_0)}\left(\frac{\overline{F}_T}{F_0}-1\right)$$

$$=-500\ 000+\frac{1}{6.60\ (0.15)^2r}\times 0.05$$

$$=-500\ 000+\frac{0.336}{r}$$

注意到−500 000这一项表示完全套期的相同规模的反向头寸。另外那一项是投机项，它等于期货价格回报的估计值除以 r 值。

利用前面选择 r 值的方法，我们有 $r=1/1\ 000\ 000$。因此，最终套期是 $h=-500\ 000+336\ 000=-164\ 000$。

10.12　非线性风险套期*

到目前为止，在我们的例子中被套期的风险都是线性的，在这个意义上，最终财富 x 是基础市场变量如商品价格的线性函数。套期的一般理论并不依赖于这种假设，而非线性风险常常发生。例如，财政部发行的政府债券构成的债券组合（见练习 15）的风险免疫就是一个非线性套期问题——因为债券组合价值的变化是将来国库券价格的非线性函数。

非线性风险可能产生于复杂的合约。例如，假定一家美国公司正在谈判按规定的日元价格在未来日期将商品卖给一家日本公司，双方都认识到该美国公司将面临汇率风险。因此，双方达成协议，美国公司承受不利的汇率变化幅度直到 10%，超过这个变动幅度双方将平等地分担汇率变化的冲击。

当某商品的价格受买卖商品数量的影响时，也会产生非线性风险。当所有农场主的收成的数量相互关联时，非线性风险将发生在农业领域，因此任意特定的农场主都会发现他的收成规模与市场价格有关。我们给出这种类型的详细例子。

例 10.16（玉米农场主） 某确定的商品，我们选择玉米，有许多农场主种植，但每个农场主的玉米收成取决于气候状况：在玉米的种植季节，有阳光的天气会比阴云天气生产出更多的玉米。所有玉米都是同时收获的，而每蒲式尔玉米的价格由市场需求函数决定，如图 10—15 所示。这个需求函数是： 288

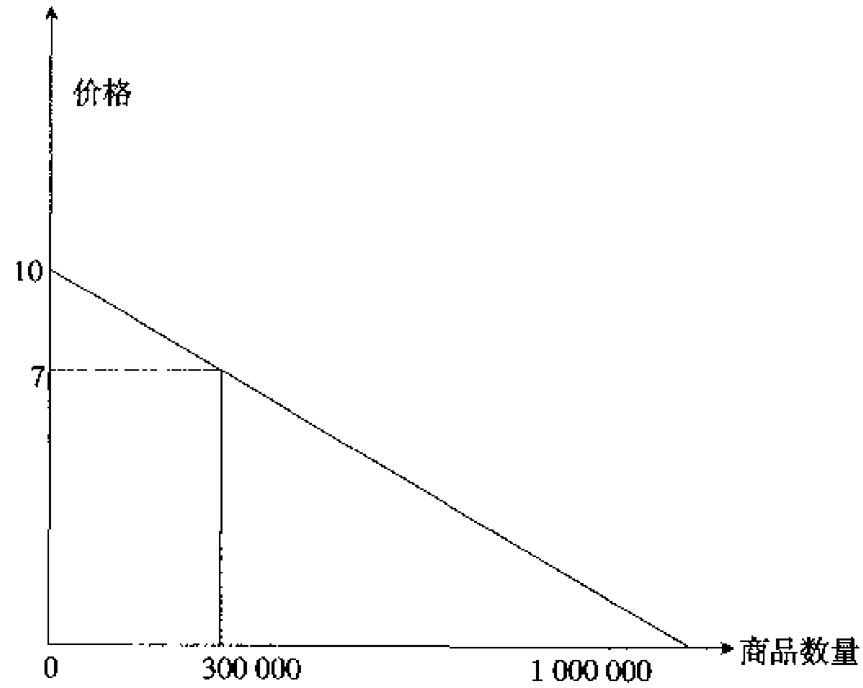


图 10—5 玉米需求

玉米价格从每蒲式耳 10 美元变成 0 美元，取决于玉米的总生产量。

$$P=10-D/100\ 000$$

这里 D 是需求（通过供给需求方程，D 也等于总收成）。每个农场主的庄稼将生产的玉米产量 C 是随机的。我们假定每个农场种植的玉米量在 0 和 6 000蒲式耳之间变化，平均值 $\bar{C}=3\ 000$。不同农场生产的玉米量是完全相

关的。总共有 100 个农场，因此 $\bar{D}=300\ 000$。一个农场主的收益将是：

$$R=PC=\left(10-\frac{D}{100\ 000}\right)C=10C-\frac{C^2}{1\ 000} \qquad (10—13)$$

这表明收益是基础不确定变量 C 的非线性函数。既然 C 是随机的，所以每个农场主面临非线性风险。

农场主能够通过参与玉米期货市场交易提前将这种风险套期吗？分析之前要努力思考这个问题。既然农场主最后将按（有风险的）现货价格卖掉他的玉米收成，现在他可能对在期货市场按已知的价格卖出玉米持谨慎态度。实际上，如果农场主准确地知道他能生产多少玉米，并且只有当价格是不确定的，他才可能通过玉米期货市场卖空这些玉米而实施一个相等规模的反向头寸策略。也许在实际情况下，玉米产量和价格都是不确定的，他应该卖空稍少量的玉米。你怎么看这个问题？

找到最佳套期的途径是弄明白收入、产量和期货头寸之间的关系。为简化起见，我们假定利率是 0。如果每个农场生产的预期值 $\bar{C}=3\ 000$，那么 $D=300\ 000$且我们求得 $P=7$ 美元/蒲式耳。因此 7 美元表示名义预期价格。让我们假定 7 美元也是现行的期货价格 P_0。我们需要决定最佳期货交易量。

289 令 h 表示期货市场头寸。在这个头寸下，农场主的收益将等于：

$$R=PC+h(P-P_0)$$

用 C 代替 P，我们得到：

$$R=10C-\frac{C^2}{1\ 000}+\frac{\bar{C}-C}{1\ 000}h$$

这是农场主必须考虑的方程。研究这个方程的简单方法是将它展示在一张摊开的表上，如表 10—6 所示。表头列出了农场主的玉米生产量，最左列列出了期货头寸（百蒲式耳）。表内的各项表示相应的收益。例如，注意到如果最终产量是 3 000 蒲式耳（预期值），收益是 21 000 美元，它与期货头寸无关。这是因为最终价格将是 7 美元，等于当前的期货价格；因此，期货合约没有任何利润和损失。

表 10—6　　从生产和套期中获得的收益

期货头寸	玉米生产（百蒲式耳）								
	10	15	20	25	30	35	40	45	50
50	19 000	20 250	21 000	21 250	21 000	20 250	19 000	17 250	15 000
45	18 000	19 500	20 500	21 000	21 000	20 500	19 500	18 000	16 000
40	17 000	18 750	20 000	20 750	21 000	20 750	20 000	18 750	17 000
35	16 000	18 000	19 500	20 500	21 000	21 000	20 500	19 500	18 000
30	15 000	17 250	19 000	20 250	21 000	21 250	21 000	20 250	19 000
25	14 000	16 500	18 500	20 000	21 000	21 500	21 500	21 000	20 000
20	13 000	15 750	18 000	19 750	21 000	21 750	22 000	21 750	21 000
15	12 000	15 000	17 500	19 500	21 000	22 000	22 500	22 500	22 000
10	11 000	14 250	17 000	19 250	21 000	22 250	23 000	23 250	23 000
5	10 000	13 500	16 500	19 000	21 000	22 500	23 500	24 000	24 000
0	9 000	12 750	16 000	18 750	21 000	22 750	24 000	24 750	25 000
−5	8 000	12 000	15 500	18 500	21 000	23 000	24 500	25 500	26 000
−10	7 000	11 250	15 000	18 250	21 000	23 250	25 000	26 250	27 000
−15	6 000	10 500	14 500	18 000	21 000	23 500	25 500	27 000	28 000
−20	5 000	9 750	14 000	17 750	21 000	23 750	26 000	27 750	29 000
−25	4 000	9 000	13 500	17 500	21 000	24 000	26 500	28 500	30 000
−30	3 000	8 250	13 000	17 250	21 000	24 250	27 000	29 250	31 000
−35	2 000	7 500	12 500	17 000	21 000	24 500	27 500	30 000	32 000
−40	1 000	6 750	12 000	16 750	21 000	24 750	28 000	30 750	33 000
−45	0	6 000	11 500	16 500	21 000	25 000	28 500	31 500	34 000
−50	−1 000	5 250	11 000	16 250	21 000	25 250	29 000	32 250	35 000

注：收益是用各种不同的期货头寸和生产量计算的。

290 相等规模的反向套期对应于－3 000（或表中的－30）的期货头寸。注意到这实际上是一个风险头寸——比零头寸要多得多——其收益在 3 000 美元到 31 000 美元之间变动。最低风险头寸是多少呢？我们通过浏览各行，寻找变化最小的那一行可求得这个头寸。这就是标上 40 的那一行，对应的头寸是 4 000。哇！最优头寸与我们可能预期的符号相反，而数值比我们预期的收成量高得多。[5]

我们怎么理解这个解的性质呢？原来的收益函数（10—13）表示在图 10—6 中。作为玉米种植量函数的＋4 000 期货头寸获得的利润也表示在图中。注意到从期货合约获得的利润随玉米种植量的增加而减少。这是因为随着玉米种植的增加，玉米的最终现货价格下降了。而收益随玉米产量的增加而增加（虽然收益曲线最后要向下弯曲）。在名义值 $C=3\ 000$ 处，两个函数的斜率恰好相反——收益曲线的斜率是 4 而期货利润线的斜率是－4。这两个斜率相互抵消，意味着在这个名义价值点净收益曲线是水平的。这是非线性套期问题最好的线性近似。

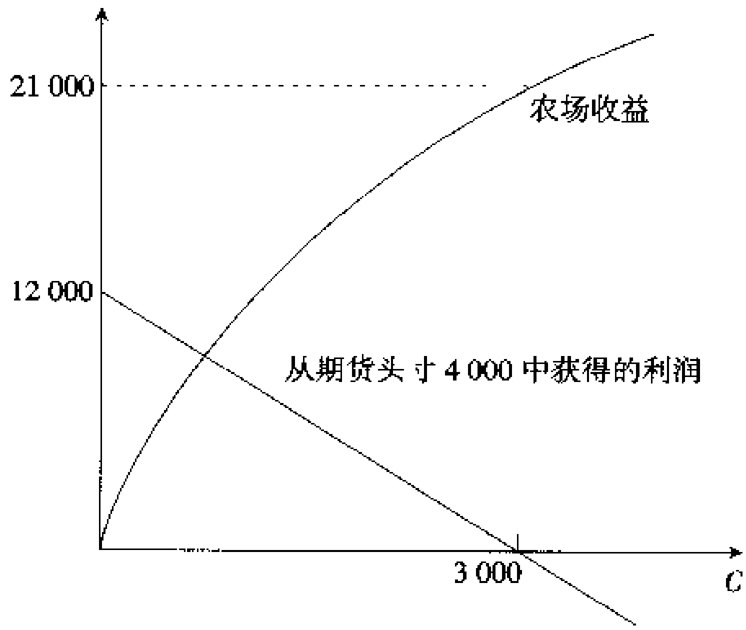


图 10—6　农场收益和套期

当支付的斜率等于收益的斜率的相反数时，可得到最佳套期头寸。

这里有一种考虑这种情况、解决这个明显难题的方法。农场主对价格变动有一个天然的套期。要是玉米价格下跌，农场主从玉米获得的收益由于玉米收成增加而上升，而不是下跌（如果玉米收成不受影响的话）。事实上，这个天然套期比相同规模的反向套期要大得多，这样可使净收益保持不变。因此，农场主必须在期货市场持有一个正头寸以抵消天然套期。

10.13 小结 291

远期合约是在将来固定日期购买或卖出某种资产的合约。远期合约的内在价值每天都可能发生变化，但在交割日之前没有任何现金流。期货合约每天要被盯市，其利润和损失要流入保证金账户，所以期货合约持续具有零价值，除此以外，期货合约与远期合约是类似的。在没有运输成本并假定商品能够被卖空时，远期合约的价格是 $F=S/d$，这里 S 是资产的现在价值，d 是直到交割时的时间间隔的贴现率。换句话说，F 是现在的现货价格 S 的将来价值。如果存在运输成本，F 是运输成本的将来价值加上 S 的将来价值。正像经常发生的情况那样，如果商品不可能卖空，则远期价格被限制在少于 S/d 的范围。

如果利率遵循动态预期，远期合约的价格和相应的期货合约的价格是一致的，尽管它们的现金流方式稍有不同。为分析方便的目的，期货合约能够用相应的远期合约进行近似。

远期和期货被用于商业交易中进行风险套期。最简单的一种套期是完全（或相等而反向）套期，在将来现货市场购买或卖出某商品的义务实质上通过达成一个同样规模的期货合约以大家知道的价格被提前履行了。如果没有可用的恰好匹配该义务的商品的套期工具，就可以用与该义务紧密相关的工具构造最小方差套期。但为了产生重大的套期效果，要求比较高的相关性。

根据最优组合的观点，在购买或销售商品义务和市场环境的约束条件下使预期效用最大化，可以得到更复杂的套期。这种方法基本上具有处理任何情况的优势，即使某些情况下决策对组合价值具有非线性影响，但这种方法的缺点是要求比较详尽的信息。在任何情况下，期货市场交易都是许多套期操作的一个重要方面。

练习

1.（黄金期货）目前黄金的价格是每盎司 412 美元。储存成本是每盎司每年 2 美元，可按季度提前支付。假定 9%的固定利率按季度复利，9 个月后交割的黄金，其理论远期价格是多少？

2.（比例持有费◇）假定时间 0 时签署某资产的远期合约，交割前有 M 期。假定时期 k 的持有成本是 $qS(k)$，其中 $S(k)$ 是该资产在时期 k 的现货价格。证明远期价格是：

$$F=\frac{(1-q)^M S}{d(0,M)}$$

292 ［提示：考虑一个证券组合，通过卖出一部分要求的该资产支付所有的运输成本。令时期 k 持有的资产单位数为 $x(k)$，并以 $x(0)$ 表示 $x(M)$。］

3.(白银合约)在某年的 4 月初,白银远期价格(美分/每金衡制盎司)如下：

4 月份	406.50
7 月份	416.64
9 月份	423.48
12 月份	433.84

（假定合约在给定的月末结算。）白银的运输成本是每盎司每年大约 20 美分，每月初支付。试估计月初的利率。

4.（连续时间持有成本）假定连续时间复合利率是固定利率 r。每单位

时间的持有成本费与现货价格成比例；也就是说，持有费是 $qS(t)$。证明时间 T 交割的合约的远期价格是：

$$F=Se^{(r-q)T}$$

[提示：利用练习 2。]

5.（持有成本证明）完成“持有成本的远期价格公式”（10—3）证明的第二部分。为构造一个套利机会，持有一单位远期多头并卖空一单位现货。为了执行这个空头，必须从某人，如 X 先生处借入一种资产。作为我们与 X 先生的安排的一部分，我们要求他像通常的那样支付持有成本，因为如果我们不借入该资产，他将不得不支付该资产。然后，我们将这个现金流进行投资。在最终时间，我们按远期合约要求的义务购买一单位资产，并偿还 X 先生。试说明论述细节。

6.（外汇替代物）考虑例 10.10 的情况。如不卖空一个期货合约，美国公司可能借入 500/（$1+r_G$）德国马克（r_G 是德国的 90 天利率），卖掉这些马克换成美元，并将美元投资于政府债券，以后用德国定单的支付款偿还德国马克贷款。讨论这个程序是怎样与原来的程序相联系的。

7.（债券远期）某特定的 10 年期债券现在的卖价是 920 美元。你的一个朋友拥有这种债券的 1 年后交割、交割价格为 940 美元的远期合约。该债券每 6 个月支付利息 80 美元，一次利息是从现在开始 6 个月支付，另一次利息刚好在远期合约到期前支付。现在，6 个月期利率和 1 年（按半年复利）期利率分别是 7%和 8%（年利率是按 6 个月复利计算的）。该远期合约现在的价值是多少？

8.（简单公式）将债券的现金流转换为互换的固定部分推导公式（10—6）。

9.（股权互换◇）A. 盖洛德先生管理着一个养老基金并相信他的选股能力是杰出的。但是，他担心市场可能下滑。他考虑进行股权互换，每个季度 i 直到季度 M，他支付给互换对方 B 前一个季度标准普尔 500 指数的总回报率乘以某一名义本金并收到按固定利率 r 和同一本金的利息支付。总回报率包括了股息。具体地，$1+r_i=(S_i+d_i)/S_{i-1}$，这里 S_i 和 d_i 分别是季度 i 293

的指数值和季度 $i-1$ 到季度 i 收到的股息。按以下步骤推导这个互换的价值：

(a) 令 $V_{i-1}(S_i+d_i)$ 表示时间 i 收到的 (S_i+d_i) 在时间 $i-1$ 的价值。证明 $V_{i-1}(S_i+d_i)=S_{i-1}$ 并求 $V_{i-1}(r_i)$。

(b) 求 $V_0(r_i)$。

(c) 求 $\sum_{i=1}^{M}V_0(r_i)$。

(d) 求互换的价值。

10. (远期香子兰) 按年支付的普通香子兰利率互换的浮动利率部分和一单位名义本金在每年末有现金流，定义了时间 1 开始的现金流 $(c_0, c_1, \cdots, c_{M-1})$，这里 c_i 表示 i 年初实际短期利率。利用远期交易的概念，证明在时间 $i+1$ 收到的价值 c_i 在时间 0 时的价值等于 $d(0,\ i+1)\ r_i$，这里 r_i 是隐含在现在（时间 0）的利率期限结构的时间 i 的短期利率，$d(0,\ i+1)$ 是隐含的到时间 $i+1$ 的贴现率。因此，该现金流的价值是 $\sum_{i=0}^{M-1}d(0,\ i+1)r_i$。证明这个式子就是 10.5 节末的 V 的公式。

11. (特定的香子兰) 假定现在的利率期限结构是 (0.070，0.073，0.077，0.081，0.084，0.088)。一个普通香子兰利率互换将在每年末按年初决定的短期浮动利率支付。因此，一个具有名义本金 1 000 万美元的 6 年互换已经形成。

(a) 互换的浮动利率部分的价值是多少？

(b) 互换的固定部分采用什么利率将使互换双方平等？

12. (推导) 推导式 (10－12) 给出的均值－方差套期。

13. (葡萄柚套期) 农场主 D. 琼斯有一大片葡萄柚将要准备收获并将在 3 个月后卖出150 000磅葡萄柚汁。琼斯担心价格可能发生变化，所以他考虑套期。市场上不存在葡萄柚汁期货合约，但有橙汁期货合约。他的儿子盖文最近研究了最小方差套期并建议最小方差套期可作为一种可能的方法。现行的现货价格是每磅橙汁 1.20 美元，每磅葡萄柚汁 1.50 美元。橙汁价格和葡萄柚

汁价格的标准差是每年大约 20%，且它们之间的相关系数大约是 0.7。琼斯的最小方差套期是什么，这个套期与不做任何套期相比有多大的有效性？

14.（反向套期方差）假定现金流由 $y=S_TW+(F_T-F_0)h$ 决定。令 $\sigma_S^2=\text{var}(S_T)$，$\sigma_F^2=\text{var}(F_T)$，$\sigma_{ST}=\text{cov}(S_T, F_T)$。

(a) 在相等但反向的套期中，h 是套期工具的反向等价美元价值。因此 $h=-kW$，其中 k 是资产和套期工具的价格比率。用相等规模的反向套期将 y 的标准差表示成如下形式： 294

$$\sigma_y=W\sigma_S\times B$$

（也就是求 B。）

(b) 将这个公式应用到例 10.12 并比较均值方差套期。

15.（套期免疫◇）一个养老基金刚刚支付了一部分债务，结果该基金再也不能完全免疫了。基金经理决定该公司不是改变证券组合而是应该利用政府债券期货合约将所持头寸套期。基金经理需要对现货利率收益曲线的平行移动进行套期。利用如下信息决定套期头寸的数值。

• 年现货利率序列是：0.05，0.053，0.056，0.058，0.06，0.061。

• 负债：1 年期后到期 100 万美元，2 年后到期 200 万美元，3 年后到期 100 万美元。

• 现在的债券组合：2 年后到期的平价零息债券 425.3 万美元。（利用连续时间贴现公式 e^{-rt}。）

• 利用 1 年后交割的 6 年后到期的零息债券的期货合约构造套期。

16.（对称概率◇）假定将来时间 T 将收到的财富具有如下形式：

$$W=a+hx+cx^2$$

这里 a 是常数而 x 是随机变量。变量 h 的值可以由投资者选择。假定投资者具有递增的严格凹的效用函数。还假定 x 的概率分布是对称的；也就是说 x 和 $-x$ 具有同样的分布。它满足 $E(x)=0$ 且投资者不能影响预期的财富值。

(a) 证明最优选择是 $h=0$。

(b) 将这个结果应用于玉米农场问题，证明最优期货头寸是+4 000。

17. (双对称概率◇) 假定收益具有如下形式：

$$R=Axy+Bx-hy$$

这里 h 是能够选择的，而 x 和 y 是随机变量。x 和 y 的分布关于点 (0, 0) 是对称的，也就是说 $-x$ 和 $-y$ 与 x 和 y 具有同样的分布。证明使 R 的方差最小化的 h 是：

$$h=B\sigma_{xy}/\sigma_y^2。$$

18. (一般农场问题◇) 如玉米农场的例子一样，假定农场具有随机产量并且最终现货价格由同样的需求函数决定。但是，农场的收成与总需求并不是完全相关的，但 σ_{CD} 和 σ_D^2 是已知的。现在的期货价格也等于预期的最终现货价格。证明最小方差套期头寸是：

$$h=100\ 000\left(\frac{-3}{100}+\frac{7\sigma_{CD}}{\sigma_D^2}\right)$$

295 检验特例 (a) $D=100C$ 和 (b) $\sigma_{CD}=0$ 的解。[提示：利用练习 17。]

【注释】

[1] 除了上述列举的主要类型外，还有许多其他衍生证券，如可变利率优先股票、可变利率抵押贷款、优惠利率贷款和 LIBOR 利率为基础利率的各种票据。金融机构每年还创造和销售许多新的衍生证券。幸运的是，其中大部分金融产品可以用一些普遍原理进行分析。

[2] 实际上，这是期货市场价格，但它们可以设想为远期价格。

[3] 典型地，这个价值计算需要规定其他一些细节。例如，固定支付的利息率通常按每年 365 天计算，而浮动利率按每年 360 天计算。

[4] 理想地，我们可以用总财富表示效用函数，但这里我们可以假定额外的财富仅仅改变 U 的定义。

[5] 事实上，如果不同规模收成的概率是对称的，则可以证明：对任意凹的递增效用函数这个头寸都是最优的。

【参考文献】

有几本书是专门研究期货市场的，如文献［1—3］。文献［4］是与这本教材程度相类似的出色的教材。文献［5］中证明了固定利率条件下期货远期等价性结果。套期技术的讨论见文献［6］，文献［7］用于与练习 7 类似的利率期货。

1. Duffe, D. (1989), *Futures Markets*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. Teweles, R. J., and F. J. Jones (1987), *The Futures Game*. McGraw-Hill, New York.
3. Stoll, H. R., J., and R. E. Whaley (1993), *Futures and Options*, South-West Publishing, Cincinnati, OH.
4. Hull, J. C. (1993), *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
5. Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1981), "The Relation between Forward Prices and Futures Prices", *Journal of Financial Economics*, 9, 321—346.
6. Figlewski, S. (1986), *Hedging with Financial Futures for Institutional Investors*, Ballenger Publishing, Cambridge, MA.
7. Kolb, R. W., and G. D. Gay (1982), "Immunizing Bond Portfolios with Interest Rate Futures", *Financial Management*, 11, 81—89.

第11章 资产动态模型

296 真正的多期投资在价值方面是波动的，分配随机股息，存在于可变的利率环境中并且连续受其他多种不确定性的影响。这一章通过说明如何方便而实际地将资产价格波动建模，开始对这种投资进行研究。因此，这一章没有包括多期投资原理的内容，而是介绍构成以后各章分析基础的数学模型。

用于描述资产动态的两种主要模型是：二项式网格模型和伊藤过程（Ito Processes)。二项式网格模型在分析过程上比伊藤过程简单，它们奠定了与投资问题有关的计

算工作的良好基础。因此最好是首先研究二项式网格模型。重要的投资概念都能用这些模型表述，而且许多实际投资问题能够用二项式网格框架公式化并加以解决。实际上，以后各章大约 80%的内容是用二项式网格模型描述的。

伊藤过程的每一时期股票价格的各种可能变化具有连续统一性，而不是只有两个价格变化，在这个意义上伊藤过程比二项式网格模型更符合实际。伊藤过程模型也允许某些问题用像计算一样的解析方法解决。伊藤过程也为清晰而一致地构造二项式网格模型奠定了基础。由于这些原因，伊藤过程模型成为解决动态问题的基础。为了完全理解投资原理，理解这些模型是很重要的。

本章内容是以前面的关于不同模型的作用的视角为基础组织的。第一部分直截了当地描述了二项式网格模型。有了这些背景知识，就可以研究以后各章的大部分内容了。因此，你可能希望只阅读第一部分，然后跳到下一章。

本章其余部分研究价格具有连续统一性的模型。这些模型以伊藤过程为基础，从离散时间模型到连续时间模型逐渐展开。 297

11.1 二项式网格模型

为了定义二项式网格模型，必须规定基本的期间长度（如一周）。按照这个模型，如果资产价格在期初是已知的，那么下一期初的资产价格是仅有的两个可能价值之一。通常这两个可能价值定义为前一期价格的倍数——一个倍数为 u（价格上升）而另一个倍数为 d（价格下降）。u 和 d 都是正数，且 $u>1$ 而（通常）$d<1$。因此，如果期初的价格是 S，那么下一期的价格或者是 uS 或者是 dS。对已知的概率 $p(0<p<1)$，这两种可能价值的概率分别是 p 和 $1-p$。也就是说，如果现在的价格是 S，那么新价格是 uS 的概率是 p 而新价格是 dS 的概率是 $1-p$。资产价格连续几期都按这个模型演变。

这种网格的一般形式如图 11—1。股票价格能够形象化为向右方的一个

节点到一个节点的运动。从任何一个节点向上运动的概率是 p 而向下运动的概率是 $1-p$。网格就是这种情形的合适结构，而不是树形结构，因为一个向上运动接着一个向下运动与一个向下运动接着一个向上运动是一样的。两种情况的结果都是 ud 乘以价格。

这个模型初看似乎太简单，因为下一期它只允许两个可能值。但如果期
298 间长度小，在经过几个阶段后，就会有许多可能值。为完全详细说明这个模型，我们必须选择 u 和 d 的值以及概率 p。正如将要讨论的那样，这些值应该按照尽可能忠实地捕捉股票价格的真实随机特性的方式选取。

因为模型是倍增性的（新价值是 uS 或 dS，其中 $u>0$，$d>0$），所以价格将永远不会变成负值。因此，考虑将价格的对数作为基础变量是可能的。由于以后几节讨论的理由，事实上，使用对数很有帮助，并且适当选择参数可推导出简单的公式。

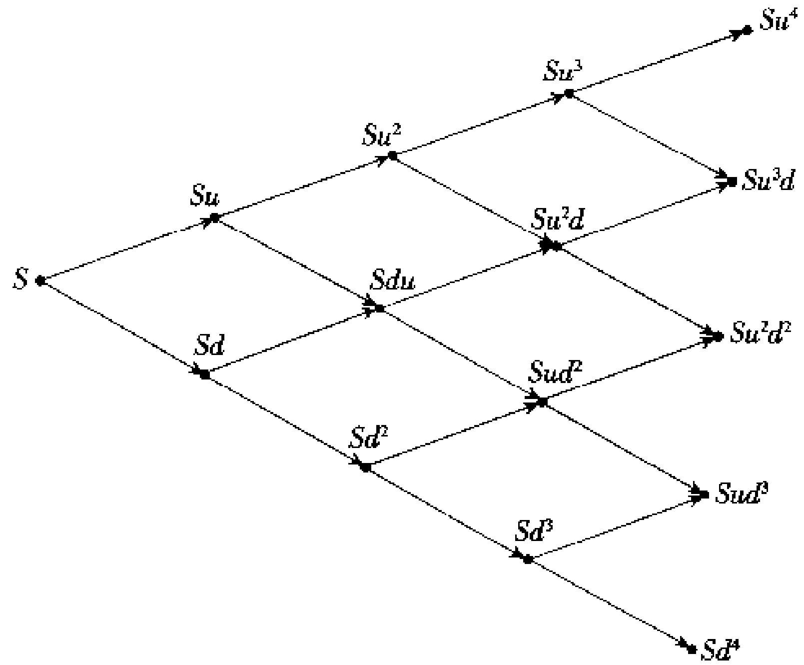


图 11—1　二项式网格股票模型

在每一步股票价格 S 或者增加到 uS 或者减少到 dS。

相应地，我们定义 v 为预期年增长率。[1] 具体地，

$$v=E[\ln(S_T/S_0)]$$

这里 S_0 是初始股票价格，而 S_T 是 1 年末的价格。

同样的，我们定义 σ 为年标准差。具体地，

$$\sigma^2=\mathrm{var}[\ln(S_T/S_0)]$$

如果选择的期间长度 Δt，与 1 相比较小，则二项式网格模型的参数可选择为：

$$\begin{aligned} p&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t} \\ u&=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d&=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \tag{11-1}$$

利用这些选择，二项式模型可以使 v 和 σ 的值近似地匹配（正如以后的证明）；也就是说，二项式模型中 $\ln S$ 的预期增长率将近似于 v，而该增长率的方差将近似于 σ^2。如果 Δt 减少，这种匹配的近似程度将提高，随着 Δt 趋近于零而变成严格的匹配。

例 11.1（反复无常的股票） 考虑参数 $v=15\%$ 和 $\sigma=30\%$ 的一种股票。我们希望构造一个每周为一期的二项式模型。根据（11—1），我们计算得到：

$$u=e^{0.30/\sqrt{52}}=1.042\,48,d=1/u=0.959\,25$$

而

$$p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{0.15}{0.30}\sqrt{\frac{1}{52}}\right)==0.534\,669$$

假定 $S(0)=100$，这个例子的网格如图 11—2。

在本章学完允许一种连续定价模型以后，我们将回到二项式网格。可以发现这个二项式模型自然接近于这些模型。

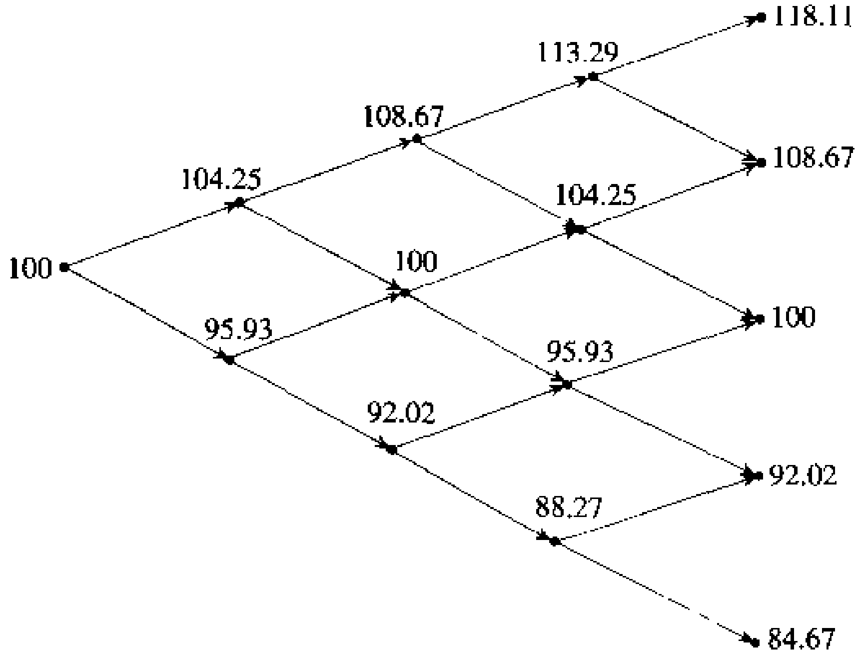


图 11—2 例 11.1 的网格

参数选择使得价格对数的预期增长率和增长率的方差与已知相应的资产价值匹配。

11.2 可加模型

现在我们研究价格可能在连续统一体中变化的模型。首先，我们将考虑离散时间模型，这一节开始研究可加模型，然后我们将考虑伊藤过程定义的连续时间模型。

让我们注意 $N+1$ 个时点，记为 $k(k=0,1,2,\cdots,N)$。我们同样注意在每个时间由价格刻画的特殊资产。在时间 k，资产价格以 $S(k)$ 表示。我们的模型认为任何时间的资产价格都在某种程度上依赖于以前的价格。

最简单的模型是**可加模型**（additive model），如：

$$S(k+1)=aS(k)+u(k) \tag{11—2}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,N$。在这个方程中 a 是常数（通常 $a>1$）而数值

$u(k)$（$k=0$，1，2，…，$N-1$）是随机变量。所有 u（k）可以看成引起价格波动的“冲击”或“扰动”。为了操作或运行这个模型，初始价格 $S(0)$ 是规定的，所以一旦给定随机变量 $u(0)$ 的值，就能够决定价格 $S(1)$。逐步累次重复这个过程，可以决定 $S(2)$，$S(3)$，…，$S(N)$。

这个模型的关键要素是随机变量序列 $u(k)$（$k=1$，2，…，N）。我们假定这些随机变量在统计上是相互独立的。

注意到任何时间的价格仅仅取决于最近期的以前时间的价格和随机扰动。它没有明确地依赖于其他以前的价格。

正态价格分布

从（11—2）式直接解出几个价格是很有启发的。通过直接代入，我们 300
得到：

$$S(1)=aS(0)+u(0)$$

$$S(2)=aS(1)+u(1)$$

$$=a^2S(0)+au(0)+u(1)$$

通过简单推导可以看出，对一般的 k 有：

$$S(k)=a^kS(0)+a^{k-1}u(0)+a^{k-2}u(1)+\cdots+u(k-1) \qquad (11—3)$$

从而，$S(k)$ 是 $a^kS(0)$ 加上 k 个随机变量之和。

我们常常假定随机变量 $u(k)$（$k=0$，1，2，…，$N-1$），是具有共同方差的相互独立的正态随机变量。那么，由于正态随机变量的线性组合同样是正态的（见附录 A），所以从式（11—3）可得 $S(k)$ 本身是一个随机变量。

如果所有随机变量 $u(k)$ 的预期值是 0，那么 $S(k)$ 的预期值是：

$$E[S(k)]=a^kS(0)$$

当 $a>1$ 时，这个模型具有价格预期值按几何级数（也就是说，按 a^k）增长的性质。实际上，常数 a 是模型的增长率因子。

可加模型在结构上简单而且易于操作。价格的预期值按几何级数增长，

而且所有的价格是正态随机变量。但是，模型也具有严重的缺陷，因为它缺乏现实性。正态随机变量可能取负值，这意味着模型中的资产价格也可能取负值，但实际的股票价格永远不会为负数。进一步，如果一个股票开始的价格是 1 美元，标准差 σ 是 0.50 美元，然后股票价格缓慢地变动渐渐趋向于 100 美元的价格，这看起来标准差 σ 很不可能停留在 0.50 美元的水平上。更可能的是标准差与价格成比例。由于这些原因，可加模型不是一个资产动态的一般模型。这个模型对短期（也许长达几个月的普通股票）的局部分析是有用的，而且它也是其他模型有用的建筑材料。但它不能单独作为描述长期或中期波动的演进模型。因此，我们必须考虑一个更好的替代模型，它就是倍数模型。(但是，我们对可加模型的理解对理解那些更高级的模型将是很重要的。)

11.3 倍数模型

倍数模型具有如下形式：

$$S(k+1)=u(k)S(k) \qquad (11—4)$$

其中 $k=0，1，2，\cdots，N-1$。这里数值 $u(k)$ $(k=0，1，2，\cdots，N-1)$，
301 还是相互独立的随机变量。变量 $u(k)$ 规定了时间 k 与时间 $k+1$ 之间的价格相对变化。这个相对变化是 $S(k+1)\ /S(k)$，独立于总体数量 $S(k)$。同时，它还独立于价格单位。例如，如果我们将价格单位从美元改变为德国马克，相对价格变化仍是 $u(k)$。

如果我们在方程的两边取自然对数，倍数模型将变成我们熟悉的形式。这样我们得到：

$$\ln S(k+1)=\ln S(k)+\ln u(k) \qquad (11—5)$$

其中 $k=0，1，2，\cdots，N-1$。因此，用价格的对数而不是价格本身时，倍数模型变成了可加型的。所以我们可以利用可加模型的知识来分析倍数模型。

现在按照 $\ln u(k)$ 直接规定随机扰动是很自然的。特别地，我们令：

$$w(k)=\ln u(k)$$

其中 $k=0, 1, 2, \cdots, N-1$，并且我们规定 $w(k)$ 都是正态随机变量。假定它们是相互独立的，并且每个随机变量的期望值为 $\overline{w}(k)=v$，方差为 σ^2。

我们能将原来的倍数扰动表示成：

$$u(k)=e^{w(k)} \tag{11—6}$$

其中 $k=0, 1, 2, \cdots, N-1$。每个变量 $u(k)$ 都是**对数正态（Lognormal）**随机变量，因为，事实上它的对数是正态随机变量。

现在注意到不存在负值的问题了。虽然正态变量 $w(k)$ 可能取负值，但相应的由式（11—6）给出的 $u(k)$ 总是正值。既然与价格相乘的随机因子是 $u(k)$，结果是在这个模型中的价格仍然是正的。

对数正态价格

容易得到倍数模型连续相继的价格为：

$$S(k)=u(k-1)u(k-2)\cdots u(0)S(0)$$

我们在方程两边取对数，得到：

$$\ln S(k)=\ln S(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\ln u(i)=\ln S(0)+\sum_{i=0}^{k-1}w(i)$$

$\ln S(0)$ 这一项是常数，而每一个 $w(i)$ 都是正态随机变量。既然随机变量的和本身也是随机变量（见附录 A），自然结果 $\ln S(k)$ 也是正态的。换句话说，在倍数模型下所有的价格是对数正态分布。

如果每个 $w(i)$ 的期望值 $\overline{w}(i)=v$，方差为 σ^2，并且所有的 $w(i)$ 是相 302
互独立的，那么我们得到：

$$E[\ln S(k)]=\ln S(0)+vk \tag{11—7a}$$

$$\text{var}[\ln S(k)]=k\sigma^2 \tag{11—7b}$$

因此，期望和方差都随 k 的增加而线性增加。

实际股票分布

这时候要问这个理论模型与实际的股票价格行为的拟合性有多好是很自然的。实际的股票价格是对数正态分布吗?

答案是：以过去的股票价格记录的分析为基础，大多数股票的价格分布相当接近于对数正态分布。为了证明这一点，我们选择1周的名义期间长度并对许多k值记录许多差值$\ln S(k+1)-\ln S(k)$，也就是说，我们记录许多周股票价格对数的每周变化情况。然后，我们建立这些值的直方图并与同样方差的正态分布进行比较。除了被观察到的分布在接近均值时稍小而在极端大的值（或者正的或者负的极大的值）时较大，典型地，被测度的分布与正态分布相当接近。这种形状上的细小变化被形象化地称为厚尾现象。（见
303 图11-3。[2]）被观察到的分布的尾部比正态分布要大。这意味着大的价格变化倾向于多少有点比具有同样方差的正态分布预测发生的更多。对大多数应用（不是全部）来说，这个细微的偏差并不重要。

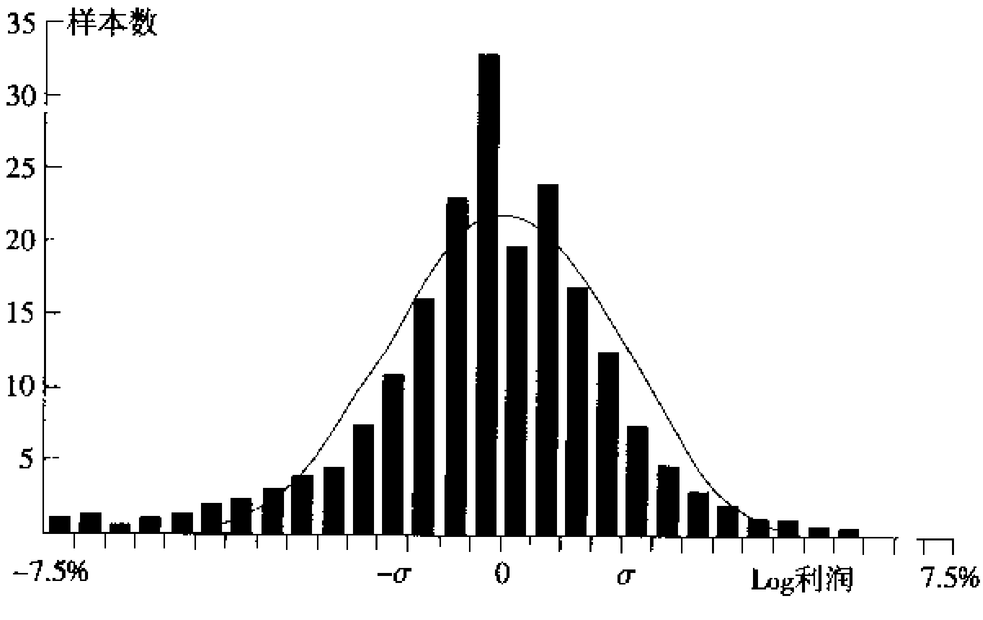


图11—3 观察的回报的对数分布

这个分布尾部较同样方差的正态分布要厚。

11.4　典型参数值*

时间 k 到 $k+1$ 之间的股票回报是 $S(k+1)/S(k)$，在倍数模型里它等于 $u(k)$。$w(k)=\ln u(k)$ 的值就是回报的对数。$w(k)$ 的平均值用 v 表示，而 $w(k)$ 的方差用 σ^2 表示。像普通股票这样的资产，典型参数值能够从相应的回报值中推算出来。因而，对股票而言，当时间长度是 1 年时，参数 $v=E[w(k)]$ 和 $\sigma=\text{stdev}[w(k)]$ 的典型值可能是：

$$v=12\%,\sigma=15\%$$

如果期间长度小于 1 年，这些参数值按比例下降[3]，也就是说，如果期间长度是 1 年的一部分 p，那么：

$$v_p=pv,\sigma_p=\sqrt{p}\sigma$$

这些值可以按标准方式用历史记录进行估计（但正如第 8 章提出的，要留心这些估计的有效性）。如果数据资料有 $N+1$ 个时点，横跨 N 个时期，那么单期 v 的估计值为：

$$\begin{aligned}\hat{v} &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\ln\left[\frac{S(k+1)}{S(k)}\right]\\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\ln S(k+1)-\ln S(k)]\\ &= \frac{1}{N}\ln\left[\frac{S(N)}{S(0)}\right]\end{aligned}$$

因此，所有问题都落在求最后时点价格与第一个时点价格的比率上。

σ^2 的标准估计是：

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\ln\left[\frac{S(k+1)}{S(k)}\right]-\hat{v}\right\}^2$$

就这些回报参数的估计来说，这些估计的误差可以通过估计的方差来刻画。对 v 而言，估计的方差是：

$$\mathrm{var}(\hat{v})=\sigma^2/N$$

而对 σ^2 而言，估计的方差是（假定 $w(k)$ 是正态分布）：

$$\mathrm{var}(\hat{\sigma^2})=2\sigma^4/(N-1)$$

304 从而对前面的假定值，也就是说 $v=12\%$，$\sigma=15\%$，我们发现 v 降低到 0.05（仍然是真实值的一部分）时，要降低估计的标准差[4]，需要 10 年的数据资料。另一方面，用仅仅一年的周回报数据资料，我们能够获得 σ^2 的相当好的估计。[5]

11.5 对数正态随机变量

如果 u 是对数正态随机变量，那么变量 $w=\ln u$ 是正态的。在这种情况下，我们发现倍数模型中的所有价格都是对数正态随机变量。因此，研究这种随机变量的几种重要性质是很有用的。

对数正态随机变量概率分布的一般形状如图 11—4。注意到这个变量总是非负的，且这个分布有点尖峰。

假定 w 是正态分布，且其期望值为 $\bar{w}$，方差为 σ^2。$u=e^w$ 的期望值是多少呢？快速猜测可能是 $\bar{u}=e^{\bar{w}}$，但这是错误的。实际上，$\bar{u}$ 比它要大一个因子 $e^{\frac{1}{2}\sigma^2}$，也就是：

$$\bar{u}=e^{\bar{w}+\frac{1}{2}\sigma^2} \tag{11-8}$$

这个结果可以直观地理解，注意到随着 σ 增加，对数正态分布曲线将伸展延长。它不可能向下伸展到零以下，但它能够向上无限地伸展延长。因此，当 σ 增长时平均值也跟着增长。

对低波动系数的股票而言，额外的一项 $\frac{1}{2}\sigma^2$ 实际上相当小。例如，考虑一个股票每年的均值为 $\bar{w}=0.12$，每年的方差 $\sigma=0.15$。矫正项 $\frac{1}{2}\sigma^2=$

0.022 5，与 $\bar{w}$ 相比很小。但对高波动系数的股票而言，矫正项可能很大。 305

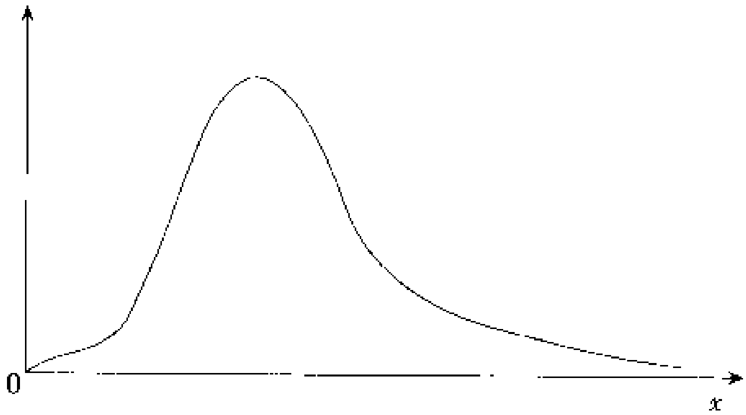


图 11—4　对数正态分布

仅当 $x>0$ 时，对数正态分布是非零的。

11.6　随机游走和维纳过程

在 11.7 节，我们将在倍数模型中缩短期间长度，并且当期间长度趋于零时取极限。这将得到连续时间模型。为了给那个步骤做准备，我们引进特殊的时间的随机函数，称为随机游走和维纳过程。

我们假定有 N 个长度为 Δt 的时期。我们通过如下关系式定义可加过程 z：

$$z(t_{k+1})=z(t_k)+\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t} \qquad (11—9)$$

$$t_{k+1}=t_k+\Delta_t \qquad (11—10)$$

其中 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N$。这个过程被称为随机游走 **(random walk)**。在这些方程中，$\varepsilon(t_k)$ 是均值为 0、方差为 1 的随机变量——**标准化正态随机变量 (standardized normal random variable)**。这些随机变量是互不相关的，也就是说，对 $j\neq k$，$E[\varepsilon(t_j)\ \varepsilon(t_k)]=0$。这个过程开始于 $z(t_0)=0$。此后，一个特定的实现轨道根据随机变量 $\varepsilon(t_k)$ 的随机性变化。（不久将清楚在式 (11—9) 中使用 $\sqrt{\Delta t}$ 的理由。）随机游走的特定轨道如图 11—5。

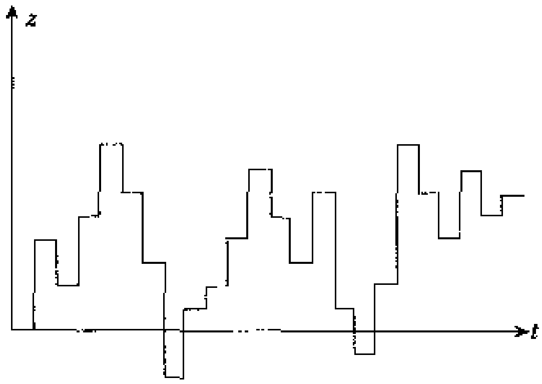


图 11—5 可能的随机游走

正态随机变量决定的运动。

能引起特殊兴趣的是差分随机变量 $z(t_k)-z(t_j)$，其中 $j<k$。我们能将这个差分改写成：

$$z(t_k)-z(t_j)=\sum_{i=j}^{k-1}\varepsilon(t_i)\sqrt{\Delta t}$$

这是正态随机变量，因为它是正态随机变量的和。我们立即得到：

$$E[z(t_k)-z(t_j)]=0$$

306 同样，利用所有 $\varepsilon(t_k)$ 的独立性，我们得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[z(t_k)-z(t_j)] &= E\Big[\sum_{i=j}^{k-1}\varepsilon(t_i)\sqrt{\Delta t}\Big]^2\\ &= E\Big[\sum_{i=j}^{k-1}\varepsilon(t_i)^2\Delta t\Big]\\ &= (k-j)\Delta t = t_k-t_j\end{aligned}$$

从而 $z(t_k)-z(t_j)$ 的方差恰好等于这两个时点的时间差 t_k-t_j。这个计算也说明了为什么在随机游走的定义中使用$\sqrt{\Delta t}$以致 Δt 出现在方差中。

如果两个时间间隔是不重叠的，那么我们很清楚与这两个不同的时间间隔相关的差分随机变量是互不相关的。也就是说，如果 $t_{k1}<t_{k2}\leqslant t_{k3}<t_{k4}$，那么差分变量 $z(t_{k2})-z(t_{k1})$ 与差分变量 $z(t_{k4})-z(t_{k3})$ 是不相关的，因为每个差分由不同的 ε 构成，而它们本身是互不相关的。

当 $\Delta t\to 0$ 时，将式（11—9）的随机游走过程取极限就得到一个维纳过

程。我们将表示维纳过程的方程符号化后写成：

$$dz = \varepsilon(t)\sqrt{dt} \tag{11—11}$$

这里 $\varepsilon(t)$ 是标准正态随机变量。当 $t' \neq t''$ 时，随机变量 $\varepsilon(t')$ 与 $\varepsilon(t'')$ 是不相关的。

对维纳过程的这种描述并不严格，因为我们没有把握这个极限过程是有定义的，但它提供了一个很好的直觉描述。维纳过程的另一种定义方法是简单地列举几条必要的性质。按照这种方法，我们说 $z(t)$ 是**维纳过程**（**Wiener process**）（或另一个术语，**布朗运动**（**Brounian motion**）），如果它满足如下几个性质：

1. 对任意 $s<t$，数量 $z(t)-z(s)$ 是均值为零、方差为 $t-s$ 的正态随机变量。

2. 对任意 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 < t_4$，随机变量 $z(t_2)-z(t_1)$ 与 $z(t_4)-z(t_3)$ 是不相关的。

3. $z(t_0)=0$ 以概率 1 成立。

这些性质与前面给出的随机游走过程的性质是相同的。

将维纳过程的结果形象化是一件有趣的事情。图 11—6 说明了它的一种可能的轨道图。记住在时间 t 给定 $z(t)$，当 $s>t$ 时，$z(s)$ 的值大体上与 $z(t)$ 的值相同，但将按照标准差 $\sqrt{s-t}$ 发生变化。

307

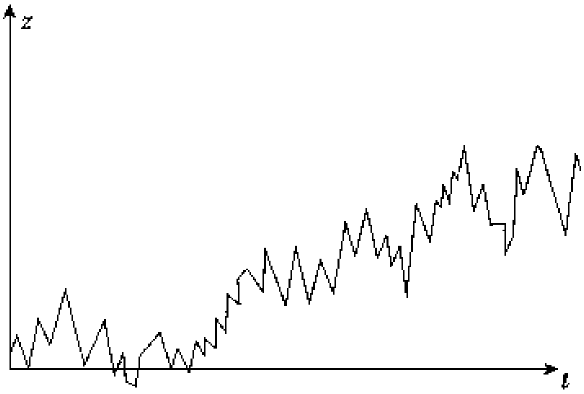


图 11—6　维纳过程的轨道

维纳过程连续不断地运动但不可微。

维纳过程关于时间不可微。我们能够粗略地证明这个结论。注意到对 $t<s$，有：

$$E\left[\frac{z(s)-z(t)}{s-t}\right]^2=\frac{s-t}{(s-t)^2}=\frac{1}{s-t}\to\infty$$

当 $s\to t$ 时。

但是，就 dz/dt 说几句是很有益处的，因为这个表达式在许多随机方程中出现。用系统工程领域（这个领域激发了维纳的工作）的通用术语就是**白噪声（white noise）**。将白噪声形象化确实是一件有趣的事情。这种描述可见图 11—7。

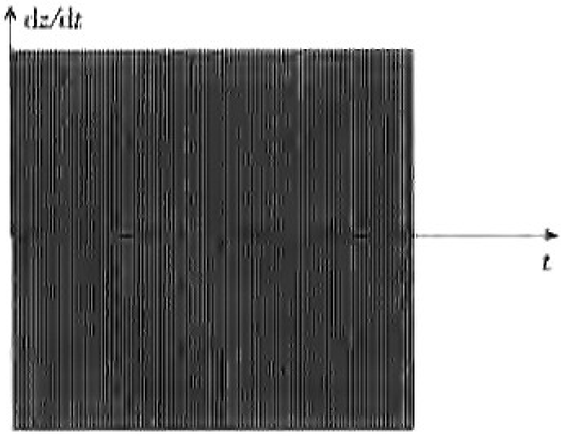


图 11—7　想像的白噪声

白噪声是维纳过程的派生物，但它在正态意义下不存在。

广义维纳过程和伊藤过程

维纳过程（或布朗运动）是所有其他更一般的过程的基本构建材料。这种一般化是通过在常微分方程中加入白噪声而实现的。

这种一般化程序中最简单的拓展就是**广义维纳过程（generalized wiener process）**，它具有如下形式：

$$dx(t)=a\,dt+b\,dz \tag{11—12}$$

308 这里对每个 t，$x(t)$ 是随机变量，z 是维纳过程，a 和 b 是常数。

广义维纳过程尤其重要，因为它具有解析解（可以通过两边求积分得到）。特别地，有：

$$x(t)=x(0)+at+bz(t) \tag{11-13}$$

伊藤过程（Ito process）甚至多少有点更一般的味道。这种过程由下面的方程描述：

$$dx(t)=a(x,t)dt+b(x,t)dz \tag{11-14}$$

和前面一样，z 表示维纳过程。但是，现在的系数 $a(x,t)$ 和 $b(x,t)$ 可能取决于 x 和 t，而且它的一般解不能用解析表达式表示。伊藤过程的特殊形式经常用来描述金融资产的行为，这将在下一节讨论。

11.7 股票价格过程

现在我们已有必要的工具将股票价格的倍数模型扩展为连续时间模型。回忆倍数模型是：

$$\ln S(k+1)-\ln S(k)=w(k)$$

这里所有 $w(k)$ 是互不相关的正态随机变量。这个方程的连续时间形式是：

$$d\ln S(t)=v dt+\sigma dz \tag{11-15}$$

这里 v 和 $\sigma\geqslant 0$ 是常数，而 z 是标准维纳过程。方程的整个右边可以看成随机变量 $w(k)$ 在离散时间模型中所扮演的角色。这一边可以看成是一个常数加上一个零均值的正态随机变量，因此，从总体上看，它是一个正态随机变量。（方程中的所有项都是微分或微分的倍数，因而这些项本身没有通常意义下的量值，但将 dt 和 dz 看成 Δt 和 Δz 这样的很小的量是有益处的。）相应地，$v dt$ 这一项是右边的均值。这个均值与 dt 成比例，这与倍数模型的对数形式中 $\ln S$ 的变化的均值和一个时期长度成比例的事实是一致的。右边的标准差是 σ 乘以 dz 的标准差。因此，这个标准差与数量 $\sigma\sqrt{dt}$同阶，这与倍数模型的对数形式中 $\ln S$ 的变化的标准差和一个时期长

度的平方根成比例的事实是一致的，正如式（11—7a）和式（11—7b）所反映的结果。

因为方程（11—15）是以 $\ln S(t)$ 表示的，所以它实际上是广义维纳过程。因此，我们可以利用式（11—13）明确地求得：

$$\ln S(t)=\ln S(0)+\nu t+\sigma z(t) \qquad (11—16)$$

这表明 $E[\ln S(t)]=E[\ln S(0)]+\nu t$，因此 $E[\ln S(t)]$ 随着 t 线性增
309 加。因为这个过程的对数的期望值随着 t 线性增长，正像一个连续复利的银行账户一样，所以这个过程被称为**几何布朗运动**（**Geometric Brownian motion**）。

对数正态价格

像离散时间的倍数模型一样，式（11—15）描述的几何布朗运动过程是一个对数正态过程。这可以从式（11—16）的求解中很容易地看出。该方程的右边是期望值为 $\ln S(0)+\nu t$、标准差为 $\sigma\sqrt{t}$ 的正态随机变量。

我们断言价格 $S(t)$ 本身具有对数正态分布性。我们将这个分布正规地表示成 $\ln S(t)\sim N(\ln S(0)+\nu t, \sigma^2 t)$，这里 $N(m, \sigma^2)$ 表示均值为 m、方差为 σ^2 的正态分布。

虽然我们可以写成 $S(t)=\exp[\ln S(t)]=S(0)\exp[\nu t+\sigma z(t)]$，但不能得出 $S(t)$ 的期望值等于 $S(0)e^{\nu t}$ 的结论。均值必须通过方程（11—8）求解，这个一般公式适用于对数正态随机变量。因此，有：

$$E[S(t)]=S(0)e^{(\nu+\frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

如果定义 $\mu=\nu+\frac{1}{2}\sigma^2$，我们有：

$$E[S(t)]=S(0)e^{\mu t}$$

$S(t)$ 的标准差同样由对数正态随机变量的一般关系给定。在求标准差时，计算更复杂。计算公式是（见练习 5）：

$$\text{stdev}[S(t)]=S(0)e^{\nu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t}(e^{\sigma^2 t}-1)^{1/2}$$

标准伊藤形式

我们已经用而不是直接用 $\ln S(t)$ 定义随机过程 $S(t)$。应用 $\ln S(t)$ 方便了模型的推导，并且突出了该随机过程是对数正态分布倍数模型的直接推广的事实。但是，用 $S(t)$ 本身来表示这个随机过程是很有用的。

在普通微积分中，我们知道：

$$\mathrm{d}\ln[S(t)]=\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}$$

因此，我们可能被诱导而在基本方程（方程（11—5））中用 $\mathrm{d}\ln S(t)$ 代替 $\mathrm{d}S(t)/S(t)$，得到 $\mathrm{d}S(t)/S(t)=v\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z$。但在伊藤过程中改变变量时必须应用一个矫正项（因为维纳过程不是普通函数，不遵循普通微积分的规则）。用 $S(t)$ 表示的适当的伊藤过程是：

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}=\left(v+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \qquad (11—17)$$

注意到这个矫正项恰好与对数正态随机变量的期望值表达式要求的一样。令 310
$\mu=v+\frac{1}{2}\sigma^2$，我们可以将这个方程写成价格动态的标准伊藤过程：

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \qquad (11—18)$$

$\mathrm{d}S(t)/S(t)$ 这一项可以认为是股票的回报微分，因此，在这个方程中微分回报具有简单形式。

将该方程从 $\ln S(t)$ 到 $S(t)$ 的变换要求的矫正项是伊藤引理定义的一般方程变换的特例，适用于伊藤过程定义的随机变量。伊藤引理将在下一节讨论。

注意到如果分母为 S，如式（11—17），标准形式的方程就是关于 $\mathrm{d}S/S$ 的方程。这一项可以解释为股票的瞬时回报率。因此，标准形式常常指的是瞬时回报方程。

例 11.2（债券价格动态） 令 $P(t)$ 表示时间 $t=T$ 时支付 1 美元的债券

的价格，除此以外没有其他任何支付。假定利率是常数 r。债券价格满足方程：

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)}=r\mathrm{d}t$$

它是确定性伊藤方程，类似于股票价格方程。这个方程的解是 $P(t)=P(0)\ e^{rt}$。利用 $P(t)=1$，我们求得 $P(t)=e^{r(t-T)}$。

现在我们总结 $S(t)$ 和 $\ln S(t)$ 之间的关系。

⇒几何布朗运动的关系式 *假定几何布朗运动过程 $S(t)$ 由如下方程决定：*

$$\mathrm{d}S(t)=\mu S(t)\mathrm{d}t+\sigma S(t)\mathrm{d}z$$

这里 z 是标准维纳过程。定义 $v=\mu-\frac{1}{2}\sigma^2$。那么 $S(t)$ 是对数正态随机变量，而且有：

$$E\{\ln[S(t)/S(0)]\}=vt$$

$$\mathrm{stdev}\{\ln[S(t)/S(0)]\}=\sigma\sqrt{t}$$

$$E\{S(t)/S(0)\}=e^{\mu\cdot t}$$

$$\mathrm{stdev}\{S(t)/S(0)\}=e^{\mu\cdot t}(e^{\sigma^2\cdot t}-1)^{1/2}$$

311 **模拟**

连续时间价格过程可以通过取一系列小时期然后一期一期地往前推移进行模拟。这样做的方法有两个，但它们不是严格等价的。

首先，考虑由式（11－18）定义的标准形式的过程。我们选取基本的时期长度 Δt 并设定时间 $t=t_0$ 的初始价格 $S(t_0)=S_0$。相应的模拟方程是：

$$S(t_{k+1})-S(t_k)=\mu S(t_k)\Delta t+\sigma\cdot S(t_k)\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}$$

这里 $\varepsilon(t_k)$ 是均值为 0 而标准差为 1 的互不相关的正态分布随机变量。这样可以推出：

$$S(t_{k+1})=[1+\mu\cdot\Delta t+\sigma\cdot\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}]S(t_k) \qquad (11—19)$$

第二种方法是利用对数（或倍数）形式（11—15）。离散形式的方程是：

$$\ln S(t_{k+1})-\ln S(t_k)=v\Delta t+\sigma\cdot\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}$$

这样可推出：

$$S(t_{k+1})=(e^{v\Delta t+\sigma\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}})S(t_k) \tag{11—20}$$

它也是倍数模型，但随机系数是对数正态的。

这两种方法是不同的，但可以证明从长期看它们的差趋近于零。因此，实际上每种方法都差不多和另一种方法一样好。

例 11.3（用两种方法模拟） 考虑一种股票，其初始价格为 10 美元，且 $v=15\%$，$\sigma=40\%$。我们选取基本的时间间隔为 1 周（$\Delta t=1/52$），我们模拟 1 年的股票行为。这一小节描述的两种方法利用同样的随机变量 ε，它们都是由均值为 0 而标准差为 1 的正态分布产生的。表 11—1 给出了模拟结果。第一列说明了随机变量 $\mathrm{d}z=\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ 某一周的模拟情况。第二列列出了相应的倍数因子。价值 P_1 是利用式（11—19）描述的标准方法的模拟价格。第四列说明了用第二种方法的式（11—20）的适当的指数因子。价值 P_2 就是应用第二种方法的模拟价格。注意到，即使在第一步，模拟结果也不一样。但是，总体上看模拟结果相当接近。

表 11—1　　　　**价格动态的模拟**

周　次	dz	$\mu+\sigma\mathrm{d}z$	P_1	$v+\sigma\mathrm{d}z$	P_2
0			10.000 0		10.000 0
1	0.064 76	0.008 02	10.080 2	0.006 48	10.065 0
2	−0.199 45	−0.006 64	10.013 2	−0.008 18	9.983 0
3	−0.838 83	−0.421 1	9.591 6	−0.043 65	9.556 7
4	0.496 09	0.031 94	9.898 0	0.030 40	9.851 7
5	−0.338 92	−0.014 38	9.755 7	−0.015 92	9.696 1
6	1.394 85	0.081 80	10.553 6	0.080 26	10.506 4
7	0.618 69	0.038 74	10.962 5	0.037 20	10.904 6

续前表

周　次	dz	$\mu+\sigma dz$	P_1	$v+\sigma dz$	P_2
8	0.402 01	0.026 72	11.255 4	0.025 18	11.182 7
9	−0.711 18	−0.035 03	10.861 2	−0.036 56	10.781 2
10	0.169 37	0.013 82	11.011 3	0.012 28	10.914 4
11	1.196 78	0.070 81	11.791 0	0.069 27	11.697 3
12	−0.144 08	−0.003 57	11.748 9	−0.005 11	11.637 7
13	0.805 90	0.049 13	12.326 1	0.047 59	12.204 9
26	−1.233 35	−0.063 99	13.142 8	−0.655 3	12.915 7
39	0.681 40	0.042 22	17.685 0	0.0406 8	17.366 8
52	0.699 55	0.043 23	15.123 0	0.0416 9	14.756 4

价格过程是用两种方法模拟的。虽然一步一步的模拟结果有差异，但总体而言，模拟结果是类似的。

11.8　伊藤引理*

312 我们看到两个伊藤方程——关于 $S(t)$ 和关于 $\ln S(t)$ ——是不同的，并且这个差异并不恰好是将普通微积分应用于 $S(t)$ 到 $\ln S(t)$ 的变量变换所期望的那样，附加的一项 $\frac{1}{2}\sigma^2$ 是必要的。这个附加项产生是因为随机变量有一个量 $\sqrt{dt}$，因此它们的平方产生的是一阶而不是二阶结果。总之，存在这种一般变换的系统方法，并且它包含在伊藤引理中。

⇒**伊藤引理（Ito's Lemma）**　*假定随机过程 x 由伊藤过程规定，即：*

$$dx(t)=a(x,t)dt+b(x,t)dz \tag{11—21}$$

这里 z 是标准维纳过程。同样假定 $y(t)$ 由方程 $y(t)=F(x,t)$ 决定。那么 $y(t)$ 满足伊藤方程：

$$dy(t)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}a+\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2\right)dt+\frac{\partial F}{\partial x}b\,dz \tag{11—22}$$

这里 z 是和方程（11—21）一样的维纳过程。

证明： 普通微积分将给出与式（11—22）类似的公式，但没有带 1/2 的这一项。

我们将概要地给出整个公式的初步证明。我们把 y 关于增量 Δy 展开。在这个展开式中，要保持展开项是一阶 Δx 的，但因为 Δx 是和 $\sqrt{\Delta t}$ 同阶的量值，这意味着我们必须按 Δx 展开到二阶。求得： 313

$$\begin{aligned}y+\Delta y&=F(x,t)+\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\Delta x)^2\\&=F(x,t)+\frac{\partial F}{\partial x}(a\Delta t+b\Delta z)+\frac{\partial F}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\\&\quad\times(a\Delta t+b\Delta z)^2\end{aligned}$$

最后一项二次项必须特殊处理。展开时，它变成 $a^2(\Delta t)^2+2ab\Delta t\Delta z+b^2(\Delta z)^2$。这个式子前面两项是阶数高于一阶 Δt 的，所以可以舍去。剩下的项只有 $b^2(\Delta z)^2$ 了。但是，Δz 的均值为 0 而方差为 Δt，因此最后一项是和 Δt 同阶的量值，不能舍去。事实上，可以证明，在 Δt 趋近于零时的极限中，$(\Delta z)^2$ 这一项是非随机的并且等于 Δt。将这个分析代入前面的展开式得到：

$$y+\Delta y-F(x,t)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}a+\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2\right)\Delta t+\frac{\partial F}{\partial x}b\Delta z$$

取极限并利用 $y=F(x,t)$ 可推出伊藤方程（11—22）。

例 11.4（股票动态） 假定 $S(t)$ 是由如下几何布朗运动决定的：

$$dS=\mu S dt+\sigma S dz$$

让我们利用伊藤引理求决定过程 $F(S(t))=\ln S(t)$ 的方程。

我们验证 $a=\mu S$ 和 $b=\sigma S$。我们还可以验证 $\partial F/\partial S=1/S$，$\partial^2 F/\partial S^2=-1/S^2$。因此，根据式（11—22）得到：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dln}S &= \left(\frac{a}{S} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{S^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{b}{S}\mathrm{d}z \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

它与我们前面得到的结果一致。

11.9　再论二项式网格模型

让我们再次考虑图 11—8（与图 11—1 相同）描述的二项式网格模型。这个模型与这一章前面讨论的倍数模型是相似的，因为在每一步价格都要乘
314 以一个随机变量。在这种情况下，随机变量仅取两个可能值 u 和 d。我们通过尽可能准确地匹配倍数模型，能够找到合适的 u 值、d 值和 p 值。这是通过匹配价格变化的对数的期望值和价格变化的方差而实现的。[6]

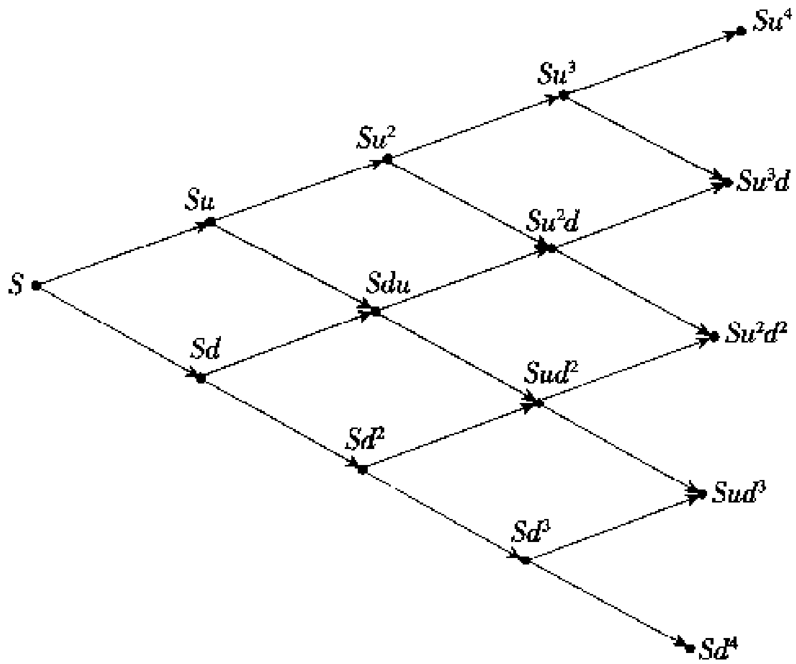


图 11—8　二项式网格股票模型

每一步股票价格或者上升到 uS 或者下降到 dS。

为了实现这种匹配，仅仅需要保证随机变量 S_1 即第一步后的价格具有恰当的性质，因为此后的过程是一样的。取 $S(0)=1$，通过直接计算我们得到：

$$E(\ln S_1)=p\ln u+(1-p)\ln d$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\ln S_1)&=p(\ln u)^2+(1-p)(\ln d)^2-[p\ln u+(1-p)\ln d]^2\\&=p(1-p)(\ln u-\ln d)^2\end{aligned}$$

因此，合适的参数匹配方程是：

$$pU+(1-p)D=v\Delta t \tag{11—23}$$

$$p(1-p)(U-D)^2=\sigma^2\Delta t \tag{11—24}$$

这里 $U=\ln u$，$D=\ln d$。

注意到有三个参数要选定：U、D 和 p，但仅有两个必要的条件。所以还有一个自由度。一种方法是用这个自由度规定 $D=-U$（等价于规定 $d=1/u$）。在这种情况下，方程（11—23）和方程（11—24）变成： 315

$$(2p-1)U=v\cdot\Delta t$$

$$4p(1-p)U^2=\sigma^2\Delta t$$

如果将第一个方程两边同时平方并且加到第二个方程，我们得到：

$$U^2=\sigma^2\Delta t+(v\cdot\Delta t)^2$$

将这个方程代入第一个方程，可直接解得 p，然后可以决定 $U=\ln u$。因此，从参数匹配方程求得的解是：

$$p=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\sigma^2/(v^2\Delta t)+1}}$$

$$\ln u=\sqrt{\sigma^2\Delta t+(v\Delta t)^2}$$

$$\ln d=-\sqrt{\sigma^2\Delta t+(v\Delta t)^2} \tag{11—25}$$

在式（11　25）中微小量 Δt 可以近似为：

$$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}$$

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{11—26}$$

这是我们在 11.1 节提出的参数值。

11.10 小结

资产动态的简单而用途多样的模型是二项式网格模型。在这个模型中，资产的价格假定被因素 u 或 d 相乘，而每一期的因素分别按照概率 p 和 $1-p$ 作出选择。这个模型在理论发展中得到了广泛的应用，并成为投资问题计算求解的基础。

另一类广泛的模型是资产价格可能按连续统一的可能性取值。这类模型最简单的一种是可加模型。如果这个模型的随机输入量是正态分布随机变量，则资产价格也是正态分布的随机变量。但是，这个模型的缺陷是资产价格可能取负值。

一个更好的模型是形如 $S(k+1)=u(k)S(k)$ 的倍数模型。如果倍数输入量 $u(k)$ 是对数正态的，那么将来的价格 $S(k)$ 也是对数正态的。这个模型也可以表示成另一种形式 $\ln S(k+1)-\ln S(k)=\ln u(k)$。

令期间长度趋于 0，倍数模型变成了伊藤过程 $d\ln S(t)=v\cdot dt+\sigma^2 dz(t)$，这里 z 是标准化维纳过程。这种特殊形式的伊藤过程称为几何布朗运动。这个模型也可以表示成另一种（但等价的）形式 $dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma^2 S(t)dz(t)$，其中 $\mu=v+\frac{1}{2}\sigma^2$。

316 伊藤过程是资产动态有用的表达式。将这个过程变形的重要工具是伊藤引理：如果 $x(t)$ 服从伊藤过程，而 $y(t)$ 由方程 $y(t)=F(x,t)$ 规定，那么伊藤引理规定了满足 $y(t)$ 的随机过程。

二项式网格模型可以看成是伊藤过程的近似。网格参数的选择要使得两

个模型的回报的对数均值和标准差一致。

练习

1. （股票网格）一个现在价值为 $S(0)=100$ 的股票，其价格对数的预期增长率为 $v=12\%$，价格对数增长率的波动为 $\sigma=20\%$。求基本时期长度为 3 个月的描述这个股票价格的二项式网格模型的合适的参数。绘出网格并输入 1 年的节点价值。到达各最终节点的概率是多少？

2. （时间比例）一种股票价格 S 由如下模型决定：

$$\ln S(k+1)=\ln S(k)+w(k)$$

这里期间长度为 1 个月。对所有 k，令 $v=E[w(k)]$，$\sigma^2=\mathrm{var}[w(k)]$。现在假定基本的时间长度改变为 1 年。那么模型是：

$$\ln S(K+1)=\ln S(K)+W(K)$$

这里 K 的每一个变化对应于 1 年。$W(K)$ 很自然的定义是什么？证明 $E[W(K)]=12v$，$\mathrm{var}[W(K)]=12\sigma^2$。因此，参数值与时间成比例。

3. （算术和几何平均值）假定 v_1，v_2，…，v_n 是正数。这些数的算术平均值和几何平均值分别是：

$$v_A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i,\quad v_G=\left(\prod_{i=1}^{n}v_i\right)^{1/n}$$

(a) $v_A\geqslant v_G$ 总是成立的。对 $n=2$ 证明这个不等式。

(b) 如果 r_1，r_2，…，r_n 是 n 个时期股票的回报率，那么回报率的算术平均值和几何平均值也是：

$$r_A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i,\quad r_G=\left(\prod_{i=1}^{n}(1+r_i)\right)^{1/n}-1$$

假定投资 40 美元。在第一年里这笔投资增加到 60 美元，在第二年里该投资减少到 48 美元。这两年里投资回报率的算术平均值和几何平均值是多少？

(c) 什么时候利用这些均值描述投资表现合适?

4. (完全平方◇) 假定 $u=e^w$, 这里 w 是均值和方差分别为 $\bar{w}$ 和 σ^2 的正态随机变量。那么有:

$$\bar{u}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{w}e^{-(w-\bar{w})^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}w$$

317 证明: $w-\frac{(w-\bar{w})^2}{2\sigma^2}=-\frac{1}{2\sigma^2}[w-(\bar{w}+\sigma^2)]^2+\bar{w}+\frac{\sigma^2}{2}$。

利用 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x=1$ 求 $\bar{u}$ 的值。

5. (对数方差◇) 根据基础正态随机变量的参数, 利用练习 4 的方法求对数正态随机变量的方差。

6. (期望) 一种股票价格由 $\mu=0.20$ 和 $\sigma=0.40$ 的几何布朗运动决定。初始价格是 $S(0)=1$。求下面 4 个数的值:

$E[\ln S(1)]$, $\mathrm{stdev}[\ln S(1)]$

$E[S(1)]$, $\mathrm{stdev}[S(1)]$

7. (伊藤引理的应用) 一种股票价格由如下方程决定:

$\mathrm{d}S=aS\mathrm{d}t+bS\mathrm{d}z$

这里 z 是标准维纳过程。求决定 $G(t)=S^{1/2}(t)$ 的过程。

8. (反向检查) 盖文・琼斯刚开始学习伊藤引理时被它迷惑住了, 所以他决定检验一下。他从决定价格 S 的方程 $\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z$ 开始, 并且他发现 $Q=\ln S$ 满足方程:

$$\mathrm{d}Q=(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z$$

然后他利用变换 $S=e^Q$ 在最后一个方程应用伊藤引理。重复他的计算。他得到了什么结果?

9. (两种模拟◇) $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots$ 是一个有用的展开式。利用这个展开式, 按照的 Δt 幂的线性关系, 将方程 (11—20) 的幂展开到一阶。注

意到它与式（11—19）的表达式是不同的，所以可以断定模拟的标准形式和倍数形式（或对数正态形式）即使在一阶也是不同的。但是，要证明两个表达式的一阶期望值是相同的，因此，从长期看两种方法将产生相似的结果。

10. （模拟实验⊕）考虑价格 S 由如下几何布朗运动过程决定的股票。

$$\frac{dS}{S(t)}=0.10dt+0.30dz$$

（a）利用 $\Delta t=1/12$ 和 $S(0)=1$，用两种方法中的一个，将这个过程模 318
拟几年（如，许多年），并求 t 的函数 $\frac{1}{t}\ln[S(t)]$ 的值。注意到这个值趋近于极限值 p。这个极限的理论值是多少？

（b）t 必须要多大才能达到二位精确？

（c）求 t 的函数 $\frac{1}{t}\ [\ln S(t)\ -pt]^2$ 的值。这个函数有极限吗？如果有，其理论值是多少？

【注释】

[1] 如果价格过程是确定性的，那么 $v=\ln(S_T/S_0)$，意味着 $S_t=S_0e^{vT}$，这说明 v 是指数增长率。

[2] 这个图说明了美国航空公司股票在 1982—1992 年的 10 年期间的每周股票回报对数的直方图分布。添加的另一个分布是有同样（样本）均值和方差的正态分布。出现厚尾现象的同时，不可避免地存在瘦长的中部。

[3] 利用对数回报，恰好是按比例调节的。由于复合回报（没有取对数）这里没有误差。（见练习 2。）

[4] $\sigma(\hat{v})=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}=\frac{\sigma}{\sqrt{10}}=\frac{0.15}{3.16}=0.05$

[5] $\mathrm{var}(\hat{\sigma}^2)=(52)^2\mathrm{var}(\hat{\sigma}_w^2)=\frac{(52)^2\times 2\sigma_w^4}{N-1}=\frac{(52)^2\times 2\sigma^4}{(52)^2\times 51}=\frac{2\sigma^4}{51}$。故，$\sigma(\hat{\sigma}^2)=\frac{\sqrt{2}\sigma^2}{\sqrt{51}}\approx\frac{\sigma^2}{5}$

[6] 对这个网格而言，到达网格终点的各节点的概率由二项分布决定。具体地，达到值 Su^kd^{n-k}的概率是 $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，这里 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\ k!}$ 是二项式系数。这个分布对大的 n 值接近于正态分布（在某种意义上）。最终价格的对数形如 $k\ln u+(n-k)\ \ln d$，与 k 具有线性关系。因此，最终各节点价格的分布可以认为近似于对数正态分布。

【参考文献】

类似于这一章股票模型的一般观察，可以参看文献 [1]。随机过程更详细的内容参看文献 [2]，股票价格实际上怎样变化的一般信息可以参看文献 [3]。

有大量概率论教材讨论正态分布和对数正态分布。经典教材是文献 [4]。维纳的著作文献 [5] 引发了大量涉及维纳过程的严肃的理论研究和实际问题。伊藤引理首先在文献 [6] 中发表后来在文献 [7] 中发表。

1. Hull, J. C. (1993), *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, 2^{nd} ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. Malliaris, A. G., and W. A. Brock (1982), *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.
3. Cootner, P. H., Ed. (1964), *The Random Character of Stock Market Prices*, M. I. T. Press, Cambridge, MA.
4. Feller, W. (1950), *Probability Theory and Its Applications*, vols 1 and 2, Wiley, New York.
5. Wiener, N. (1950), *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*, Technology Press, M. I. T., Cambridge, MA, and Wiely, New York.
6. Ito, K. (1951), *"On a Formula Concerning Stochactic Differentials"*, *Nagoya Mathematicas Journal*, **3**, 55—65.
7. Ito, K. (1961), *Lectures on Stochastic Processes*, Tata Institute of Fundamental Research, India.

第12章 期权基础理论

期权（option）是在规定的条件下，购买（或出售）一种资产的权利，而不是义务。通常，期权有一个规定的价格和规定的期权有效期。例如，一个以200 000美元的价格，在下一年的任何时间，购买某幢房子（比如说，你现在正在租住的房子）的期权。给予某人购买某种资产的权利的期权称为**看涨期权（call option）**，而给予某人出售某种资产的权利的期权称为**看跌期权（put）**。通常期权本身也有一个价格，我们常常把这个价格称为**期权溢价（option premium）**，以 319

区别按期权规定的购买或出售资产的价格。期权溢价可能是被选择资产的价格的一小部分。例如，你可能支付15 000美元买入按200 000美元的价格购买该幢房子的期权。如果期权持有者确实按照期权条款购买或出售该资产，称为期权持有者**执行**（exercise）期权。但无论如何，最初的期权溢价是无法挽回的。

期权是标的资产是可以购买或出售的资产（如我们例子中的房子）的衍生证券。期权的最终财务价值取决于可能执行期权时的标的资产的价格。例如，若房子年末值300 000美元，那么200 000美元的期权值100 000美元，因为你可以用200 000美元购买该房子，然后立即以300 000美元的价格卖出该房子而获得100 000美元的利润。

期权在商业上有很长的历史，因为它们提供了出色的控制风险（或以最低的费用锁定资源）的机制。下面的引自**亚里士多德**（**Aristotle**）[1]的故事，是撰写投资学教材的教授们喜欢的故事。

有个关于爱尔兰人塞尔和他的金融谋略的轶事，这个故事涉及一个普遍
应用的原理，但由于他的智慧和名望而归因于他本人。他因贫穷而受人责
320 备，贫穷表明哲学毫无用处。根据这个故事，他从夜观天象的技巧中知道：
尽管还是冬天，来年橄榄将有一个大丰收，所以，有了一点钱，他就支付租
金用作租用祁澳斯和迈尔特斯所有的橄榄榨油机，由于没有任何人与他出价
竞争，所以他以很低的价格租用了。当收获季节到来时，所有人都立即而突
然需要这些榨油机，他可按任何他满意的租金将榨油机全部租出去，因此赚
了一大笔钱。因此，他向世界表明：如果哲学家愿意，他们就能不费力地
致富。

另一个典型例子与大约1600年荷兰郁金香狂热有关。郁金香因其美丽而受人赞扬，并引发了一场巨大的投机和价格上涨。看跌期权被种植者用来保障郁金香球茎的价格，而看涨期权被经纪人用来保障将来的价格。市场没有以任何方式得到监管而终于在1636年崩溃，给期权留下了一个坏名声。

现在，通过规范的交易所可以广泛地交易各种金融工具（如股票和债

券）的期权。但是，物质资产期权仍然很重要。此外，在其他金融环境中还存在许多隐含的或隐蔽的期权。一个例子是从油井中抽取石油或将石油留在油井中直到更好的时机的期权，或者接受抵押担保或再谈判的期权。这些情况可以用这一章说明的期权理论进行充分地分析。

12.1 期权概念

期权概念的规定：第一，必须清楚地描述什么可以被买（看涨期权）或卖（看跌期权）。对股票期权来说，通常每个期权是100股某指定股票。例如IBM公司股票的看涨期权就是购买100股IBM公司股票的期权。第二，必须规定执行价格，**或约定价格（Strike price）**。这就是期权执行时资产可能被购买的价格。IBM公司股票的执行价格可能是70美元，这意味着每股股票可以按70美元的价格购买。第三，期权有效的时间必须规定——定义为有效期。因此，一个期权的有效期可以是1天、1周或几个月。期权到期前，可接受的执行日期有两种主要的惯例。**美式期权（American option）**允许期权在到期日前（含到期日）的任何时间执行。而**欧式期权（European option）**仅允许在期权到期日执行。美式和欧式这个术语是指大多数在美国和欧洲构造股票期权的不同方法，但现在该术语已成为两种不同结构的标准语言，而不管期权是在哪儿构造的。在美国有许多欧式期权。例如，如果1年后购买房子的期权规定房子必须在恰好1年时出售而不能更早，那么这个房子期权可以认为是欧式期权。

这四个特征——资产的描述、是看涨期权还是看跌期权、执行价格和有效期（不管是美式的还是欧式的）——规定了期权的详细情况。决定性的、但有点儿独特的特征是期权本身的价格—期权溢价。如果期权是个别定制的，期权溢价作为最初谈判的一部分由谈判决定，并且是合约的一部分。如果期权是在交易所交易的，期权溢价是通过供给和需求由市场决定的，并且 321

期权溢价将根据交易行为发生变化。

任何期权都有两个当事人：让渡期权的一方被称为开立（write）期权，而获得期权的一方被称为购买期权。购买期权的一方除了当初购买期权的期权溢价外没有任何损失风险。但是，开立期权的一方将面临极大的风险，因为如果期权被执行，这一方必须按照规定的条件购买或出售该资产。就被执行的看涨期权来说，如果期权开立者还没有拥有该资产，为了交割该资产，他必须按规定的执行价格购买该资产，而执行价格可能比现在的市场价格高得多。同样，就被执行的看跌期权来说，他必须按执行价格接受该资产，执行价格可能比现在的市场价格低得多。

许多股票期权是在交易所交易的。在这种情况下，单个期权交易通过在交易所交易的经纪人实现。交易所的清算所保证所有交易各方履行合约。由于与期权相关的风险，期权开立者要求上缴**保证金（margin）**（证券保证金）保证履约。[2]

交易所交易的期权被刊载在金融新闻上。GM公司（通用汽车公司）股票期权的报价显示在图12—1中。GM公司股票有许多种可交易期权，有些是看涨期权，有些是看跌期权，这些期权有各种各样的执行价格和有效期。表中，第一列显示标的股票的符号和股票本身的收盘价。第二列显示期权的
322 执行价格（或约定价格）。第三列显示期权到期的月份。到期月份的确切到期日是随后的第三个星期五。第四列和第五列给出看涨期权的信息，显示当天报告的交易量和该期权最后的报告价格。最后两列给出看跌期权的类似信息。虽然单个期权合约是100股，但所有价格是按每股为基础报价的。

和期货合约一样，金融证券的期权也很少被执行（标的证券被购买或出售）。如果证券价格朝有利的方向变化，期权价格（期权溢价）将相应地上升，大多数期权持有者将选择在期权到期前卖出他们的期权。

关于期权交易和规定特殊情境如股票分拆、股息、头寸限制和特定的保证金要求等还有许多详细的细节。在从事严肃的期权交易前，这些细节必须检查核对。但是，目前的概述对理解期权的基本机理足够了。

期权/执行价格		到期日	看涨期权		看跌期权	
			交易量	最后交易价格	交易量	最后交易价格
通用汽车	35	12月	529	$2\frac{7}{8}$	…	…
$37\frac{7}{8}$	35	1月	93	$3\frac{5}{8}$	90	$\frac{1}{2}$
$37\frac{7}{8}$	35	3月	36	$4\frac{1}{4}$	49	1
$37\frac{7}{8}$	35	6月	31	$5\frac{1}{2}$	…	…
$37\frac{7}{8}$	40	12月	24	$\frac{1}{16}$	549	$2\frac{1}{16}$
$37\frac{7}{8}$	40	1月	407	$\frac{11}{16}$	284	$2\frac{5}{8}$
$37\frac{7}{8}$	40	3月	746	$1\frac{5}{8}$	40	3
$37\frac{7}{8}$	40	6月	91	$2\frac{11}{16}$	135	$3\frac{7}{8}$
$37\frac{7}{8}$	45	1月	104	$\frac{1}{8}$	49	7
$37\frac{7}{8}$	45	3月	50	$\frac{1}{2}$	…	…
$37\frac{7}{8}$	45	6月	110	$1\frac{1}{4}$	15	$7\frac{5}{8}$
$37\frac{7}{8}$	50	6月	94	$\frac{1}{2}$	…	…

图 12—1　通用汽车股票（1995 年 12 月 15 日）的期权报价

第一列表示股票的收盘价，其他各列表示可获得的期权的信息。

资料来源：《华尔街日报》，1994 年 12 月 15 日。

12.2　期权价值的实质

这一章的主要目的是如何确定金融证券期权的价值。这种确定方法是到目前为止我们已经研究的基本原理的迷人而创造性的运用。因此，期权理论很重要，部分是因为期权本身是重要的金融工具，而且还部分因为期权理论表明了如何将投资科学的基本原理理解到一个新的水平——动态结构是十分

重要的。这一节我们以定性的方式审视期权价格的性质。这将为我们以后各节的深入分析作准备。

假定你拥有一个执行价格为 K 的股票看涨期权。并假定在到期日，标的股票的价格是 S。这时的期权价值是多少呢？容易看出，如果 $S<K$，那么期权的价值是 0。这是因为在期权条件下，你可能执行期权而以价格 K 购买该股票，但是不执行期权你可以在公开的市场上以 S 的低价购买该股票。因此，你不会执行该期权，该期权没有价值。另一方面，如果 $S>K$，那么期权确实具有价值。通过执行期权，你可以按价格 K 购买该股票，然后在市场上以较高的价格 S 卖出该股票。你的利润将等于 $S-K$，因此它就是期权的价值。我们综合处理这两种情况，将到期日看涨期权的价值写成：

$$C=\max(0,S-K) \tag{12—1}$$

这意味着 C 等于 0 或 $S-K$ 中的最大值。所以我们得到看涨期权在到期日的价值的明确的公式，它是标的证券价格 S 的函数。这个函数显示在图 12—2（a）中。这个图说明，当 $S<K$ 时，期权价值是 0，而当 $S>K$ 时，期权价值按一一对应的基础，随标的股票的价格线性增加。

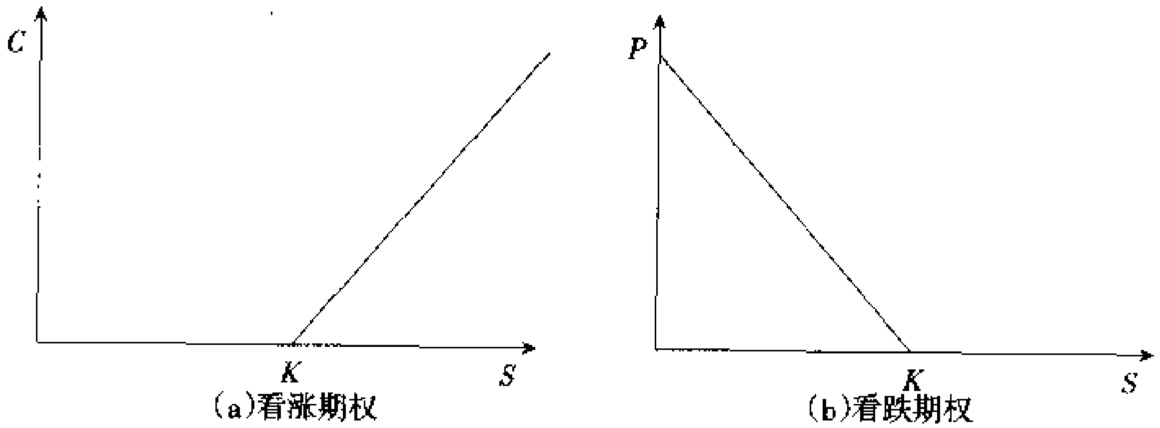


图 12—2　到期日的期权价值

当 $S>K$ 时，看涨期权有价值。而当 $S<K$ 时，看跌期权有价值。

而看跌期权的结果完全相反。看跌期权给予某人按规定的执行价格出售
328 一种资产的权利，而不是义务。假定你拥有一个执行价格为 K 的股票看跌

期权。在这种情况下，如果到期日股票价格满足 $S>K$，那么期权毫无价值。通过执行期权，你可以按价格 K 出售该股票，然而在公开的市场上你可以较高的价格卖出该股票。因此，你不会执行该期权。另一方面，如果股票的价格低于执行价格，那么看跌期权确实具有价值。你可以在市场上以价格 S 购买该股票，然后执行期权，以更高的价格 K 出售该股票。你的利润将等于 $K-S$，因此它就是期权的价值。到期日看跌期权的价值的一般公式写成：

$$P=\max(0,K-S) \tag{12—2}$$

这个函数描述在图 12—2（b）中。注意到看跌期权的价值是有界的，而看涨期权的价值是无界的。相反，当开立看涨期权时，其潜在损失是无界的。

我们说看涨期权处于**实值（in the money）**、**平价（at the money）**或**虚值（out of the money）**，取决于分别是 $S>K$、$S=K$ 还是 $S<K$。这些术语在任何时间都适用，但在到期日该术语描述期权价值的性质。看跌期权具有相反的术语，因为如果 $S<K$，执行时的回报是正的。

期权的时间价值

前面的分析集中在期权到期时的价值。这个价值是从期权的基本结构推出来的。但是，即使欧式期权（除到期日外期权不能被执行）在较早的时间也具有价值，因为它们提供了将来执行的可能性。例如，考虑一个执行价格为 40 美元 3 个月到期的 GM 公司的股票期权。假定 GM 公司股票现在的价格是 37.88 美元。（这种情况近似于图 12—1 描述的三月份执行价格为 40 美元的看涨期权。）很清楚存在一种可能性：GM 公司股票的价格在三个月内上升到 40 美元以上。那时，可能要执行期权并获得一份利润。因此，即使现在这个期权价值处于虚值状态，仍具有价值。（表中描述的例子中，40 美元的看涨期权卖价是 1.63 美元。） 324

当存在确定的到期时间时，作为股票价格函数的看涨期权价值是一条平滑曲线，而不是一条在到期时明显打结的曲线。利用实际的期权价格数据进

行参数估计，可以确定这条平滑曲线。这种估计表明，对任意给定的有效期的期权价格曲线看起来与图 12—3 的曲线相似。图中，粗黑线表示看涨期权在到期时的价值。较高的曲线都对应于不同的到期时间。第一条曲线对应于 3 个月到期的看涨期权，下一条较高的曲线对应于 6 个月到期的看涨期权。这些曲线随到期时间长度的增加而变得更高，因为增加的时间提供了股票价值上升的更大的可能性，增加最终回报。但是，当股票价格或者远小于执行价格或者远大于执行价格时，增加时间的效应逐步减少。当股票价格 S 远低于执行价格 K 时，S 将没有什么可能性上升到执行价格 K 以上，所以期权价值保持接近于 0 的状态。而当股票价格 S 远高于执行价格 K 时，拥有期权与拥有股票本身相比已经没有什么优势可言了。

这一章的主要目的是建立期权价格理论。这种理论包含一系列特定的曲线，如图 12—3 所示。

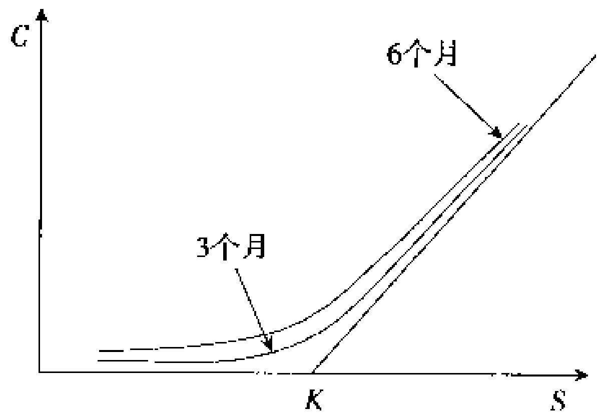


图 12—3　各种到期时间的期权价格曲线

对给定的股票价格 S，看涨期权的价值随到期时间的增加而增加。

影响期权价值的其他因素

标的股票价格的波动是有效地影响期权价值的另一个因素。为了明白这一点，想像你拥有两个不同股票的类似期权。假定这两种股票的价格都是 90 美元，期权的执行价格为 100 美元，还有 3 个月到期。可是，假定其中一个股票价格波动相当剧烈，而另一个股票价格变化相当平稳。哪个期权具

有更高的价值呢？很显然，具有高波动性的股票价格有最大的可能性在余下的短暂到期时间里上升到 90 美元以上，因此这个期权是两个期权中更有价值的一个。所以我们预期看涨期权的价值随股票价格波动性而增加，并且我们将在理论发展中证明这个结论。

还有哪些其他因素可能影响期权价值呢？一个是现行利率（或期限结构形态）。购买一个看涨期权就某些方面来说是按压低的价格购买某股票的方 325 法，因此，人们可节省利息费用。所以我们预期期权价格取决于利率水平。

另一个看起来很重要的因素是股票的增长率。更高的增长值意味着期权有更大的价值，这一点看起来似乎合情合理。可是，也许令人惊讶，增长率并不影响期权的理论价值。其理由在我们推导理论公式时就清楚了。

12.3 期权组合和看涨—看跌平价

为了实施特殊的套期或投机策略，通常投资于期权组合。这种组合的回报曲线可以有任意个相连的直线段。总的回报曲线是组合看涨期权、看跌期权和标的股票本身的回报函数而形成的。这个过程最好通过例子和相应的图形来说明。

例 12.1（蝶形价差）一个最有趣的期权组合是蝶形价差，描述如图 12—4。这个价差是通过购买两个看涨期权——一个看涨期权的执行价格为 K_1，而另一个看涨期权的执行价格为 K_3，并出售两个单位的执行价格为 K_2 的看涨期权构成，这里 $K_1<K_2<K_3$。通常选择 K_2 接近于现在的股票价格。这个图用虚线显示与每个成分相关的收益（包括回报和最初的成本）。这个组合的总收益函数是单个成分收益函数的和。在到期日，如果股票价格接近于 K_2，这个特殊组合将产生正收益；否则，损失也相当小。将曲线往上移使水平部分与坐标轴重合，重合的长度对应于期权的净成本，即可得到该价差的回报。

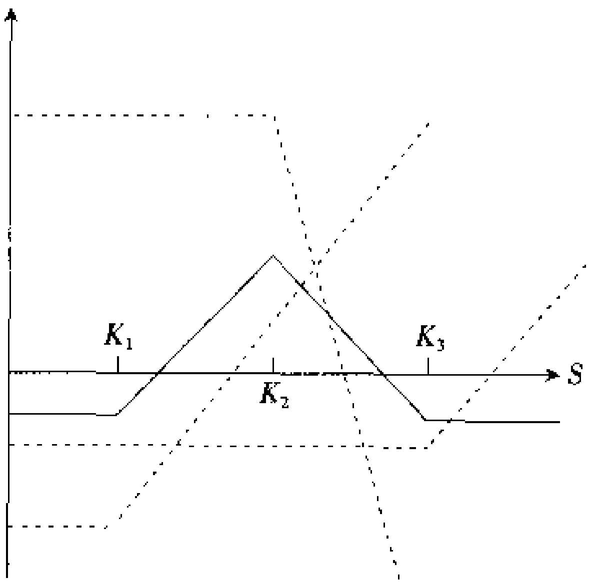


图 12—4 蝶型价差的收益

这个价差是通过购买执行价格为 K_1 和 K_3 的看涨期权，并出售两个单位的执行价格为 K_2 的看涨期权构成。如果相信标的股票价格维持在 K_2 附近的区域，这个组合是很有用的。

326 这里的关键是构建期权和股票组合，实际上可能用一系列直线段逼近任何回报函数，而且这个回报的成本只是单个成分回报的和。

看跌—看涨平价

对欧式期权，相应的看跌期权价格和看涨期权价格之间存在一种简单的理论关系。这个关系是由于注意到了看跌期权、看涨期权和无风险贷款的组合回报与标的股票回报一致而发现的。

该组合可以容易地设想为：购买一个看涨期权、出售一个看跌期权，并借出贷款 dK。其中前两个的组合的回报是一条 45°直线，并经过水平轴的 K 点。由于借出贷款 dK，我们获得额外的回报 K，使回报直线上移，所以现在回报直线是一条从原点出发的 45°直线。这个最终回报恰好等于股票本身的回报，所以它一定等于股票的价值 S。换句话说，有：

$$C-P+dK=S$$

（详细情况参见练习 3。）

*⇒**看跌—看涨平价**　令 C 和 P 分别表示欧式看涨期权和欧式看跌期权的价格，并且两者是定义在同一种价格为 S 的股票的执行价格皆是 K 的期权。看跌—看涨平价表明：*

$$C-P+dK=S$$

这里 d 是到期日的贴现因子。

例 12.2（几乎平价） 考虑图 12—1，GM 公司股票的期权，并将注意力集中在两个执行价格为 35 美元的三月份到期（还有三个月到期）的期权。这些期权的价值分别为 $C=4.25$ 美元和 $P=1.00$ 美元。这个时期的利率大约是 5.5%，所以对三个月时间我们有 $d=1/(1+0.055/4)=0.986$。因此，有：

$$C-P+dK=4.25-1.0+0.986\times 35.00=37.78$$

这是一个和实际股票价格 37.88 美元很接近但不精确的匹配。这种匹配的偏差有几种可能的解释。一个最重要的原因是股票报价和期权报价并不是来源于同一个出处。股票价格是股票交易所的收盘价格，而期权价格是期权交易所最后交易的期权价格，而最后交易可能发生在不同的时间。正如练习 2 讨论的那样，股息也可能影响平价关系。

12.4　提前执行 327

美式期权提供了提前执行的可能性，也就是在期权到期日前执行。在这一节，假定股票价格的决定使套利机会不可能存在，我们证明对于到期前不支付股息的股票，看涨期权提前执行决不会是最优的。

这个结果可以如下直观地理解。假定时间 t 时我们持有一个看涨期权，到期时间 $T>t$。如果现在的股票价格 $S(t)$ 低于执行价格 K，我们将不会执行期权，因为我们将亏本。另一方面，如果股票价格高于执行价格 K，我

们将被引诱执行期权。可是，如果这样做，我们现在不得不支付 K 获得该股票。如果我们持有期权的时间稍长一点，然后再执行期权，仍然能以价格 K 获得该股票，但是我们能够赚取执行期权的资金的额外的利息——事实上，如果股票价格在等待期里下降到 K 以下，我们将不会执行期权，并且因我们没有提前执行期权而快乐。

12.5 单期二项式期权理论

我们现在转向计算期权的理论价值的问题——被称为**期权定价理论**（**options pricing theory**）的研究领域。这个问题基于对市场、股票价格行为动态和个体偏好等的不同的假设，有几种不同的解决方法。最重要的理论是以无套利原理为基础的，当标的股票价格动态呈现某种形式时可加以运用。这些理论中最简单的是以第 11 章讨论的股票价格波动的二项式模型为基础的。这种理论由于其简单和易于计算，在实践中得到了广泛的应用。它是前面几章讨论的原理的绝好的高潮。

二项式期权定价的基础理论在前面的讨论中已经有所触及。这里我们将以自我包容的方式展开该理论，但读者应该注意它与前面各部分的联系。

首先，我们将发展单期二项式期权定价理论。该过程是仅使用一步的二项式过程。相应地，我们假定股票的初始价格是 S。期末股票价格要么以概率 p 变成 uS，要么以概率 $1-p$ 取 dS。我们假定 $u>d>0$，而且在每一期，以共同的无风险利率 r 借入或借出资金是可能的。我们令 $R=1+r$。为避免套利机会，我们必须有：

$$u>R>d$$

为弄明白这个结论，假定 $R\geqslant u>d$ 且 $0<p<1$。那么，即使在网格内“上升”一只，股票的表现也要比无风险资产更糟。因此，你可以卖空 1 美元股票并贷出其收益，从而要么获得 $R-u$ 的利润，要么获得 $R-d$ 的利润，这

取决于结果的状态。最初的成本是 0，但任意一种情况的利润都是正的，如果不存在套利机会这是不可能的。用类似的论述可以排除 $u>d\geqslant R$。

现在还假定有一个期末到期的执行价格为 K 的这种股票的期权。为了 328
求出看涨期权的价值，我们借助于图 12—5 应用无套利理论。这个图说明了股票价格、无风险资产价值和期权价值的二项式网格。所有三个网格具有共同的弧线，在这个意义上说它们一起按同样的弧线运动。如果股票价格沿着上行弧线运动，那么无风险资产和看涨期权也都按照它们的上行弧线运动。无风险资产价值是确定的，但由于使每个弧线终点的价值一样，这种处理好像无风险资产是股票的（蜕化的）衍生资产。

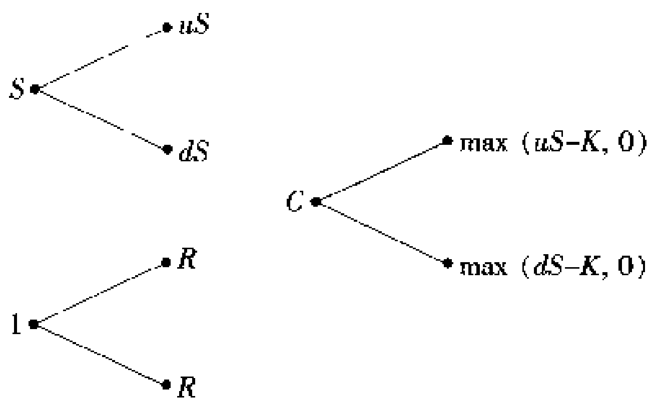


图 12—5　三个相关的网格

股票价格、无风险贷款利率和看涨期权的价值都按共同的网格一起移动，这里描述的是三个不同的网格。

假定我们知道股票价格 S，那么在这个一步网格中除了看涨期权价值 C 是未知的，其他所有价值都是已知的。而 C 的价值可以通过其他价值决定。

我们应用的论点是注意到左边的每个网格点仅有两个可能的结果。结合两个网格的各种不同的性质，我们能够构造其他任何形态的结果。特别地，我们能够构造对应于期权形态的结果。

我们用如下公式表示期权价格：

$$C_u=\max(uS-K,0) \tag{12—3}$$

$$C_d=\max(dS-K,0) \tag{12-4}$$

为了复制这两个结果，我们购买 x 美元价值的股票和 b 美元价值的无风险资产。在下一个时期，这个组合将值 $ux+Rb$ 或 $dx+Rb$，它取决于采取哪种路径。为了与期权结果相匹配，我们要求：

$$ux+Rb=C_u \tag{12—5a}$$

$$dx+Rb=C_d \tag{12—5b}$$

为解出这些方程，我们用第一个方程减去第二个方程得：

$$x=\frac{C_u-C_d}{u-d}$$

由这个方程，容易求得：

$$b=\frac{C_u-ux}{R}=\frac{uC_d-dC_u}{R(u-d)}$$

329 结合这些结果，我们求得组合的价值是：

$$\begin{aligned}x+b&=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{uC_d-dC_u}{R(u-d)}\\&=\frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}C_u+\frac{u-R}{u-d}C_d\right)\end{aligned}$$

我们现在利用比较原理（或，等同于无套利原理）证明价值 $x+b$ 一定等于看涨期权的价值 C。原因是我们构造的组合产生的结果与看涨期权的结果恰好一样。如果该组合的成本低于看涨期权的价格，我们永远也不会购买看涨期权。事实上，通过购买这个组合，并出售看涨期权获取即时收益而没有将来的任何后果，我们能够赚取套利利润。如果期权价格满足反向不等式，我们能够从反方向证明结果。因此，我们断定看涨期权的价格是：

$$C=\frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}C_u+\frac{u-R}{u-d}C_d\right) \tag{12—6}$$

由股票和无风险资产组成的复制期权结果的组合常常被称为**复制组合**(**replicating portfolio**)。它复制了期权。这种复制思想可用于求得任何限定

在同样的网格上的证券的价值，也就是说，任何由股票衍生而来的证券的价值都可用复制思想求得其价值。

有一种简化的方法理解方程（12—6）。我们定义数值：

$$q=\frac{R-d}{u-d} \tag{12—7}$$

从前面假定的关系 $u>R>d$，可得 $0<q<1$。因此，q 可以认为是概率。而且方程（12—6）可以表达为：

⇒**期权定价公式**　*由二项式网格决定的股票单期看涨期权的价值是：*

$$C=\frac{1}{R}[qC_u+(1-q)C_d] \tag{12—8}$$

注意，方程（12—8）可以解释为：C 是用概率 q 对期权价值求期望，然后按照无风险利率将期望值贴现而求得的。因此，概率 q 是**风险中性概率（risk—neutral probability）**。这个定价程序对所有的证券都适用。事实上，q 可以在确信风险中性公式对标的股票本身成立时计算出来，也就是，我们需要：

$$S=\frac{1}{R}[quS+(1-q)dS]$$

解这个方程得到式（12—7）。

作为启发性记号，我们将式（12—8）写成：

$$C(T-1)=\frac{1}{R}\hat{E}[C(T)]$$

这里 $C(T)$ 和 $C(T-1)$ 分别是时间 T 和 $T-1$ 时的看涨期权的价值，$\hat{E}$ 表 330
示关于风险中性概率 q 和 $1-q$ 的期望。

定价公式（12—6）的一个重要的也许初看令人惊讶的特征是：它独立于网格上行方向变化的概率 p。这是因为所有可能的事件之间无法权衡和兼顾。期权价值是用股票和无风险资产的组合完全地匹配期权结果而求得的。概率决不会进入匹配计算程序。

这个期权定价公式的出处其实是在第 9 章讨论过的自然风险定价概念的

一个特例。从这点来讲，复习前面章节对读者来说是有用的。

12.6 多期期权

现在我们将单期模型的定价方法一次一步往后推，即可拓展到多期模型。

图 12—6 是描述两期看涨期权的两阶网格。正如以前一样，假定股票的初始价格是 S，当沿着网格运动时，股票价格根据上行因子 u 和下行因子 d 而变化。网格中显示的价值是相应的执行价格为 K、到期时间对应于网格终点的看涨期权的价值。期权在网格最终节点的价值是知道的。特别地，有：

$$C_{uu}=\max(u^2S-K,0) \tag{12—9a}$$

$$C_{ud}=\max(udS-K,0) \tag{12—9b}$$

$$C_{dd}=\max(d^2S-K,0) \tag{12—9c}$$

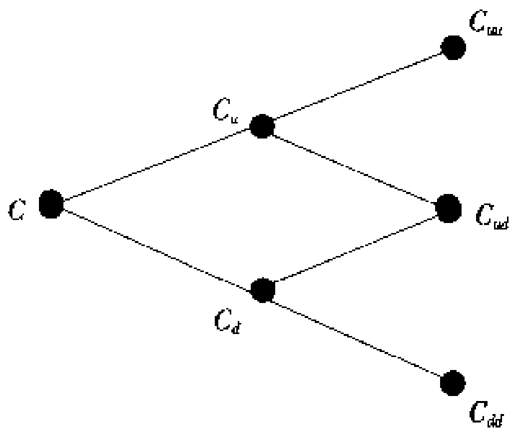


图 12—6 两期期权

一次往后推一步，求得期权价值。

我们再定义风险中性概率为：

$$q=\frac{R-d}{u-d}$$

这里 R 是一期无风险资产的回报。因此，假定不提前执行期权（我们已经
331 知道是最优的，但不久将再次证明），我们能够用前面给出的单期计算方法

求得 C_u 和 C_d 的值。具体地，它们是：

$$C_u=\frac{1}{R}[qC_{uu}+(1-q)C_{ud}] \tag{12—10}$$

$$C_d=\frac{1}{R}[qC_{ud}+(1-q)C_{dd}] \tag{12—11}$$

然后我们再一次应用风险中性贴现公式可求得 C。因此，有：

$$C=\frac{1}{R}[qC_u+(1-q)C_d]$$

对于有更多时期的网格，可以利用类似的程序。只是在网格的每一个节点重复单期无风险贴现，从最后一个时期开始一步一步往前推到起始时间。

例 12.3 (5 个月的看涨期权) 考虑一个对数波动 $\sigma=0.20$ 的股票。该股票现在的价格为 62 美元。不支付股息。该股票的某种看涨期权执行价格为 60 美元，从现在起还有 5 个月到期。现行的利率为 10%，按月复利。我们希望利用二项式期权定价方法确定这个看涨期权的理论价值。

首先，必须决定股票价格波动的二项式模型参数。我们将取期间长度为 1 个月，意味着 $\Delta t=1/12$。由方程（11—1）求得的模型参数是：

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=1.059\ 43$$

$$d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}=0.943\ 90$$

$$R=1+0.1/12=1.008\ 33$$

因此，风险中性概率是：

$$q=(R-d)/(u-d)=0.557\ 70$$

现在我们构造对应于连续 6 个月（包括现在这个月）的每个月初的股票价格二项式网格图。图 12—7 显示的就是这个网格，每个节点上方的数字是该节点的股票价格。注意到一次上行接着一次下行运动产生净倍数 1。

下一步计算看涨期权的价格。我们从最后时间开始并将看涨期权到期时的价值置于最后节点的下方。它是 0 和 $S-K$ 之间的最大值。例如，最高节点置入的价值是 $82.75-60=22.75$。

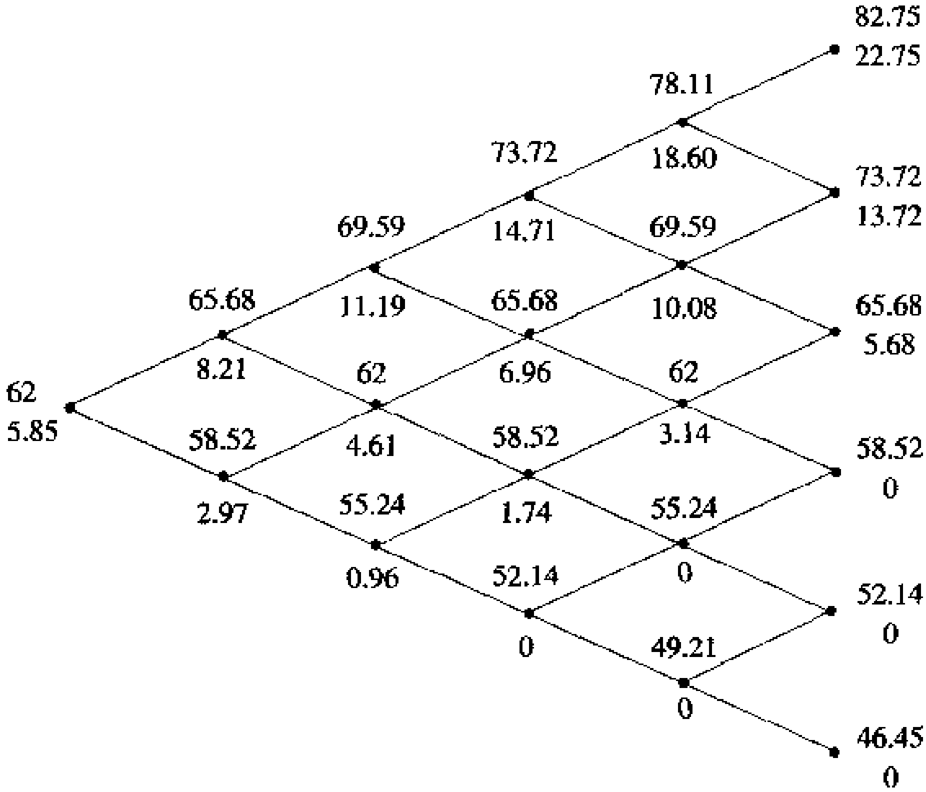


图 12—7　五个月看涨期权的二项式网格图

上方的数字是股票价格，下方的数字是期权价值。

前面时间的价值由一步定价公式求得。这个时间任何节点的价值是用下一个时间接下去的两个值的期望值贴现而求得的。该期望值是用风险中性概
332 率 q 和 $1-q$ 计算的。例如，最高节点的价值是$[0.5577 \times 22.75+(1-0.5577) \times 13.72]/1.0083=18.60$。

我们向左边一次一期地推算，直到最后获得初始价值。在这种情况下，我们推出以这种方法计算出的期权价格是 5.85 美元。

注意到整个计算过程与股票的预期增长率无关。这个值仅仅通过概率 p 进入股票的二项式模型中，但期权价值计算中并没有应用这个概率，取而代之的是风险中性概率 q。但是，要注意这种独立性是由于参数匹配中用微小量近似引起的。而且事实上，实践中这种近似几乎是一律要使用的（即使 $\Delta t=1$年）。如果应用更一般的匹配公式，则增长率将（轻微地）影响结果。

不提前执行*

在前面的例子中，我们（恰当地）假定期权决不会被提前执行。从二项式方程我们能够直接证明这一点。由基本的回报结构，我们知道：

$$C_{uu} \geqslant u^2 S - K$$

$$C_{ud} \geqslant udS - K$$

$$C_{dd} \geqslant d^2 S - K$$

因此，有： 333

$$\begin{aligned} C_u &\geqslant [u^2 qS + ud(1-q)S - K]/R \\ &= u[qu + (1-q)d]S/R - K/R \\ &> uS - K \end{aligned}$$

同样地，有：

$$C_d > dS - K$$

如果期权在图 12—6 显示的两期网格中的第一期末被执行，我们将获得 $uS-K$ 或 $dS-K$，其取决于那时的节点是哪个。这些不等式表明期末的期权价值高于当期执行期权可能获得的价值。因此，我们不应该执行期权。

如果网格有更多的期数，这些不等式也将向前拓展一期。因此，一般地用归纳推理过程可以证明执行期权决不会是最优的。

反对提前执行期权的论点并不是对所有期权都成立的，在某些情况下，价值计算的递归过程需要加入另外的操作。这个问题在下一节解释。

12.7　更一般的二项式问题

计算期权价值的二项式网格方法极其简单而且具有高度灵活性。因此，它已经成为投资和金融界的一种常用工具。如前一节描述的那样，这种方法用于不支付股息的股票的看涨期权时最简单。这一节说明这种基本方法怎样推广到更复杂的情形。

看跌期权

计算欧式看跌期权价值的方法与看涨期权的方法类似。主要差别是期权的最终价值不同，但一旦这些价值被规定，递归程序将按类似的方式展开。

对美式看跌期权，提前执行可能是最优的。这一点容易用如下的递归过程解释：在每个节点，首先用风险中性公式贴现，计算看跌期权的价值；然后计算立即执行期权可能获得的价值；最后，选择这两个价值中较大的一个作为该节点的看跌期权的价值。

例 12.4（5 个月看跌期权） 考虑例 12.3 用于计算 5 个月看涨期权的同样
334 的股票，但现在我们计算执行价格为 60 美元的美式看跌期权的价值。回想一下，关键参数是 $R=1.008\ 333$、$q=0.557\ 70$、$u=1.059\ 43$、$d=0.943\ 90$。利用电子表格能够方便地实施二项式网格计算程序。因此，我们时常用电子表格而不用图形展示网格。这使我们能够用有限的空间展示较大的网格，而且还可以更直接地表明计算是怎么组织的。

图 12—8 说明了股票价格的二项式网格。在这幅图中，上行方向的价格变化是直接向右移动，下行方向的价格变化是向右移动并向下移动一步。

62.00	65.68	69.59	73.72	78.11	82.75
	58.52	62.00	65.68	69.59	73.72
		55.24	58.52	62.00	65.68
	股票价格		52.14	55.24	58.52
				49.21	52.14
					46.45
1.56	0.61	0.12	0.00	0.00	0.00
	2.79	1.23	0.28	0.00	0.00
		4.80	2.45	0.65	0.00
	看跌期权		**7.86**	**4.76**	**1.48**
				10.79	**7.86**
					13.55

图 12—8　5 个月期看跌期权价格的计算

图的下半部分的看跌期权的价值可以通过向后算而得到，黑体字表示执行期权的最佳点。

为了计算看跌期权的价值，我们再次往后推，在股票价格网格下构造一个新的网格。在这种情况下，最终价值（最后一列）是 0 和 $K-S$ 的最大值。然后我们往左推，一次推一列。为了求得某一个节点上的价值，首先和以前一样用风险中性概率计算贴现的期望值。但是，现在我们也必须检查这个价值是否超过现在节点执行期权可能获得的价值 $K-S$。我们把两个价值中较大的一个作为现在节点的价值。例如，考虑倒数第二列的第四个输入值。贴现的期望价值是 $[0.557\ 7\times1.48+(1-0.557\ 7)\times7.86]/1.008\ 33=4.266$。执行期权获得的价值是 $60-55.24=4.76$。两个价值中较大的一个是 4.76，它是置入价值网格的价值。如果较大的价值是执行期权获得的价值，我们也希望在网格中标出它，在我们这个网格中是用黑体字表示对应的执行期权的价值点。（另外，也可以构建由 0 和 1 组成的网格表示执行期权的点。）在我们的例子中，看到有几个点执行期权是最优的。网格的第一个置入值，也就是 1.56 美元，是看跌期权的价值。

直观上，提前执行看跌期权可能是最优的，因为上面的利润是有界的。例如，显然地，如果股票价格降低到 0，那时我们必须执行期权，因为不可能获得更多的利润了。用连续性观点可以推断，如果股票价格变得接近于 0，执行期权就是最优的。

股息和期限结构问题*

通过允许模型参数从一个节点到另一个节点发生变化，许多其他问题都 335
可以用二项式网格模型处理。这不会改变计算方法的基本结构，它仅仅意味着一个时期和另一个时期的风险中性概率和贴现因子可能不同。

一个例子是支付股息的股票看涨期权的定价。如果股息与股票价值成比例——比如，股息是 δS 并在时间 k 支付——那么在股票价格网格中我们只是在时间 k 结束的一期将因子 u 和 d 分别改变为 $u(1-\delta)$ 和 $d(1-\delta)$。如果事先知道股息是固定值 D，那么网格技术不能直接应用，但网格方法仍然能够使用。（见练习 5。）

当利率不是常数时，参数也要改变。在这种情况下，对给定时期必须使用合适的单期利率（隐含的短期利率）。这将改变 R 值，因此也会改变 q 的值。

期货期权*

我们已经准备考虑期货期权，即，期货合约的期权了吗？起初，这个问题看起来很复杂，但我们发现期货期权分析相当简单，而且对分析的研究将帮助形成对风险中性定价过程的较完整的理解。研究分析的最好方法是考虑一个例子。

例 12.5（期货合约） 假定某种商品（储存不需要成本，并且大量供应）的现在价格为 100 美元，其价格过程由参数为 $u=1.02$、$d=0.99$、$R=1.01$ 的按月二项式网格模型描述。实际概率对我们的分析并不重要。从现在到将来的 6 个月的网格显示在图 12—9 的左上角。我们能够马上计算出风险中性概率是 $q=(R-d)/(u-d)=2/3$，而 $1-q=1/3$。

0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
100.00	102.00	104.04	106.12	108.24	110.41	112.62	4.16	5.05	6.04	7.12	8.25	9.42	10.62
	99.00	100.98	103.00	105.06	107.16	109.30		2.50	3.21	4.07	5.07	6.17	7.30
		98.01	99.97	101.97	104.01	106.09			1.14	1.59	2.20	3.02	4.09
	商品价格		97.03	98.97	100.95	102.97		商品期权		0.28	0.42	0.64	0.97
				96.06	97.98	99.94					0.00	0.00	0.00
					95.10	97.00						0.00	0.00
						94.15							0.00
106.15	107.20	108.26	109.34	110.42	111.51	112.62	4.28	5.21	**6.26**	**7.34**	**8.42**	**9.51**	10.62
	104.05	105.08	106.12	107.17	108.23	109.30		2.54	3.27	4.15	**5.17**	**6.23**	7.30
		101.99	103.00	104.02	105.05	106.09			1.15	1.61	2.22	**3.05**	4.09
	期货价格		99.97	100.96	101.96	102.97		期货期权		0.28	0.42	0.64	0.97
				97.99	98.96	99.94					0.00	0.00	0.00
					96.05	97.00						0.00	0.00
						94.15							0.00

图 12—9　与商品有关的网格

左上的网格是商品价格网格。其他网格是从这个网格用风险中性定价倒推计算所得。

让我们计算 6 个月后到期的期货合约相应的期货价格网格。网格显示在图 12--9 的左下角。这个网格的计算方法是利用第 10 章的结果：期货价格等于现在的商品价格乘以剩余的期货合约期限的利率增长因素。因此，时间 0 的期货价格是 100 $(1.01)^6$ 美元=106.15 美元，如期货价格网格所示。网格上任何节点的期货价格能够用同样的技术求得：只要将相应的商品价格乘以剩余时间的利率增长因素即可。

期货价格也能够用风险中性概率递归地求得。我们知道第 6 个月的最终期货价格一定等于那时的商品价格本身，所以可以将这些值填入表格的最后一列。让我们用 F 表示前一列的顶端、时间 5 的期货价格。如果你按这个 336
规定价格持有一期合约多头，那么下一期的回报或者是 $112.62-F$，或者是 $109.30-F$，这取决于达到哪个节点。这两个值必须分别乘以 q 和 $1-q$，并将和贴现一期求得这个合约在时间 5 的初始价值。但期货合约的安排要使得初始价值为 0，因此 $q(112.62-F)+(1-q)(109.30-F)=0$，推得 $F=q112.62+(1-q)\ 109.32$。换句话说，F 是下一期价格的加权平均值，加权系数是风险中性概率。我们没有贴现这个平均值。

利用风险中性概率计算加权平均值（或期望值），这种过程一次一列地往后继续。求得的最终结果也是 106.15。

注意到用风险中性定价公式也可以将原来的商品价格网格向后重构。给定最终价格，我们用风险中性概率计算期望值，但现在我们确实要贴现求前一个节点的价值。向后推，填补整个网格，复制出左上角原来的数字。

除了期货价格计算中没有贴现外，计算期货价格的后推过程和计算商品价格的后推过程是一样的。因此，要不是被利率增长因素放大，期货价格和商品价格将是一样的。

例 12.6（商品期权） 让我们考虑例 12.5 中与商品相关的期权。首先，我们考虑 6 个月后到期执行价格为 102 美元的该商品本身的期权。现在我们用二项式网格方法求这个期权价值就容易了，如图 12—9 右上角显示的那

337 样。只需填上最后一列的数值，然后用风险中性贴现过程往后推。该期权的公平价值是 4.16 美元。

下一步让我们考虑执行价格为 102 美元的期货合约看涨期权。如果期权被执行，则看涨期权开立者必须以 102 美元的期货价格交割一个期货合约，但要盯市。假定执行时，实际的期货价格是 110.42 美元。那么期权开立者能够以 110.42 美元的期货价格购买期货合约（零成本）并将这个合约和差价 110.42−102.00=8.42 美元一起交给期权持有者。这个付款弥补了期权开立者以 110.42 美元交割合约，而不是按约定的 102.00 美元交割。换句话说，如果期权被执行，期权持有者获得现在的期货合约和现在的期货价格与期权执行价格之间差额的现金流。

我们可以按图 12—9 右下角显示的、和其他看涨期权一样的方式计算这个看涨期权的价值。在每个节点，我们必须检查执行期权是否有利。这需要弄明白相应的期货价格减去执行价格是否大于持有期权可能获得的风险中性价值。如果执行期权是最优的，我们用黑体记录期权价值。求得的期权价格是 4.28 美元。注意到即使最后回报值等于两个期权的价值，期货期权也具有一个较高的价值，因为较高的居中期货价格导致提前执行的可能性。

12.8 评估实际投资机会

期权理论可以用来评估不是纯金融工具的投资机会。我们将通过再次考虑金矿租赁问题说明这一点。可是，现在我们假定黄金价格是随机波动的，这种波动必须以我们对租赁前景的评估来解释。

例 12.7（辛普利可金矿） 回想第 2 章的辛普利可金矿。可以每盎司 200 美元的成本，按每年 10 000 盎司的速度从这个金矿开采黄金。目前，黄金的市场价格是每盎司 400 美元，但我们认识到黄金价格随机地波动。假定利

率期限结构是10%的水平线。按惯例，我们假定在给定的一年获得黄金开采的价格是年初保有的价格，但所有的现金流发生在该年年末。我们希望确定这个金矿10年租赁的价值。

我们用二项式网格描述将来的黄金价格。每年的价格或者按1.2的因子增加（以概率0.75），或者按0.9的因子减少（以0.25的概率）。图12—10显示了推导的网格。

我们怎样应用期权定价公式发展的方法解决租赁价值的问题呢？诀窍是注意到金矿租赁可以看成是一个金融工具。它的价值随黄金价格波动而波动。事实上，在任何给定的时间，金矿租赁的价值可能仅仅是黄金价格和利 338
率（我们假定是固定的）的函数。换句话说，金矿租赁是标的证券为黄金的衍生工具。因此，在黄金价格网格上，租赁的价值能够逐一置入一个又一个节点。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
400.0	480.0	576.0	691.2	829.4	995.3	1 194.4	1 433.3	1 719.9	2 063.9	2 476.7
	360.0	432.0	518.4	622.1	746.5	895.8	1 075.0	1 289.9	1 547.9	1 857.5
		324.0	388.8	466.6	559.9	671.8	806.2	967.5	1 161.0	1 393.1
			291.6	349.9	419.9	503.9	604.7	725.6	870.7	1 044.9
				262.4	314.9	377.9	453.5	544.2	653.0	783.6
金价（美元）					236.2	283.4	340.1	408.1	489.8	587.7
						212.6	255.1	306.1	367.3	440.8
							191.3	229.6	275.5	330.6
								172.2	206.6	247.9
									155.0	186.0
										139.5

图12—10 黄金价格网格

每年价格或按因子1.2增加或按因子0.9减少。每年导出的价值用棋盘式表格显示。

网格最后节点上（在 10 年末）的租赁价值容易确定：那时的价值等于 0，因为我们必须将金矿归还给矿主。在表示还有 1 年的节点，租赁的价值等于这一年可能从金矿上获得的利润贴现到年初。例如，9 年上端节点的价值是 10 000（2 063.9－200）/1.1＝1 694 万美元。对较早的节点，租赁价值是该年可能获得的利润与下一年租赁的风险中性期望价值两者往回贴现一期的价值之和。风险中性概率是 $q=(1.1-0.9)/(1.2-0.9)=2/3$，而 $(1-q)=1/3$。因此，租赁价值可以用这些价值往后递归计算求得。（在黄金价格低于 200 美元的节点，我们不会开采。）图 12—11 显示了这些导出价值。我们断定租赁的价值是 24 074 548 美元（显示所有数字）。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
24.1	27.8	31.2	34.2	36.5	37.7	37.1	34.1	27.8	16.9	0.0
	17.9	20.7	23.3	25.2	26.4	26.2	24.3	20.0	12.3	0.0
		12.9	15.0	16.7	17.9	18.1	17.0	14.1	8.7	0.0
			8.8	10.4	11.5	12.0	11.5	9.7	6.1	0.0
				5.6	6.7	7.4	7.4	6.4	4.1	0.0
租赁值（百万美元）					3.2	4.0	4.3	3.9	2.6	0.0
						1.4	2.0	2.1	1.5	0.0
							0.4	0.7	0.7	0.0
								0.0	0.1	0.0
									0.0	0.0
										0.0

图 12—11　辛普利可金矿

租赁的价值是后推求得的。如果黄金价格高于每盎司 200 美元，开采是有利可图的，否则不会从事任何开采。

339 许多读者将会从这个例子中明白他们比刚开始学习这本书时对投资有了更深的了解。在前面第 2 章，我们假定在租赁过程中黄金价格保持 400 美元

不变的情况下讨论辛普利可金矿，也假定一个常数利率 10%。在这类问题中相当普遍使用的假设，在大多数读者看来，可能并不是真正不协调一致的。可是，现在我们明白这些假设并不是非常简明易懂的，它们实际上是不一致的。如果已知黄金价格是常数，黄金将起到零回报率的无风险资产的作用。这与无风险利率为 10%的假设是不相容的。事实上，在我们的黄金价格网格中，必须选择 u、d 和 R 使得 $u>R>d$。

既然我们已经“掌握”辛普利可金矿，是继续前进迎接更大挑战的时候了。(如果你认为你真正掌握了辛普利可金矿，试做练习 8。)

例 12.8 (科普莱克斯可金矿*)[3]科普莱克斯可金矿是第 5 章讨论过的例子。这个金矿的开采成本取决于金矿中的黄金剩余量。因此，如果你租赁这个金矿，考虑到每一期的开采影响将来的开采成本，你必须决定每一期开采多少。我们现在还假定黄金价格按照前面例子中的二项式网格模型变化。

任何一年的开采成本是 $500z^2/x$ 美元，这里 x 是年初黄金的剩余量，z 是提炼出来的以盎司度量的黄金量。开始时，金矿中有 $x_0=50\ 000$ 盎司的黄金。我们还假设利率期限结构是 10%的水平线。而且，从金矿开采所获得的利润是以期初黄金价格为基础决定的，在这个例子中所有的现金流发生在期初。

为了解决这个问题，就必须作初步分析。很明显，最后时间租赁的价值是 0。如果我们在代表 9 年末的节点，就必须决定第十年的最优黄金开采量。相应地，我们必须计算利润：

$$V_9(x_9)=\max_{z_9}(gz_9-500z_9^2/x_9)$$

这里 g 是特定节点的黄金价格。从例 5.5 的计算，我们知道最优化给出：

$$V_9(x_9)=\frac{g^2x_9}{2\ 000}$$

这说明租赁的价值与剩余黄金量 x_9 成比例。因此，我们写成 $V_9(x_9)=K_9x_9$，这里：

$$K_9=\frac{g^2}{2\,000}$$

340 我们建立对应于各种黄金价格的各节点的 K 值网格。将最后一列所有元素的值设置为 $K_{10}=0$，并将各 K_9 的值置于第九列。按前面例子的分析，用类似的方法我们求得时间 8 的一个节点的价值为：

$$V_8(x_8)=\max_{z_8}[gz_8-500z_8^2/x_8+d\hat{K}_9\times(x_8-z_8)]$$

这里

$$\hat{K}_9=qK_9+(1-q)\ K'_9$$

这里 K_9 是时间 8 的该节点正右方节点的价值，$K_9{}'$是时间 8 的该节点的正下方节点的价值。这可推出：

$$z_8=\frac{(g-d\hat{K}_9)\ x_8}{1\,000}$$

而 $V_8(x_8)\ =K_8x_8$，这里

$$K_8=\frac{(g-\hat{K}_9/R)^2}{2\,000}+\hat{K}_9/R$$

而且在时间 8，每个节点将有不同的 K_8 值。我们用同样的公式往后推以完成图 12—12 的网格，得到 $K_0=324.4$。因此，求得的租赁价值是 $V_0=50\,000\times K_0=16\,220\,000$ 美元。

实物期权

有时，期权与非金融工具的投资机会有关。例如，当经营一个工厂时，经理可能有雇佣额外的工人或购买新装备的选择。再比如，如果某人获得了一片
341 土地，他有钻探石油的选择，以后如果找到石油了有开采石油的选择。事实上，考察任何允许控制一系列经营选择进程的过程是可能的。为了强调这些选择与实际行动或实际商品有关，与纯金融商品期权（比如股票期权）相反，这些经营选择通常被称为**实物期权（real options）**。当用于一般投资问题时，实物期权这个术语也用来表示期权理论可以（且应该）用来分析这个问题。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
324.4	393.8	478.1	580.8	706.6	862.3	1 058.7	1313.4	1 656.1	2 129.9	0.0
	272.5	329.9	398.6	480.7	578.4	694.4	831.7	995.0	1 198.0	0.0
		225.8	272.2	327.0	390.7	463.4	542.9	621.9	673.9	0.0
			182.8	218.9	260.0	305.2	351.1	387.3	379.1	0.0
				143.6	169.5	197.0	222.5	237.3	213.2	0.0
K 值					108.1	124.4	138.1	142.8	119.9	0.0
						76.9	84.1	84.6	67.5	0.0
							50.3	49.5	37.9	0.0
								28.7	21.3	0.0
									12.0	0.0
										0.0

图 12—12　科普莱克斯可金矿

金矿的价值与金矿中剩余的黄金量成比例。这个比例因子通过向后递归的方法求得。

例 12.9（工厂经理问题） 有些制造业工厂可以用每月**固定成本（fixed cost）**（设备、管理和租金）和与产出水平成比例的**变动成本（variable cost）**（材料、劳务和公用事业费）来描述。因此，总成本是 $T=F+Vx$，这里 F 是固定成本，V 是变动成本费率，而 x 是生产的产出量。该工厂在产出水平 x 经营一个月获得的利润是 $\pi=px-F-Vx$，这里 p 是它的产品的市场价格。显然，如果 $p>V$，该公司将在产出 x 等于工厂最大生产能力水平上经营；如果 $p<V$，公司将不经营。因此，公司拥有一个继续经营的期权，其执行价格等于变动成本费率。（例 12.7 的辛普利可金矿就是这种类型的期权。）

实物期权通常能够用与分析金融期权同样的方法进行分析。具体地，人们建立合适的不确定性表示方法，通常用二项式网格并向后推以求得期权价

值。这个求解过程实际上比用于求期权价值的其他特定方法更基本，所以强行将所有控制机会融入期权（实物期权或其他期权）看起来没有必要，有时甚至是矫揉造作。另外，风趣的分析家把这些问题看成是：问题一来就马上攻克它们。

辛普利可金矿可以用来描述与决定投资时机有关的实物期权。

例 12.10（辛普利可金矿的提升*） 回想辛普利可金矿每年能以每盎司 200 美元的成本生产 10 000 盎司黄金。这个金矿已经包括整个一系列实物期权——每年实施开采经营的期权。事实上，租赁的价值可以表示为这些单个期权的价值之和（虽然这个视角不是特别有用）。在这个例子中，我们希望考虑另一种期权，确实符合实物期权的精神。

假定存在通过购买新的开采机械和在金矿实施结构性改革以提升辛普利可金矿的生产率的可能性。这种生产率的提高将花费 400 万美元，但将提高 25%的金矿产量，使每年的黄金产量达到 12 500 盎司，每盎司总的经营成本达到 240 美元。

这种提升生产率的选择是一种期权，因为不是必须被执行。而且，它是整个租赁期都可用的期权。这种提升可以在任何一年的年初实施（就是被执
342 行），而且一旦合适就在将来所有年份应用。但是，我们假定在租赁期末，这种提升变成了矿主的财产。

图 12—13 说明提升期权可用时怎样计算租赁的价值。我们首先计算假定已在适当时候提升的租赁价值。这种计算是通过构造图 12—13 的上半部网格，并用例 12.7 辛普利可金矿同样的技术但使用新的生产能力和经营成本数据计算的。在这些条件下，金矿的价值是 2 700 万美元。这个数字不包括提升成本，所以如果我们要在时间 0 时提升金矿，租赁的净价值将是 2 300万美元，略小于前面求出的没有提升时的租赁价值 2 410 万美元。因此，立即实施提升没有益处。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
27.0	31.8	36.4	40.4	43.5	45.2	44.8	41.4	33.9	20.7	0.0
	19.5	23.3	26.6	29.3	31.0	31.2	29.2	24.1	14.9	0.0
		13.5	16.3	18.7	20.4	21.0	20.0	16.8	10.5	0.0
			8.6	10.8	12.5	13.4	13.2	11.3	7.2	0.0
				4.9	6.5	7.7	8.0	7.2	4.7	0.0
					2.3	3.4	4.1	4.1	2.8	0.0
假定适当提升的租赁价值						0.8	1.3	1.8	1.4	0.0
							0.1	0.2	0.4	0.0
								0.0	0.0	0.0
									0.0	0.0
										0.0
24.6	28.6	32.6	**36.4**	**39.5**	**41.2**	**40.8**	**37.4**	**29.9**	16.9	0
	18.0	20.9	23.5	25.6	**27.0**	**27.2**	**25.2**	**20.1**	12.3	0
		12.9	15.0	16.7	17.9	18.1	17.0	14.1	8.7	0
			8.8	10.4	11.5	12.0	11.5	9.7	6.1	0
				5.6	6.7	7.4	7.4	6.4	4.1	0
					3.1	4.0	4.3	3.9	2.6	0
具有提升期权的租赁价值						1.3	2.0	2.1	1.5	0
							0.0	0.7	0.7	0
								0.0	0.1	0
									0.0	0
										0

图 12—13 提升金矿经营的期权

上半部的网格数据的计算和辛普利可金矿一样，但用的是提升的参数。下半部网格是指上半部网格实施提升时的价值。

为了求得提升期权的价值，我们构造另一个网格，显示在图 12—13 的下半部。这里我们使用原来的生产能力和经营成本参数：每年 100 000 盎司黄金产量和每盎司 200 美元的成本。但是，在每个节点，除了通常的价值计算外，我们看一下通过支付 400 万美元跳到上半部网格是否有益。具体地，我们首先用风险中性概率按正常的方式计算下半部某节点的价值，然后将这个价值与上半部网格相应节点的价值减去 400 万美元的差相比较，再将这两个价值中较大的价值置于下面的网格。

343 表中黑体字表示实施提升跳到上半部网格具有优势的节点。注意到这些价值恰好比上半部对应数据少 400 万美元。

带有期权的租赁的总价值就是第一个节点给出的价值，而且 400 万美元已经被扣除。因此，具有提升期权的租赁的价值是 2 460 万美元——比原来的价值 2 410 万美元略有增加。

线性定价

虽然我们一般运用风险中性定价公式给衍生证券估价，但重要的是要认识到这种定价方法是以线性定价方法为基础的，也就是，我们将一种特定的衍生证券与我们了解的许多证券匹配，然后加总其价值。下面的例子突出了这种方法的基本简明性。

例 12.11（盖文解释） D. 琼斯先生对华尔街的定量计算工作感到好奇。他提出这个问题和他儿子盖文讨论。

“他们正在用这些奇特的计算机计算什么呢?”

盖文说这些计算都是基于线性定价。“他们将一种证券拆成独立的部件，将每个部件定价，然后将这些价值加总求和。”

“你在跟我开玩笑吗? 我不明白你为什么需要一台超级计算机做这个工作。”

“很快就变复杂了。”盖文回忆他学习期权理论时已经计算过的一些内

容。“我将给你举个例子，”他说，他从口袋里摸出了 25 美分的硬币。

拿起一枚硬币，盖文开始说，“考虑这个问题：你支付 1 美元。我抛这个硬币。如果出现头像，你得到 3 美元；如果出现背面，你什么也得不到。你可以在任何你愿意的水平上参与这个游戏，而回报相应地上升。”

琼斯先生点点头。盖文继续说。“抛硬币就像股票。它具有价格，而结果是不确定的，但它有一个正的期望值——否则没有人会投资。”

“这个问题相当简单。”

“可选择地，作为第二个问题，你可以把你的钱留在口袋里。这与你支付 1 美元，我抛硬币是等价的。如果出现头像，你得到 1 美元；如果出现背面，你得到 1 美元。明白了吗？”

“明白了。”

“这些是基本问题。现在这里还有一个新的定价问题：我抛硬币两次。如果至少出现 1 次头像，你可获得 9 美元；否则，你一无所获。这个问题的价值是多少呢？”

琼斯先生挠挠头，过了几秒钟后说，“我得计算各种概率。”

“它与实际概率无关。这个问题可以表示为其他两个问题的组合。我们只需将两个价值求和即可。”

“好的，演示一下。”

盖文在报纸边沿画了四个树形图，如图 12—14 所示。他解释说树（a）是最初的问题，树（b）是把钱留在口袋里，而树（c）是新问题，有一个未知的价格 C。 344

如果抛第一次出现头像，从那一点开始的树的每个方向都有 9 美元的回报，看起来像是把钱留在口袋里的回报的 9 倍。这时它值 9 美元。如果抛第一次出现背面，从该点开始的树看起来是最初问题的 3 倍，所以它值 3 美元。因此，整个问题等同于有 9 美元和 3 美元回报的树（d）。“清楚了吗？”

“很清楚了。”

盖文说明了 9 美元和 3 美元的回报可以分解为 6+0 和 3+3。其中第一

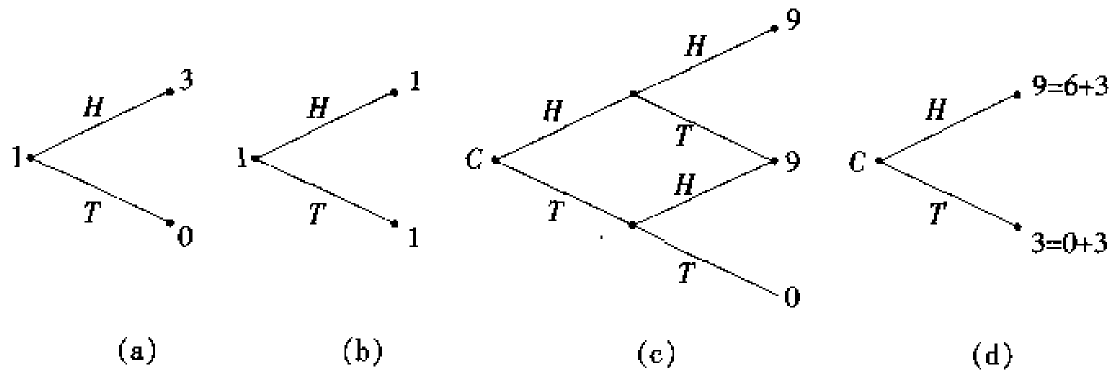


图 12—14　问题和它的部件

树（a）是一个基本的风险问题；树（b）是一个无风险机会；树（c）表示一个新的更复杂的问题。价值 C 可以通过拆成各部件而求得。最后一个部件显示在树（d）。

个部件 6+0 是原来问题的 2 倍。第二个部件 3+3 是留在口袋里的选择的 3 倍。因此，$C=2+3=5$ 美元。“明白了吗?”

“明白了，我会做了。”

盖文总结说。“这就是这些计算机正在做的事情。衍生证券是用成百次抛硬币表示每天股票价格变化进行定价的。计算机正是通过我们这个例子中这样的大树来计算的。”

（作为一个练习，确定风险中性概率和通过风险中性定价公式计算是很有益处的。）

12.9　一般的风险中性定价*

风险中性定价的一般原理可以从前面几节的分析和方法推出。这个原理在二项式网格模型下，提出了紧凑的衍生证券价格公式。

假定某资产的价格 S 用二项式网格描述，并假定 f 为一种证券——它
345 在任何时间 k 的现金流仅仅是时间 k 的节点的函数。因此，该资产的无套利价格是：

$$f_{\text{val}} = \hat{E}\left(\sum_{k=0}^{N} d_k f_k\right) \tag{12—12}$$

在这个方程中，求和式表示贴现的现金流，而 d_k 是时间 0 观察的无风险贴现因子。f_k 是该期的现金流，它取决于时间 k 出现的特定节点，因此，f_k 是随机的。期望 $\hat{E}$ 是关于与标的资产网格相关的风险中性概率求得的期望。

考虑一个执行价格为 K 的欧式看涨期权。定价公式（12—12）变成：

$$C=\frac{1}{R_T}\hat{E}[\max(S_T-K,0)] \tag{12—13}$$

这里 R_T 是整个到期时间的无风险回报。在这种情况下，最后时间只有 $\max(S_T-K,0)$ 一个现金流。我们将这个现金流求风险中性期望并贴现到现在。注意到用这个公式实际计算时最好从终点往后推。我们用连续现值方法将公式一次后推一步。

许多情况下，现金流可能受我们的行为和偶然性的影响。例如，在到期前我们可能有执行期权的机会、决定开采多少黄金或者提升生产率。在这些情况下，一般定价公式变成：

$$f_{\text{val}} = \max\left[\hat{E}\left(\sum_{k=0}^{N} d_k f_k\right)\right]$$

这里的最大化是关于可能采取的行为而求的。我们已经看到在这一章的例子中，许多情况下这种最大化作为后推递归过程的一部分是怎样实施的，虽然网格规模有时候必须增加。这个一般公式具有巨大的力量，因为它提供了公式化、并解决许多有趣而重要的投资问题的方法。

12.10　小结

期权是在规定的条件下购买（或出售）一种资产的权利（但不是义务）。期权已经有了一个交替发展的历程，但在过去的 20 年里期权在金融领域发挥了重要的作用。如果谨慎地加以运用，它们能够控制风险，

并提高组合的表现。如果运用不谨慎，期权也能够极大地增加风险，并导致巨大的损失。

期权术语包括：看涨期权、看跌期权、执行价格、约定价格、有效期、开立一个看涨期权、期权溢价、实值、虚值、美式期权和欧式期权。

期权理论的主要主题是期权的正确价格（或期权溢价）的确定。这个价
346 格取决于标的资产的价格、执行价格、到期时间、标的资产的波动性、该资产发生的现金流（如股息支付）和现行利率。虽然确定合适的期权价格可能很困难，但从简单的无套利观点能够推导出某些关系。例如，对欧式期权来说，具有同样执行价格的看涨期权和看跌期权存在平价关系。同样地，期权组合的价值（如蝶形价差）一定和成分期权的价格组合一样。

一个重要的结果是：到期前不支付股息的美式股票看涨期权，到期前执行决不会是最优的。

求期权价格的一般方法是用二项式网格方法。标的资产的随机过程用二项式网格模型描述。到期时的期权价值被置入相应的期权网格的最后节点。期权网格的其他节点的价值通过一次一个向后推算从头到尾推完所有时期而求得。对欧式期权（没有提前执行的可能性）来说，期权网格上任何一个节点的价值是通过用风险中性概率计算下一期价值的期望值而求出的。然后将这个期望值用一期的利率贴现。如果期权是美式的，按以前方法计算出来的价值必须与当时执行期权可能获得的价值进行比较，这两个价值中较大的一个作为该节点的最后价值。

风险中性概率很容易计算。向上运动的风险中性概率是 $q=(R-d)/(u-d)$。推导这个公式最容易的方法是求 q 使得标的证券的价格等于下一期价值的期望值的贴现值。

二项式网格方法可以用于求除了期权以外的其他投资的价值。事实上，它可以用于评估任何现金流由基础交易资产决定的工程的价值。这些例子包括期权期货、金矿租赁、油井和林场。利用独创性，即使更复杂的实物期权也可以通过构造两个或更多的相互关联的二项式网格来估价。

练习

1. （牛市基差）对某种股票乐观（相信该股票价格将上升）的某投资者可能希望对该股票构造一个牛市基差。构造这种基差的一种方法是：买入一个执行价格为 K_1 的看涨期权，并卖出一个具有同样到期日但执行价格为 $K_2>K_1$ 的看涨期权。画出这个基差的回报曲线。这个基差的初始成本是正的还是负的？

2. （看涨—看跌平价）假定在时期 $[0, T]$ 某股票支付的股息按利率 r 计算的现值为 D。证明时间 T 到期的欧式期权在时间 0 时的看涨—看跌平价关系是：

$$C+D+Kd=P+S$$

这里 d 是从时间 0 到 T 的贴现因子。

3. （平价公式）为推导看涨—看跌平价公式，与购买一个看涨期权、卖出一个看跌期权、并借出资金 dK 相关的回报是 $Q=\max(0, S-K)-\max(0, K-S)+K$。证明 $Q=S$，并因此而推导看涨—看跌平价公式。 347

4. （看涨期权的执行价格◇）考虑某不支付股息的看涨期权族，除执行价格以外每个期权都是一样的。执行价格为 K 的看涨期权的价值用 $C(K)$ 表示。利用无套利原理证明如下三个一般关系：

(a) $K_2>K_1$ 意味着 $C(K_1)\geqslant C(K_2)$。

(b) $K_2>K_1$ 意味着 $K_2-K_1\geqslant C(K_1)-C(K_2)$。

(c) $K_3>K_2>K_1$ 意味着：

$$C(K_2)\leqslant\left(\frac{K_3-K_2}{K_3-K_1}\right)C(K_1)+\left(\frac{K_2-K_1}{K_3-K_1}\right)C(K_3)$$

5. （固定股息⊕）假定某股票在时间 τ 将支付的股息量为 D。我们希望用网格方法决定这个股票的欧式看涨期权的价格。相应地，包括期权整个

生命期的时间间隔 [0, T] 被分成 N 个时间间隔，因此共规定了 $N+1$ 个时期。假定股息日出现在时期 k 和时期 $k+1$ 之间。解决这个问题的方法将是用通常的方法建立股票价格网格，但要在时期 k 的节点扣除 D。这样产生了具有非重合节点的树，如图 12—15。

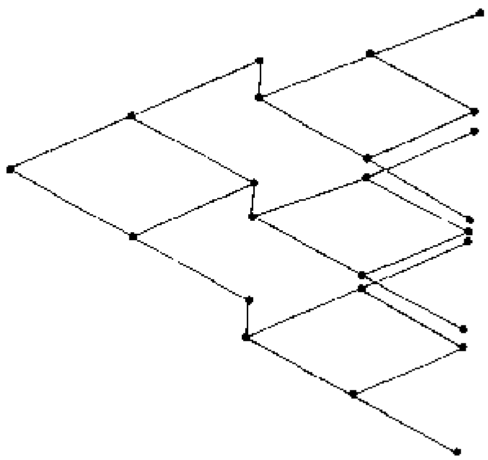


图 12—15　非重合股息树

这个问题可以用这种方法解决，但存在另一种确实重合的表示法。既然股息量是已知的，我们把它看成股票价格的非随机元素。在股息支付前的任何时间，我们认为股票价格有两个元素：一个随机元素 S^* 和一个价值等于将来股息的现值确定性元素。随机元素 S^* 通过初始价值为 $S(0)-De^{-r\tau}$ 及由股票价格波动系数 σ 决定的 u 和 d 的网格描述。期权是在这个网格上估价的。在计算中惟一必须修正的是：在一个节点给期权定价时，对 $t<\tau$，定价公式中应用的该节点的股票价格不仅仅是 S^*，而是 $S=S^*+De^{-r(\tau-t)}$。利用这个技巧可以求得 $S(0)=50$、$K=50$、$\sigma=20\%$、$R=10\%$和三个半月后支付股息 $D=3$ 美元的 6 个月到期的看涨期权的价值。

348　6.（看涨期权不等式）考虑某个不支付股息的股票的欧式看涨期权。执行价格是 K，到期时间是 T，时间 T 到期的单位零息债券的价格为 $B(T)$。将看涨期权的价格表示为 $C(S, T)$。证明：

$$C(S,T)\geqslant\max[0,S-KB(T)]$$

（提示：考虑两个组合：(a) 购买一个看涨期权，(b) 购买一只股票并出售 K 个债券。）

7. （永久看涨期权）永久期权是一个永远不会到期的期权。（这种期权必定是美式期权。）利用练习 6 证明不支付股息的股票的永久看涨期权的价值 $C=S$。

8. （惊喜⊕）考虑一个确定性的全部是正量的现金流$(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$。$PV(r)$ 表示该现金流按利率 r 计算的现值。

(a) 如果 r 减少，$PV(r)$ 是增加还是减少？

(b) 用 $r=4\%$解辛普利可金矿问题，并证明租赁的价值是 2 210 万美元。你能解释为什么这个价值相对于 $r=10\%$时的价值减少了吗？

9. （我的硬币）有两个问题：(a) 我抛硬币，如果出现头像，你获得 3 美元；如果出现背面，你得到 0 美元。你花费 1 美元参与这个问题。你可以在任何水平上参与这个问题，或重复地参与，并且你的回报相应地增加。(b) 你也可以将钱放在口袋里（没有利息）。这里还有第三个问题：(c) 我抛三次硬币。如果至少出现 2 次头像，你得到 27 美元；否则你一无所获。这个问题的价值是多少？

10. （幸福的看涨期权）某纽约公司正提供一种被称为“幸福的看涨期权”的新金融工具。它在时间 T 的回报等于 $\max(0.5S, S-K)$，这里 S 是股票价格而 K 是固定的执行价格。你经常用幸福的看涨期权获得某些东西。令 P 表示时间 $t=0$ 时的股票价格，并且令 C_1 和 C_2 分别表示执行价格为 K 和 $2K$ 的普通看涨期权的价格。幸福的看涨期权的公平价格有如下形式：

$$C_H=\alpha \cdot P+\beta \cdot C_1+\gamma \cdot C_2$$

求常数 α，β 和 γ。

11. （你是总裁）今天是 8 月 6 日。你是一个小电气公司的总裁。该公司有一笔现金储备在今后大约三个月里没有派用场，但利率很低。你的财务总监（CFO）告诉你有家进取性证券公司有个投资机会，保证没有损失而且允许参与股票市场的上行变化。实际上，到 11 月第三周的总回报率由公式

max(0, 0.25r) 决定，这里 r 是三个月期标准普尔 100 股票指数的回报（忽略股息）。该 CFO 建议这种保守的投资可能是参与利率市场的理想替代方案并询问你的意见。你拿起《华尔街日报》并做了一些简单计算检查这个建议是否事实上是个好主意。说明这些计算和结论。用表 12—1 的资料。（注意 410c 表示执行价格为 410c 的看涨期权。）

349 **表 12—1** **总裁的资料**

标准普尔 100 指数	期权		标准普尔指数=414.74
11 月	410c	13	国库券
11 月	410p	$8\frac{1}{4}$	11 月 12 日：收益=3.11
11 月	420c	$7\frac{1}{2}$	
11 月	420p	$11\frac{1}{4}$	

资料来源：Standard &Poor's, a division of the McGraw Companies。经允许引用。

12.（辛普利可不变性）如果辛普利可金矿问题的求解除了参数 $u=1.2$ 改为 $u=1.3$ 以外，其余参数保持不变，则租赁价值在三个小数位内保持不变。事实上，u 和 d 在很大范围内的变化几乎对租赁价格没有影响。对这个结论给出直观解释。

13.（期间长度的变化⊕）某股票的波动系数为 $\sigma=0.30$，现在价值是 36 美元。该股票的看涨期权的执行价格为 40 美元，5 个月后到期。利率是 8%。用 1 个月间隔的二项式网格求这个看跌期权的价值。用半个月的间隔的二项式网格重复这个计算程序。

14.（平均值科普莱克斯可）假定时间 k 到 $k+1$ 提炼黄金的价格是这两个时间黄金价格的平均值，也就是，$(g_k+g_{k+1})/2$。但是，成本是期初引起的，而收益是期末收到的。求这种情况下科普莱克斯可金矿的价值。

15.（“因为你喜欢它”期权）考虑例 12.3 和例 12.4 的股票，其 $\sigma=0.20$，初始价格为 62 美元。利率是按月复利 10%。考虑执行价格为 60 美元的 5 个月期权。这个期权可以在恰好 3 个月后由购买者宣布该期

权或者是欧式看涨期权或者是欧式看跌期权。求这个“因为你喜欢它”期权的价值。

16.（树的收成⊕）你正在考虑林场的投资。树木每年按如下因子长大：

年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
增长	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.15	1.1	1.05	1.02	1.01

木材的价格满足参数 $u=1.20$ 和 $d=0.90$ 的二项式网格。利率是常数 10%。每年要花费 200 万美元（应在年初支付）租赁林地。树木的初始价值是 500 万美元（假定它们被立即收获）。你可以在任何年末砍伐树木而砍伐后没有支付租金。（对细心的读者，我们假定被砍伐的树木可以不费成本地储存。）

（a）论证如果租金为 0，只要树木在往上长，你永远也不会砍伐树木。

（b）每年的租金为 200 万美元，求最佳砍伐策略，并求该投资机会的价值。

【注释】

[1] 亚里士多德：《政治学》，第一卷，第十一章，乔威特（Jowett）译。引自 Gastineau（1975）。

[2] 初始保证金水平通常是期权的股票价值的 50%，维持保证金水平是 25%。

[3] 这是一个更难的例子，应当在你学习这一章的内容相当轻松以后再研究这个例子。

【参考文献】 350

期权更一般的背景材料，可以参看文献［1～3］。期权定价最初是由巴克里尔（Bachelier）利用统计方法提出的，见文献［4］。看跌—看涨平价和各种独立于基础股票过程的定价不等式的分析是在文献［5］中系统地发展的。当标的资产价格由几何布朗运动决定时，基于无套利定价原理的合理期

权价格最先由布莱克（Black）和斯科尔斯（Scholes）在文献［6］中给予了注意。利用二项式网格的简化方法首先在文献［7］中提出，而后在文献［8～9］中得到发展。期权定价的风险中性公式在文献［10］中推广到其他衍生证券。练习 2 摘自文献［2］。

1. Gastineau, G. L. (1975), *The Stock Options Manual*, McGraw-Hill, New York.
2. Cox, J. C., and M. Rubinstein (1985), *Options Markets*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
3. Hull, J. C. (1993), *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
4. Bachelier, L. (1900), "Théorie de la Spéculation", *Annals de l' Ecole Normale Superieure*, 17, 21 — 86。English translation by A. J. Bones (1967) in *The Random Character of Stock Market Prices*, P. H. Cootner, Ed., M. I. T. Press, Cambridge, MA, 17—78.
5. Merton, R. C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141—183.
6. Black, F., and M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Cor porate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637—654.
7. Sharpe, W. F. (1978), Investments, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
8. Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, 229—263.
9. Rendleman, R. J., Jr., and B. J. Barter (1979), "Two-State Option Pricing", *Journal of Finance*, 34, 1093—1110.
10. Harisson, J. M., and D. M. Kreps (1979), "Martingale and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Econmic Theory*, 20, 381—408.

13.1 引言

期权理论在现代金融理论中扮演一个重 351
要角色，因为在没有套利机会的假设条件下它如此明显地突出了比较原理的力量。前面一章用二项式网格框架以简单实用的方式描述了期权理论。这些内容足以解决大部分期权问题。但是，还存在连续时间形式的期权理论和网格理论的拓展，这些理论引发了新

的金融见解，允许考虑更复杂的衍生证券，提供了可选择的计算方法，并为以下各章提出的更完整的投资理论准备了方法。

13.2 布莱克－斯科尔斯（Black-Scholes）方程

著名的布莱克－斯科尔斯（Black-Scholes）期权定价方程开创了以无套利原理为基础的现代金融理论。它的发展引发了大规模的研究，并使金融实践产生了革命性的变化。该方程是在标的证券的价格波动可以用第11章提出的伊藤过程来描述的假设下推导的。可是，该方程背后的逻辑是概念上与二项式网格模型应用的概念一样：在每个时刻两个可获得的证券被组合起来构造一个复制衍生证券局部行为的组合。历史上，布莱克－斯科尔斯期权理论比二项式网格理论要早几年，网格理论是简明化的结果。

为开始描述布莱克－斯科尔斯方程，令标的证券（我们将称它为股票）
352 的价格 S 由如下方程描述的时间间隔 $[0, T]$ 的几何布朗运动过程决定：

$$dS=\mu S dt+\sigma S dz \tag{13—1}$$

这里 z 是标准布朗运动（或维纳过程）。还假定存在一种无风险资产（债券），在时间间隔 $[0, T]$ 上的利率为 r。这个债券的价值 B 满足如下方程：

$$dB=rB dt \tag{13—2}$$

最后考虑证券 S 的一种衍生证券，这意味着它的价格是 S 和 t 的函数。令 $f(S, t)$ 表示时间 t 股票价格是 S 时该证券的价格。我们需要一个（非随机）关于函数 $f(S, t)$ 的方程，明确地给出该衍生证券的价格。这个函数可以通过解规定的布莱克－斯科尔斯方程求得。

⇒**Black-Scholes 方程** *假定某证券的价格由式（13—1）决定，利率是 r。该证券的衍生证券的价格是 $f(S, t)$，满足偏微分方程：*

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}rS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2=rf \tag{13—3}$$

我们在这一节的后面提出这个结果的证明，但首先让我们考虑它的意义。

作为一个简单例子，考虑股票本身。它是证券 S 的衍生证券（普通形式），所以 $f(S,t)=S$ 应该满足布莱克-斯科尔斯方程。事实上，利用这个选择 f，我们有 $\partial f/\partial t=0$，$\partial f/\partial S=1$，$\partial^2 f/\partial S^2=0$。因此，式（13—3）变成 $rS=rS$，这表明 $f(S,t)=S$ 是一个解。

另一个简单例子，我们考虑债券。它也是证券 S 的衍生证券（普通形式），所以 $f(S,t)=e^{rt}$ 应该满足布莱克-斯科尔斯方程。事实上，利用这个选择 f，我们有 $\partial f/\partial t=re^{rt}$，$\partial f/\partial S=0$，$\partial^2 f/\partial S^2=0$。因此，式（13—3）变成 $re^{rt}=re^{rt}$，这表明 $f(S,t)=e^{rt}$ 事实上是一个解。还有无数个更多解。

一般地，布莱克-斯科尔斯方程可以以两种方式思考。首先，假定我们任意指定一个函数 $f(S,t)$ 并宣布这是新证券的价格。既然指定这个函数，我们可以安排它不满足布莱克-斯科尔斯方程。什么错了？如果 $f(S,t)$ 不满足布莱克-斯科尔斯方程，那么在 S、B 和 f 中存在套利机会。将这些证券适当组合（这个组合可以随时间发生变化），将可能赚取无风险收益。因此，考虑布莱克-斯科尔斯方程的第一种方式是规定衍生证券价格函数必须具有的性质。

考虑布莱克-斯科尔斯方程的第二种方式是该方程可以实际用于求相应于各种衍生证券的价格函数。这是通过规定合适的边界条件连同布莱克-斯科尔斯方程一起解价格函数计算的。例如，规定 $f(S,T)=S(T)$ 导出 $f(S,t)=S(t)$；规定 $f(S,T)=e^{rT}$ 导出 $f(S,t)=e^{rt}$。作为一个不平常的例子，不支付股息的股票欧式看涨期权的价格 $C(S,t)$ 一定满足布莱克-斯科尔斯方程（C 起 f 的作用）并且它一定满足边界条件： 353

$$C(0,t)=0 \tag{13—4}$$

$$C(S,T)=\max(S-K,\ 0) \tag{13—5}$$

同样，价格为 $P(S,t)$ 的欧式看跌期权的边界条件是：

$$P(\infty, t) = 0 \tag{13—6}$$

$$P(S, T) = \max(K-S, 0) \tag{13—7}$$

其他衍生证券可以有不同形式的边界条件，边界条件足以决定整个函数 $f(S, T)$。例如，除了上面提到过的条件外，没有股息支付的股票的美式看涨期权和美式看跌期权的边界条件还要求提前执行的可能性的条件。它们是：

$$C(S,t) \geqslant \max(0, S-K) \tag{13—8}$$

$$P(S,t) \geqslant \max(0, K-S) \tag{13—9}$$

当然，看涨期权附加的边界条件是不必要的，因为没有股息支付的股票的美式看涨期权决不会被提前执行。

例 13.1（永久看涨期权） 考虑执行价格为 K 的永久看涨期权。因为 $T=\infty$，所以没有最终边界条件。但是对所有时间 t，解 f 一定满足提前执行的条件 $f(S, t) \geqslant \max(0, S-K)$。此外，对所有时间 t，我们一定有 $f(S, t) \leqslant S$，因为看涨期权必须比证券本身花费的代价低。作为一个（告知的）猜测，我们可以试一试简单解 $f=S$。事实上，我们知道这个解满足布莱克-斯科尔斯方程，并且满足两个边界条件。

永久看涨期权的价值解 $f(S) = S$ 确实具有直观意义。如果该看涨期权被长期持有，股票价值将几乎确定地增加到很大的值，所以执行价格 K 与之相比微不足道。因此，如果我们拥有这个看涨期权，今后能基本上免费获得这个股票，如果我们开始购买了这种股票，复制将拥有的头寸。

Black-Scholes 方程的证明*

我们怎样推导布莱克-斯科尔斯方程呢？关键思想与第 12 章推导二项式网格定价模型的思想是一样的。在任一时间，我们构造一个股票和债券的组合，使这个组合恰好匹配衍生证券的（瞬时）回报特征。这个组合的价值一定等于衍生证券的价值。在二项式网格框架中，是一期一期逐期匹配，将

一个时点的价值与下一个时点的价值联系起来。在连续时间框架中，是每个瞬间匹配，将一个时间的价值与该时间的变化率联系起来。两种情况都使用了复制策略。这里给出证明。

证明：利用伊藤引理（方程（11—22）），我们有： 354

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt+\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\,dz \qquad (13—10)$$

它是衍生证券价格的伊藤过程。这个价格随股票价格 S 和布朗运动 z 而随机地波动。

我们建立一个复制衍生证券行为 S 和 B 的组合。特别地，在每个时间 t，我们选择数量为 x_t 的股票和数量为 y_t 的债券，产生的总组合价值是$G(t)=x_tS(t)+y_tB(t)$。我们希望选择 x_t 和 y_t 来复制衍生证券的价值$f(S, t)$。因证券价格（投资回报）变化引起的组合价值的瞬时回报是：

$$dG=x_t dS+y_t dB \qquad (13—11)$$

我们将其展开，写成：

$$\begin{aligned} dG &=x_t dS+y_t dB \\ &=x_t\{\mu S dt+\sigma S dz\}+y_t rB dt \\ &=(x_t\mu S+y_t rB)dt+x_t\sigma S dz \end{aligned} \qquad (13—12)$$

因为我们需要组合的回报 $G(t)$ 刚好与 f 的回报的表现一样，将式（13—12）中 dt 和 dz 的系数与式（13—10）的系数匹配。为此，我们首先匹配 dz 的系数，规定：

$$x_t=\frac{\partial f}{\partial S} \qquad (13—13)$$

要求 $G=x_tS+y_tB$ 和$G=f$，得出：

$$y_t=\frac{1}{B}\left[f(S,t)-S\frac{\partial f}{\partial S}\right]$$

将这些表达式代入式(13—12)，并匹配式(13—10)中 dt 的系数，我们得到：

$$\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{1}{B}\left[f(S,t)-S\frac{\partial f}{\partial S}\right]rB=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

或者，最后有[1]：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}rS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2=rf \tag{13—14}$$

355 这是布莱克-斯科尔斯方程。（基于二项式定价框架的另一种证明，参见本章附录。在那个证明中包括了现金流费用发生在中间时间的情况。）

13.3 看涨期权公式

虽然通常情况下，求得布莱克-斯科尔斯方程的解析解是不可能的，但是对欧式看涨期权求得解析解是可能的。这个解析解具有巨大的理论和实用价值。

看涨期权公式利用了**标准累积正态概率分布（cumulative normal probability distribution）**函数 $N(x)$。它是均值为 0，方差为 1 的正态随机变量累积分布，可以表示为：

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\mathrm{d}y \tag{13—15}$$

函数 $N(x)$ 描述见图 13—1。函数 $N(x)$ 的值位于 $-\infty$ 到 x 之间的熟悉的钟形曲线上。特殊值是 $N(-\infty)=0$、$N(0)=\frac{1}{2}$、$N(\infty)=1$。

函数 $N(x)$ 不能表示成封闭形式，但存在函数值表，而且存在精确的近似公式。（见练习 1。）

布莱克-斯科尔斯看涨期权公式 *考虑一个执行价格为 K，到期时间为 T 的欧式看涨期权。如果标的股票在时间 $[0, T]$ 不支付股息，并且利率以常数 r 连续复利，那么布莱克-斯科尔斯方程的解是 $f(S, t)=C(S, t)$，由如下方程决定：*

$$C(S, t)=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{13—16}$$

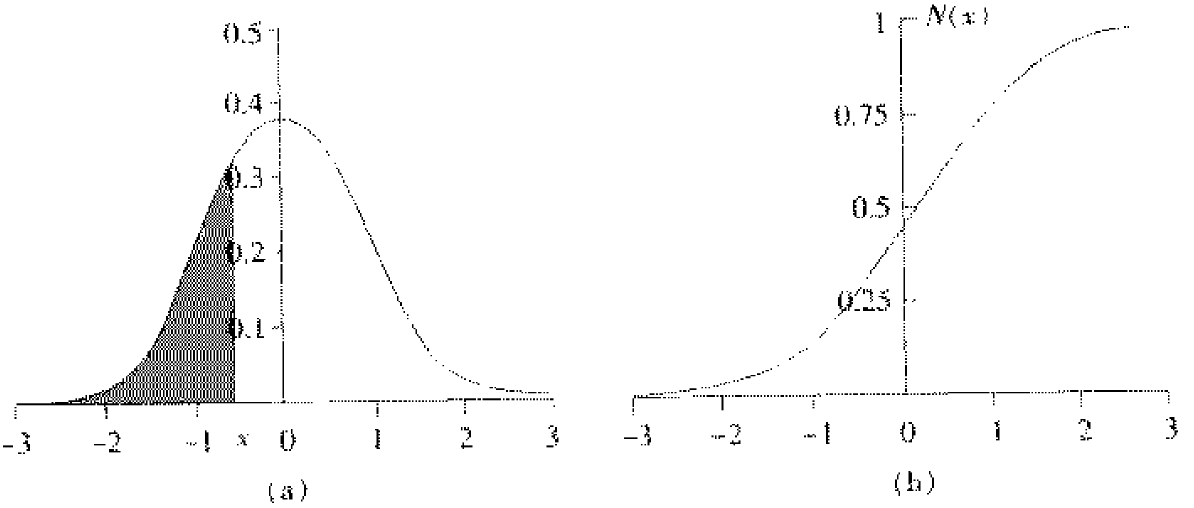


图 13—1 正态密度和累积分布

(a) 这个曲线是正态密度 $(1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$，曲线下面直到 x 的区域给出了累积分布 $N(x)$ 的值。(b) 累积分布本身平稳地从 0 上升到 1，但它没有封闭表达式。

这里 356

$$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2=\frac{\ln(S/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

这里 $N(x)$ 表示标准累积正态概率分布。

让我们考察一些特例。首先假定 $t=T$（这意味着期权处于到期日），那么有：

$$d_1=d_2=\begin{cases}+\infty, 如果\ S>K\\ -\infty, 如果\ S<K\end{cases}$$

因为 d 仅仅取决于 $\ln(S/K)$ 的符号。因此，既然 $N(\infty)=1$，$N(-\infty)=0$，我们求得：

$$C(S, T)=\begin{cases}S-K，如果\ S>K\\ 0，如果\ S<K\end{cases}$$

这和 T 时间的已知价值一致。

然后我们考虑 $T=\infty$，那么 $d_1=\infty$ 且 $e^{-r(T-t)}=0$。因此，$C(S,\infty)=S$，它与前面永久看涨期权推导的结果是一致的。

例 13.2（5 个月的期权） 让我们计算第 12 章例 12.3 考虑的相同期权的价值。那是一个现在价格为 62 美元、每年波动 20%的股票的 5 个月看涨期权。执行价格为 60 美元，利率为 10%。用 $S=62$、$K=60$、$\sigma=20\%$ 和 $r=10\%$，我们求得：

$$d_1=\frac{\ln(62/60)+0.12\times5/12}{0.20\sqrt{5/12}}=0.641\ 287$$

$$d_2=d_1-0.2\sqrt{5/12}=0.512\ 188$$

相应的累积正态分布值用练习 1 的近似方法求得：

$N(d_1)=0.739\ 332$，$N(d_2)=0.695\ 740$。

因此，该看涨期权的价值是：

$C=62\times0.739\ 332-60\times0.959\ 18\times0.695\ 740=5.798$ 美元

这个价值与二项式网格求得的 5.85 美元的价值很接近。

虽然存在不支付股息的股票的看涨期权公式，但其他期权包括美式看跌期权一般不存在类似的公式。布莱克－斯科尔斯方程在加入相应的边界条件后，不可能求得解析解。

13.4 风险中性定价*

357 在二项式网格框架下，期权和其他衍生证券的定价被简明地表示为贴现的风险中性价值。这个概念在伊藤过程框架仍然起作用。

对几何布朗运动股票价格过程：

$$dS(t)=\mu S dt+\sigma S dz \tag{13—17}$$

我们从 11.7 节知道：

$$E[S(t)]=S(0)e^{\mu\cdot t} \tag{13—18}$$

在风险中性背景下，时间 0 时的股票价格从时间 t 时的股票价格以无风险利率贴现风险中性期望值而求得。这意味着一定有：

$$S(0)=e^{-rt}\hat{E}[S(t)]$$

显然，如果 $\hat{E}[S(t)]=S(0)\ e^{rt}$，那么这个公式一定成立。从式（13—17）和式（13—18）知道，如果定义如下过程，其期望也将满足这个关系：

$$\mathrm{d}S=rS\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}\hat{z} \tag{13—19}$$

这里 $\hat{z}$ 是标准维纳过程，并且我们定义 $\hat{E}$ 为关于过程 $\hat{z}$ 的期望。换句话说，从利率 μ 开始的对数正态伊藤过程，通过构造类似的过程但利率为 r，我们获得等价的风险中性过程。

这个方程的变化类似于股票价格过程的两个二项式网格：一个网格是实际价格过程而另一个网格是风险中性价格过程。在第一个网格中，上行运动和下行运动的概率分别是 p 和 $1-p$。在风险中性网格中，各节点的股票价格数值与第一个网格节点的股票价格数值是一样的，但上行运动和下行运动的概率变成 q 和 $1-q$。对伊藤过程，我们有两个过程— 像两个网格一样。因为概率结构是不同的，所以我们用 z 和 $\hat{z}$ 加以区别。

一旦规定了风险中性概率结构，我们就能应用风险中性定价方法给任何证券（S 的衍生证券）定价。特别地，看涨期权的定价公式是：

$$C=e^{-rT}\hat{E}\{\max[S(T)-K,0]\} \tag{13—20}$$

这与第 12 章的式（12—13）类似。

我们知道满足式（13—19）的风险中性分布 $S(T)$ 是均值为 $E\{\ln[S(T)/S(0)]\}=rT-\frac{1}{2}\sigma^2T$ 和方差为 $\mathrm{var}\{\ln[S(T)/S(0)]\}=\sigma^2T$ 的对数正态分布。我们能够利用这个分布以解析式求指定的期望值。这个结果将与看涨期权的布莱克－斯科尔斯方程给出的价值相同。具体地，写出对数正态分布的细节，我们有：

$$C=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}}\int_{\ln K}^{\infty}(e^x-K)e^{-[x-\ln S(0)-rT+\sigma^2T/2]^2/(2\sigma^2T)}\mathrm{d}x \tag{13—21}$$

这是布莱克－斯科尔斯方程的积分形式。

358

13.5 得尔塔

在任何确定的时间，衍生证券的价值是标的资产价格的函数。这个函数对标的资产价格变化的敏感性用数量得尔塔（Δ）描述。如果衍生证券的价值是 $f(S, t)$，那么正式地有：

$$\Delta=\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}$$

得尔塔经常地被表示成近似形式：

$$\Delta=\frac{\Delta f}{\Delta S}$$

图 13—2 描述的是看涨期权的得尔塔。它是联系期权价格和股票价格曲线的斜率。

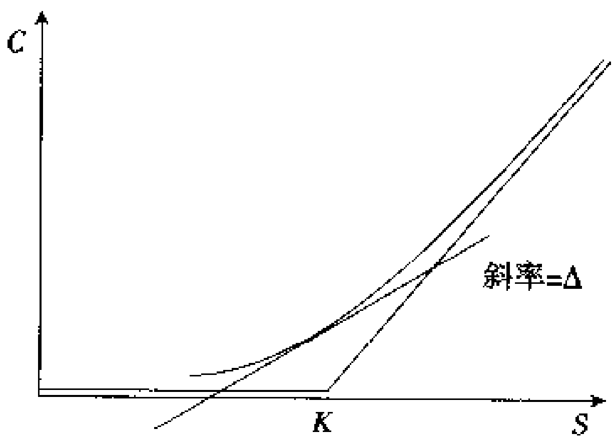


图 13—2 看涨期权的得尔塔

得尔塔度量期权价值对标的证券价格变化的敏感性。

得尔塔可以用于构造风险套期组合。作为一个例子，假定期权交易者相信某看涨期权定价过高。交易者希望开立（也就是卖出）这种期权，持有很

大头寸（负的）的这种看涨期权。可是，这么做将使交易者面临巨大的价格风险。万一标的股票价格上升，即使他相对于现在的股票价格对期权价值的评估很有根据，交易者都将在期权上亏损。交易者可能不希望对股票本身投机，只不过为了从期权定价过高的信念中谋得利润。交易者能够通过同时购买股票本身以抵消期权出售的后果而中和股票价格波动的影响。购买股票合适的数量是得尔塔乘以卖出的期权价值。因此，要是股票价格上升 1 美元，交易者持有股票的利润将抵消期权的损失。

看涨期权的得尔塔可以从布莱克－斯科尔斯方程中求得：

$$\Delta=N(d_1) \tag{13—22}$$

这个明确的公式可以在应用看涨期权时实施得尔塔套期策略。

一般地，给定一个证券组合，所有元素都是普通标的资产的衍生证券，我们求出的**组合得尔塔**（**portfolio delta**）是组合中每个元素的得尔塔的和。 359
不希望在标的资产价格上投机的交易者将建立一个**得尔塔中性**（**dalta neutral**）的证券组合，这意味着总的得尔塔等于 0。在前面交易者的情况下，证券组合的价值是$-C+\Delta\times S$。因为 S 的得尔塔是 1，所以这个套期组合的总的得尔塔是$-\Delta+\Delta=0$。

得尔塔本身随着 S 和 t 发生变化。因此，得尔塔中性的证券组合在开始时不会保持中性。所以有必要改变组合中各证券的比例，**再平衡**（**rebalance**）组合以保持组合的得尔塔中性。这个过程构成了**动态套期策略**（**dynamic hedging strategy**）。虽然实际上再平衡只是周期性地实施，或在组合得尔塔已从 0 有相当大偏离时实施，但理论上，再平衡应该连续进行。

再平衡的数量与另一个被称为伽马（Γ）的常数有关。伽马被定义为：

$$\Gamma=\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}$$

伽马定义了衍生证券价格曲线的曲率。在图 13－2 中，伽马是期权价格曲线上该点的二阶导数。

另一个有用的数是西塔（Θ）。西塔被定义为：

$$\Theta=\frac{\partial f(S,t)}{\partial t}$$

西塔度量衍生证券价值的时间变化。再次看图 13—2，如果时间增加，期权曲线将向右移动。西塔度量这种移动量。

这些参数足以估计在一个小的时期内衍生证券价值的变化，因此这些参数可以用来定义合适的套期策略。特别地，用 $\delta\cdot f$、$\delta\cdot S$ 和 $\delta\cdot t$ 表示 f、S 和 t 的小变化，我们有：

$$\delta\cdot f\approx\Delta\cdot\delta\cdot S+\frac{1}{2}\Gamma\times(\delta\cdot S)^2+\Theta\times\delta\cdot t$$

作为 $\delta\cdot f$ 的一阶近似。[2]

例 13.3（看涨期权价格估计） 考虑一个看涨期权，其中 $S=43$，$K=40$，$\sigma=0.20$，$r=0.10$，到期时间 $T-t=6$ 个月 $=0.5$ 年。从布莱克－斯科尔斯方程求得 $C=5.56$ 美元。我们也可以计算出 $\Delta=0.825$、$\Gamma=0.143$ 和 $\Theta=-6.127$。（见练习 7。）

现在假定 2 周后股票价格上升到 44 美元。我们有 $\delta S=1$ 和 $\delta\cdot t=1/26$。因此那时看涨期权的价格近似为：

$$C\approx5.56+\Delta\times1+\frac{1}{2}\Gamma\times(1)^2+\Theta\times(1/26)=6.22\text{ 美元。}$$

根据布莱克－斯科尔斯方程计算后来日子看涨期权的实际价值是 $C=6.23$ 美元。

360
13.6 复制、综合期权和组合保险*

布莱克－斯科尔斯方程的推导表明：衍生证券可以通过构造由标的证券和无风险资产组成的适当组合来**复制（replicates）**。我们说这个组合复制该衍生证券。组合中股票和无风险资产的比例必须随时间连续不断地调整，但是不需要增加额外的资金投入也没有提走任何资金，这个组合称为**自融资的**

(Self-financing)。为了用标的股票和无风险资产构造一个综合的 (Synthetic) 衍生证券，实践中能够实施这种复制。当然，要求的构造是动态的，因为特定的组合必须每期发生变化（或在布莱克－斯科尔斯框架环境连续地发生变化）。

看涨期权的这种过程是：在初始时间，计算理论价格 C。将资金量 C 专用于复制组合。这个组合应该有部分投资于股票，其余部分投资于无风险资产（虽然通常将要求借入，而不是借出）。因此，得尔塔和组合的价值将与期权的得尔塔和价值相匹配。事实上，这两个资产的短期行为将匹配。

一段短时间后，得尔塔不同了，组合必须重新平衡。但是，组合的价值将近似地等于期权的相应的新价值，所以继续持有一份期权的等价资产是可能的。这种再平衡经常地被重复进行。随着（综合）期权到期日的临近，如果股票价格高于 K，组合将主要由股票组成，否则，组合的价值将趋近于 0。

例 13.4（复制实验） 让我们实验性地构造一个执行价格为 35 美元、生命期为 20 周的埃克森公司股票的综合看涨期权。我们将通过购买埃克森公司股票和出售（也就是借入）无风险资产复制这个期权。为了在实验中利用实际数据，我们选择了 1983 年 5 月 11 日到 9 月 21 日的 20 周时间。埃克森公司股票（股票代码为 XON）实际的每周收盘价格显示在表 13—1 的第二列。估测到的对应于这个时期的 $\sigma=18\%$（以年为基准），所以我们将利用这个值计算看涨期权价格和得尔塔的理论值。我们假想一个 10%的利率。

首先让我们看表的第一行。期权还有 20 周的生命期。最初的股票价格是 35.50 美元。第三列显示看涨期权的初始价值（与布莱克－斯科尔斯方程计算的那样）是 2.62 美元。同样，计算的得尔塔的初始值是 0.701。为了构造复制组合，我们将 2.62 美元的价值配置于复制组合，与看涨期权的初始价值匹配。它显示在标注有“组合价值”的那一列。这个组合由两部分组成，显示在下面两列。配置于埃克森公司股票的价值是 24.89 美元，它是得尔塔乘以现在的股票价值。其余部分 2.62－24.89＝－22.27 美元配置于无

风险资产。换句话说，我们借入 22.27 美元再加 2.62 美元，用 24.89 美元的总资金投资于埃克森公司股票。

361 表 13—1 期权复制实验

剩余的周数	埃克森股票价格	看涨期权价格	Δ	组合价值	股票组合	债券组合
20	35.50	2.62	0.701	2.62	24.89	−22.27
19	34.63	1.96	0.615	1.96	21.28	−19.32
18	33.75	1.40	0.515	1.39	17.37	−15.98
17	34.75	1.89	0.618	1.87	21.47	−19.59
16	33.75	1.25	0.498	1.22	16.79	−15.58
15	33.00	0.85	0.397	0.81	13.09	−12.28
14	33.88	1.17	0.494	1.14	16.74	−15.60
13	34.50	1.42	0.565	1.41	19.48	−18.07
12	33.75	0.96	0.456	0.96	15.39	−14.43
11	34.75	1.40	0.583	1.38	20.27	−18.89
10	34.38	1.10	0.522	1.13	17.94	−16.81
9	35.13	1.44	0.624	1.49	21.92	−20.43
8	36.00	1.94	0.743	2.00	26.74	−24.75
7	37.00	2.65	0.860	2.69	31.80	−29.11
6	36.88	2.44	0.858	2.53	31.65	−29.12
5	38.75	4.10	0.979	4.08	37.92	−33.84
4	37.88	3.17	0.961	3.16	36.39	−33.23
3	38.00	3.21	0.980	3.22	37.25	−34.03
2	38.63	3.76	0.998	3.76	38.56	−34.79
1	38.50	3.57	1.000	3.57	38.50	−34.93
0	37.50	2.50		2.50		

执行价格为 35 美元、还有 20 周到期的 XON 股票的看涨期权通过购买 XON 公司股票和以 10% 的利率出售无风险资产而被复制。该组合将根据当时的 Δ 值每周作出调整。当波动率设定在 18%（当期实际值）时，组合价值近似地匹配布莱克－斯科尔斯公式看涨期权的价值。

现在看第二行，计算方法稍有不同。前面四个值表示还剩 19 周，股票的新价格是 34.63 美元，对应的布莱克－斯科尔斯期权价格是 1.96 美元，

而得尔塔值是 0.615。下一个值，"组合价值"，是更新上一行的值得到的。前面的股票购买价 24.89 美元现在值是（34.63/35.50）×24.89=24.28 美元。22.27 美元的债务现在是（1+0.10/52）×22.27=22.31 美元。因此，我们上周构造的组合的新价值现在是 24.28−22.31=1.96 美元（调整表中四舍五入误差）。这个新价值并没有恰好与现在的看涨期权价值一致（虽然在这种情况下，在显示的两位小数内碰巧一致）。我们没有从组合价值中增加资金也没有提走资金。可是，我们通过配置 21.28 美元于股票（等于得尔塔值乘以股票价格），并借入 19.32 美元，使得净组合价值保持在 1.96 美元。

接下来的各行是按同样的方法计算的。在每一步，更新的组合价值可能没有与当前的看涨期权价值恰好一致，但趋向于很接近，这可以通过浏览表中的下面各行并比较看涨期权和组合的价值看出来。最大的差额是 11 美分。这个例子中，在 20 周结束时，组合价值恰好等于（误差在 1 美分的范围内） 362
看涨期权的价值。

这些结果依赖于假想的波动率值。选择 $\sigma=18\%$代表 20 周时间里的实际波动率，并且这个选择导出了很好的结果。期权到期日前，埃克森公司股票价格较长期数据的研究表明：波动率更典型地是 20%。如果用这个值构造表 13—1，推导出的最终组合价值将是 2.66 美元而不是 2.50 美元。如果应用 $\sigma=15\%$，最终的组合价值将是 2.27 美元。

匹配程度还将受交易成本的影响。埃克森看涨期权实验假定交易成本是 0，而且股票可以任何小数量购买。实际上，这些假设没有完全满足。但对大交易量——可能典型地是机构交易，与这些假设的背离程度足够小使得复制事实上是可行的。

例 13.5（组合保险） 许多有大规模股票组合的机构对重大的市场下降趋势的风险保险感兴趣。如果它们能够购买看跌期权，看跌期权给予它们按规定的执行价格 K 出售它们的组合的权利，它们就能够保护它们的组合的价值。

主要的股票价格指数的看跌期权是可获得的，如标准普尔 500，因此获得保护的一种方法是购买指数看跌期权。但是，特定的证券组合可能与指数并不紧密地匹配，因此保护将不完全。

另一种方法是用组合中现实的股票和无风险资产构造一个综合看跌期权。因为看跌期权的得尔塔值是负的，所以构造看跌期权要求股票空头和无风险资产多头。因此，组合中的某些证券将被售出，如果市场行情上升，以后再将这些股票买回。这种策略有破坏原来的组合和导致交易成本的缺陷。

第三种方法是用组合中持有的股票期货而不是股票本身构造综合看跌期权。为了实施这种策略，我们将计算要求的看跌期权的总价值和持有得尔塔乘以这个数量的期货多头。（因为 $\Delta<0$，我们实际上将卖空期货。）卖空股票的价值与看跌期权价值的差额配置于无风险资产。正像前面例子一样，这个头寸必须随着得尔塔值的变化周期性地调整。这种方法被称为**组合保险（portfolio insurance）**。直到 1987 年 10 月，美国股票市场大幅下滑前，这种方法在投机机构（如养老基金）中相当流行，由于不可能通过套期规则出售要求数量的期货，导致保护失败和组合价值的实际损失。

13.7 计算方法

这一章提出的理论可以几种方式转化为计算方法。这一节将简要概括其中的一些方法。

363 **蒙特卡罗模拟**

蒙特卡罗模拟（Monte Carlo Simulation）是期权价值计算中最强有力的和最容易实施的方法之一。但是，这种程序只对到期前不作出任何决策的欧式期权有用。假定某衍生证券在最终时间有回报 $f(S(t))$，并假定股票价格 $S(t)$ 由下面的几何布朗运动决定：

$$dS=\mu S dt+\sigma S dz$$

这里 z 是标准化维纳过程。蒙特卡罗方法的基础是风险中性定价公式，它规定衍生证券的初始价格应当是：

$$P=e^{-rT}\hat{E}[f(S(t))]$$

为通过蒙特卡罗模拟估量右边的价值，无风险世界的随机股票动态方程为：

$$dS=rS dt+\sigma S d\hat{z}$$

是将整个时间间隔 $[0, T]$ 划分为许多长度为 Δt 的时期进行模拟的。这个模拟方程是：

$$S(t_k+\Delta t)=S(t_k)+rS(t_k)\Delta t+\sigma S(t_k)\varepsilon(t_k)$$

这里 $\varepsilon(t_k)$ 是由根据均值为 0、方差为 Δt 的正态分布产生数字的随机数发生器选择的。（或者用 11.7 节的倍数模型）每次模拟后，计算 $f(S(t))$ 的值。衍生证券真实的理论价格的估计值 $\hat{P}$ 是由下面的公式求得的：

$$\hat{P}=e^{-rT}\text{average}[f(S(T))]$$

这里平均值 average 是对所有模拟试验求平均值。

这个方法的缺点是适当的精确度要求极大数量的模拟次数。一般地，预期的误差随试验次数 n 通过因数 $1/\sqrt{n}$ 减少，所以增加一位数的精确度要求 100 倍的模拟试验。通常获得两位小数的精确度要求几万个试验。

例 13.6（5 个月的看涨期权） 因为看涨期权可用更好的方法，所以没有必要进行模拟，但是前面已经解决的例 13.2，提供了模拟方法的简单描述。对这个看涨期权：$S(0)=62$，$K=60$，$\sigma=20\%$，$r=12\%$。到期时间为 5 个月。

为实施模拟，5 个月的时期被分成 80 个相等的时间间隔。股票动态由如下模型表示：

$$S(t+\Delta t)=S(t)+rS(t)\Delta t+\sigma S(t)\varepsilon(t)\sqrt{\Delta t}$$

这里 $\varepsilon(t)$ 是从均值为 0、方差为 1 的正态分布随机地选择的。 364

每次模拟试验之后，看涨期权的最终价值 max($S-K$，0) 是以最后的股票价格为基础决定的，并且这个价值被贴现到初始时间。当作出连续滑动时，这些贴现值的滑动平均值被记录下来。图 13—3 显示了作为总试验次数的函数获得的贴现价值的图像。合理的精确度和稳定的结果要求大约25 000次模拟试验。从图形我们可以推断看涨期权的价格大约是 5.80 美元加上或减去大约 10 美分。事实上，布莱克－斯科尔斯公式计算的价值是 5.80 美元。

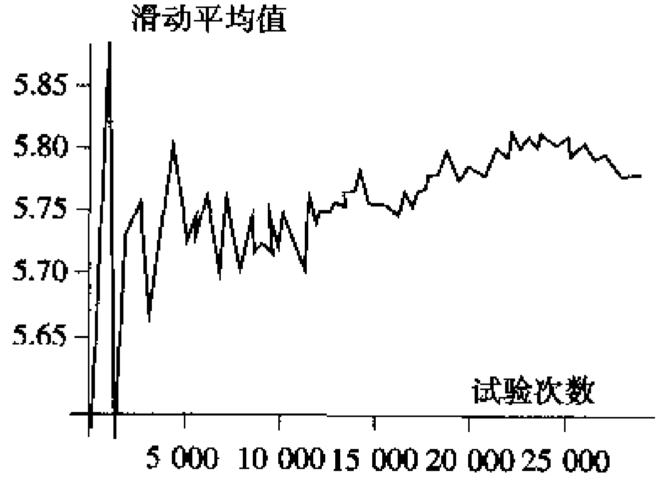


图 13—3 看涨期权的蒙特卡罗模拟

当模拟由风险中性过程决定时，看涨期权的价值估计为最终回报的贴现平均值。这种方法容易实施，但合理的精确度要求大量的试验次数。

利用各种方差减少技术能够改善模拟效果，两种最普通的方差减少技术是控制**变量**方法 (**control variable method**) 和对**偶变量方法** (**antithetic variable method**)。(见练习 9。)

虽然按上机时间看，用蒙特卡罗方法相当昂贵，但事实上这种方法常常用于估计没有解析解的欧式衍生证券的价值。这种方法具有易于编制程序和灵活性高的优势，并且十分合理地简单明了。

有限差分方法

布莱克－斯科尔斯偏微分方程的数值解法是期权价格计算的第二种方

法。在这种方法中，要建立一个巨大的矩形格栅，图 13—4 显示的是小矩形格栅。在这个格栅中，水平轴表示时间 t 而纵轴表示价格 S。水平轴上相邻两点的时间差是 Δt，而纵轴上相邻两点的价格差是 ΔS。函数 $f(S, t)$ 定义在所有格栅点上。如果格栅上的 S 值用 i 编排，而时间 t 值用 j 编排，那么函数在格栅点（i，j）的值用 $f_{i,j}$表示。

365

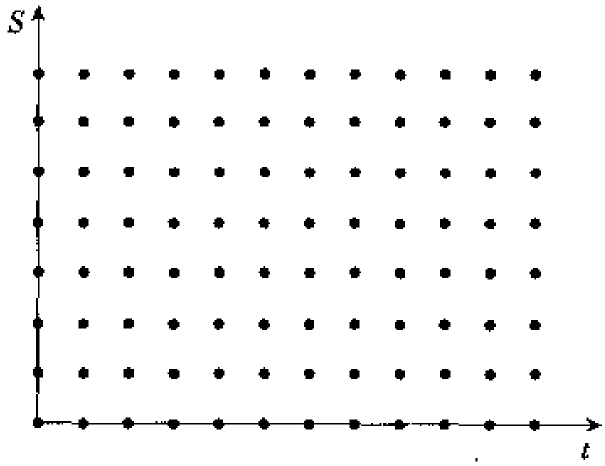


图 13—4　有限差分方法格栅

有限差分方法通过格栅各点价值的代数关系使布莱克－斯科尔斯方程取近似值。这种方法能够和处理欧式期权一样处理美式期权。

这种方法通过有限差分与偏导数的近似关系实施如下：

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j} - f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta S)^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta S)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t}$$

终点条件意味着 $f_{i,j}$在格栅的右边界是知道的。另外的边界条件可以依据特定的衍生证券来规定。例如，在看跌期权情况下，看跌期权的价值至少处处等于 $K-S$，并且因为当 $S \to \infty$ 时看跌期权的价值趋近于 0，我们可以规定上边界的价值等于 0。

当在布莱克－斯科尔斯方程中应用这些近似关系时，得到大量的代数方

程和不等式。通过格栅的右边向左边后推，可以系统地求解这些代数方程和不等式。事实上，这些方程与网格模型后推求解的方程是紧密相关的。

有限差分方法具有能够处理加入边界条件而不是终点条件的、与美式看跌期权一样的衍生证券的优势。但内在的缺陷是这些方程只是实际的偏微分方程的近似，因此，除了明显的近似误差外，这些解还要受不稳定性和不一致性的影响，这不是偏微分方程本身的特点（通常由隐含的概率为负而引起）。作为数值问题求解的一般规律，如果一个问题能用有限步近似解决，通常最好是用有限步的形式重新将问题本身公式化，然后直接解决这个问题，而不是用连续时间的方式将该问题公式化，然后用有限步的方法求该问题的近似解。就衍生证券而言，这意味着不是将布莱克－斯科尔斯公式作近似处理，可能最好是利用离散公式，如离散时间风险中性定价公式或者二项
366 式网格公式。这些离散公式将引入近似误差，但不会引起数值的不稳定性。尽管有这些不足，但如果谨慎设计，有限差分方法在衍生证券的数值估价中确实具有有益的作用。

二项式和三项式网格

12.6 节的二项式网格方法是求衍生证券价值的流行方法。这种方法简单明了，并且推出了合情合理的精确结果，即使时间划分粗糙（比如，将剩下的时间间隔划分为 10 个时期）。应用其他的树形结构和网格结构也是可能的。例如，应用三项式网格就是一个好的选择，如图 13—5。对给定数目的时期，三项式网格比二项式网格有更多的节点，因此能产生更好的接近于连续时间结果的近似解。

起初，三项式网格看起来不能替代二项式网格，因为仅仅用两种证券（股票和无风险资产）是不可能替代三种可能结果的。这是对的，复制是不可能的。因此，三项式网格不能作为期权理论的基础。但是，一旦期权理论用其他方法（如布莱克－斯科尔斯方法）推导，我们就能找到替代方法实施。三项式网格是实施风险中性定价公式的方便结构。

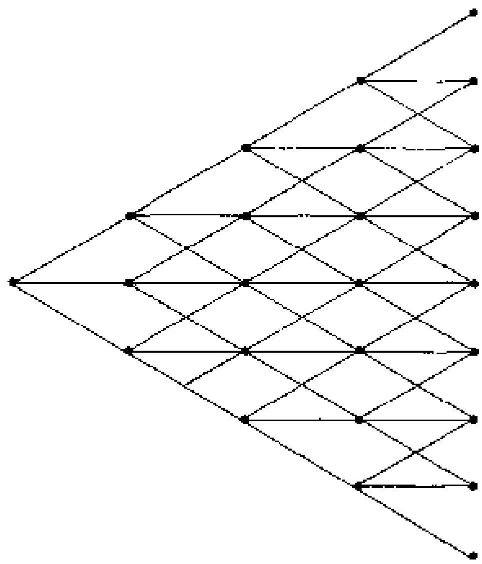


图 13—5 三项式网格

三项式网格能比同样步数的二项式网格给出更精确的表述。

为建立适当的三项式网格，要参考图 13—6 显示的三项式网格的一节。从一个节点出发，有三个路径，概率分别为 p_1、p_2 和 p_3。三个导出的节点分别表示股票价值的 u、1 和 d 倍，这里我们设定 $d=1/u$，所以一个上行运动接着一个下行运动的倍数等于 1。

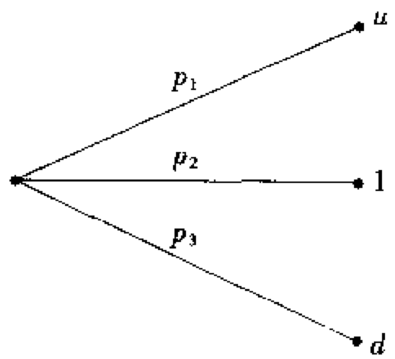


图 13—6 三项式网格的一节

在这个网格中，我们必须有 $d=1/u$，因此两步后节点能够重合。

为规定三项式网格的参数，我们任意选择一个 u 值。因此，如果一步的均值为 $1+\mu\Delta t$ 而方差为 $\sigma^2\Delta t$，我们选择概率满足如下方程： 367

$$p_1+p_2+p_3=1$$

$$up_1+p_2+dp_3=1+\mu\Delta t \tag{13—23}$$

$$u^2p_1+p_2+d^2p_3=\sigma^2\Delta t+(1+\mu\Delta t)^2$$

（最后一行表示 $E(x^2)=\text{var}(x)=E(x)^2$，这里 x 是一个时期里与股票价格相乘的随机因子。）这只是求三个概率的线性方程组。一旦概率被求出，我们就得到标的股票价格动态的很好的近似。（注意，我们含蓄地应用了式（11—19）的动态方程。）

为了用这个网格定价，我们必须用风险中性概率 q_1、q_2 和 q_3 取代 p_1、p_2 和 p_3。这是通过解和式（13—23）同样的方程组而求得的，但是均值由 $\mu\Delta t$ 变为 $r\Delta t$。一旦风险中性概率被求出，这个网格就可以像二项式网格程序一样向后推求解。

例 13.7（5 个月的看涨期权） 只是为了比较计算结果，让我们用三项式网格求例 12.3 中 5 个月看涨期权的价格。我们有 $S(0)=62$ 美元、$K=60$ 美元、$r=10\%$ 和 $\sigma=20\%$。到期时间是 5 个月 $=0.416\ 667$ 年。为建立网格，我们必须选择 u 值，并解方程组（13—23）求出概率（当设定 $\mu=r$ 时）。u 的选择要求作些试验，因为对某些值推导出的风险中性概率可能不是正的。例如，取 $u=1.06$，推出 $q_1=0.57$、$q_2=-0.03$ 和 $q_3=0.46$。取而代之，我们取 $u=1.103\ 127\ 7$ 推出 $q_1=0.209\ 47$、$q_2=0.648\ 96$ 和 $q_3=0.141\ 56$。这样推出了图 13—7 显示的网格。注意到获得的期权价值是 5.83 美元，比二项式网格[4]决定的 5.85 美元稍微接近布莱克－斯科尔斯方程推出的结果 5.80 美元一点。

图 13—7 的网格股票价值标在每个节点的上面，而期权价值标在每个节点的下面。最后的期权价值刚好是 $\max(0, S-K)$。其他节点的期权价值是
368 用风险中性定价贴现而求得的。例如，4 个月后上面节点的价值是 $(1+0.10/12)^{-1}(q_1\times41.28+q_2\times31.81+q_3\times23.23)=32.31$。如果这个计算中利用的是股票价值 101.28、91.81 和 83.23 而不是期权价值，那么计算的结果就是股票价值 91.81，当然求股票价格没有必要用这种后推程序。

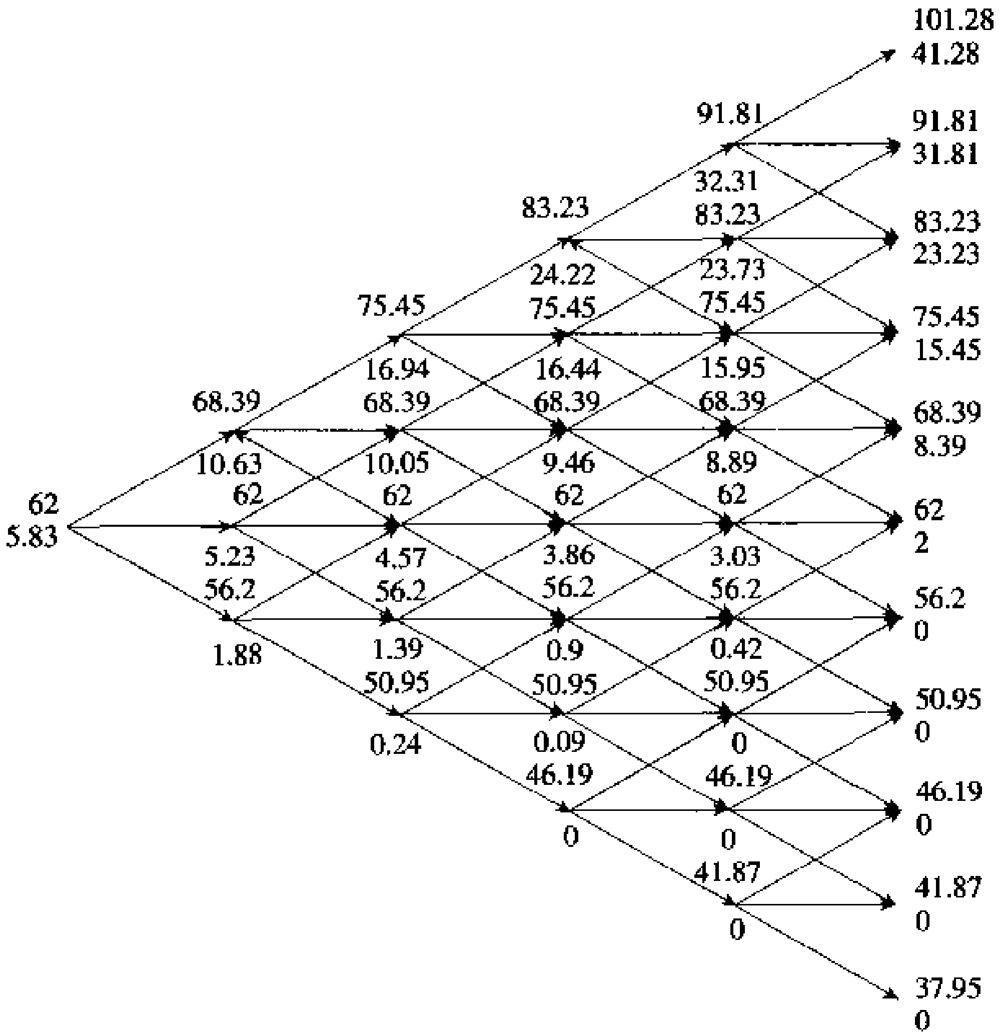


图 13—7　用三项式网格的 5 个月看涨期权

股票价格列在节点的上方，而期权价值列在节点下方。贴现的风险中性价值很容易推广到三项式网格。

13.8　特异性期权

在期权的基础设计中已经出现许多变化。每种变化为某些特定的投资团体觉察到的风险提供了有效的控制手段，或者便于执行和簿记。我们这里列举其中的一些变化：

1. 百慕大期权 在这种期权中，允许的执行日期是有限制的，有些情况下限定具体的日期，而另一些情况下限定期权生命期内具体的一段时期。股票授权常常具有这种特征。

369 **2. 远期启动期权** 这是在一个日子收款，而到以后的一个日子才开始的期权。

3. 复合期权 复合期权是期权的期权。

4. "只要你喜欢"或"选择者"期权 "只要你喜欢"期权的持有者在规定的时间后，能够宣布该期权或者是看涨期权或者是看跌期权。

5. 帽子期权 这些期权限制期权持有者赚取的利润量，一旦利润达到规定水平，期权持有者自动执行期权。一个看涨期权的20美元的帽子期权，意味着一旦股票价格上升到超过执行价格20美元，期权就被执行。

6. 跳跃期权 这个术语表示"长期股票期望证券"。它们是长期的、交易所交易的、远到3年后的将来执行的期权。

7. 数字期权 在数字期权中，如果期权处于实值状态，回报是1美元，否则回报等于0。例如，如果 $S(T)>K$，欧式数字看涨期权的回报为1，如果 $S(T)<K$，则回报为0，这里 K 是执行价格。

8. 交换期权 这种期权给予某人用一种规定的资产交换另一种资产的权利。

9. 收益基准期权 债券的收益基准期权根据收益而不是价格定义执行价值。因此，如果债券价格下降（decrease），收益基准看涨期权的持有者获益，因为收益变化的方向与价格变化方向相反。

10. 交叉比率期权 这是用另一种外国货币表示的外币期权。例如，执行价格为日元标价的德国马克看涨期权。

11. 敲出期权 一旦标的资产价格达到规定点，这些期权终止（0值）。对看涨期权，这些期权是"下跌和出局"期权，一旦标的资产价格下跌到规定水平以下，期权就终止。对看跌期权，类似的敲出期权是"上升和出局"期权。

12. 非连续期权　这些期权的回报是标的资产价格的非连续函数。例如，一个看涨期权可以支付 0 或者 20 美元，取决于标的资产的最后价格是低于还是高于规定的执行价格。

13. 回望期权　在回望期权中，有效的执行价格不是被指定的，而是由期权有效期内标的资产价格的最小值（在看涨期权情况下）或最大值（在看跌期权情况下）决定。例如，欧式回望看涨期权的回报等于 $\max(S_T-S_{min}, 0)=S_T-S_{min}$，这里 S_{min}是标的资产价格 S 从开始时间到终止时间 T 的最小值。这种期权对投资者很有吸引力，因为事实上它们总是具有正的价值（除非 $S_T=S_{min}$）。当然它们的价格反映了明显的吸引力。

14. 亚洲期权　亚洲期权的回报取决于期权有效期内标的资产的平均价格 S_{avg}。基本上有两种方式可以使用平均价格。一种方式是，S_{avg}作为执行价格，比如，相应的看涨期权的回报是 $\max(S_T-S_{avg}, 0)$。第二种方式是，S_{avg}用最终价格代替。因此，相应的看涨期权的回报是 $\max(S_{avg}-K, 0)$，这里 K 是规定的执行价格。 370

定价★

这些期权变化中的一部分的价格能够用这一章提出的理论和方法以计算程序求出。在其他情况下，已经推出类似于布莱克－斯科尔斯方程的公式。但是，还存在给投资分析界提出严峻技术挑战的一些情况。

例 13.8（下跌和出局者） 考虑一个下跌和出局的不支付股息的股票看涨期权。这个期权的执行价格为 K，敲出价格 $N<K$。如果股票价格下降到低于 N，则期权终止于 0 价值。利用布莱克－斯科尔斯框架可以求出这种期权初始价值的封闭表达式，但是，详细情况并不简明。我们将考虑一个简化的情况，这里的期权是永久的（也就是说，$T=\infty$）但仍然有下跌和出局条款。

因为在永久期权中没有明确的时间依赖性，布莱克－斯科尔斯方程变成：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C''(S)+rSC'(S)-rC(S)=0 \qquad (13—24)$$

边界条件是：

$$C(N)=0$$

我们还知道当 $S\to\infty$时，$C(S)\approx S$。

为了解方程（13—24），让我们试一个形如 $C(S)=S^\alpha$ 的解。由此给出代数方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\alpha(\alpha-1)+r\alpha-r=0$$

这个方程有解 $\alpha=1$ 和 $\alpha=-\gamma$，其中 $\gamma=2r/\sigma^2$。我们可以将式（13—24）的一般解写成这两个解的线性组合，也就是：

$$C(S)=a_1 S+a_2 S^{\gamma}$$

利用边界条件，我们求得 $a_2=-a_1N^{\gamma+1}$。因此，$C(S)=a_1[S-N(S/N)^{-\gamma}]$。利用渐近性质，我们有 $a_1=1$。因此，最后结果是：

$$C(S)=S-N(S/N)^{-\gamma}$$

因为永久看涨期权的价值是 S，那么表达式中的第二项可以看成是下跌和出局特征的贴现。

371 回望期权和亚洲期权特别地有趣，因为它们的回报是**路径依赖（path dependent）**的；也就是说，它们的回报不仅仅取决于标的资产价格的最终价值，还取决于价格达到的方式。所以普通的二项式网格定价方法不适用。可是存在修正网格路径处理这些情况的方法，但如我们可能预期的那样，要求的计算量倾向于大大超过普通期权的计算量。

对路径依赖的欧式期权，蒙特卡罗方法提供了简单有效的程序。风险中性定价的原理仍然适用，所以才有必要利用标的资产价格波动的风险中性概率重复地模拟这个过程，并对模拟获得的回报求平均值。对这些路径依赖期权来说，降低要求的模拟次数的控制变量方法特别有用，一种对应的、非路径依赖的、容易求解的期权可以用作控制变量。（见练习 9。）

13.9　储存成本和股息*

商品储存成本和证券股息可能使定价过程复杂化，但是也存在一种容易处理的、比例成本或股息的重要的特殊情况。这种情况应用起来很实用，而且涉及的技巧的研究将进一步加深你对风险中性定价的理解。

二项式形式

假定商品价格 S 由上行因子为 u，下行因子为 d 的二项式过程决定。每期的储存成本是 cS，可以在每期期末支付。每期的总的无风险回报是 R。

如果你在某期期初投资于该商品，你必须按现在的价格 S 支付。到该期期末时，你收到减去储存成本的新商品。因此，你要么收到 $(u-c)S$，要么收到 $(d-c)S$。新因子 $u-c$ 和 $d-c$ 是规定持有商品结果的合理因子，因此这是能够用于复制论述的因子。它们分别满足上行和下行的风险中性概率：

$$q=\frac{R-d+c}{u-d},\ 1-q=\frac{u-c-R}{u-d}$$

（为避免套利机会，我们必须有 $u-c>R>d-c$。）这些风险中性概率将被用于给商品衍生证券或风险定价。

例 13.9（外币看跌期权） 史密斯先生，一个成功但谨慎的美国商人，已经出售了一种产品给德国公司，并且他将于 6 个月后收到 100 万德国马克的付款。现在的汇率 M 是每德国马克兑换 0.625 美元。为了保护这笔预期付款的价值，史密斯先生正在考虑购买执行价格为每德国马克兑换 0.60 美元的 6 个月的 100 万德国马克看跌期权。史密斯先生要计算这种看跌期权的公平价值，以弄明白市场价格是否合理。 372

为做好计算，史密斯先生注意到美元利率是 5%，而德国马克利率是 8%。挂牌利息起到像比例股息，或等价地说，负的持有成本的作用。汇率的波动是每月 3%。

为求得这个看跌期权的价值，史密斯先生建立了一个 6 个月、每月一期的二项式网格，参数 $u=e^{0.03}=1.030\ 45$ 和 $d=1/u=0.970\ 45$。上行的风险中性概率是：

$$q=\frac{(1+0.05/12)-d-0.08/12}{u-d}=0.387$$

然后史密斯先生用通常的后推过程估算看跌期权的价值。具体地，他建立了用波动系数规定的因子 u 和 d 的德国马克价格网格。然后他建立相应的看跌期权价格网格。最终价值很容易求得，其他价值用风险中性概率贴现风险中性价值求得。

布朗运动形式*

假定某商品——让我们举铜为例子——其价格由如下的几何布朗运动决定：

$$\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z \tag{13—25}$$

这里 z 是标准维纳过程。如果一个投资者购买铜并持有铜，比例成本按单位时间 cS 的速度支付。如果任何时间 t 投资者持有总价值 $W(t)$ 的铜，则按 $cW(t)\ \mathrm{d}t$ 的速度销售铜可以以 $cW(t)\ \mathrm{d}t$ 的速度支付持有成本。因此，持有铜的价值过程是：

$$\mathrm{d}W=\mu W\mathrm{d}t+\sigma W\mathrm{d}z-cW\mathrm{d}t=(\mu-c)W\mathrm{d}t+\sigma W\mathrm{d}z \tag{13—26}$$

这里 $W(0)=S(0)$。现在，方程（13—26）可以看成决定具有所说明的持有成本的证券的价值。我们可以称 W 为净铜价值，因为它是扣除持有成本后的净值。

如果考虑涉及铜的投资机会，比如铜期货期权或涉及铜作为商品的工程计划（如铜矿经营或电气设备工程）的实物期权，我们能用风险中性技术给

这种投资机会定价。因为净铜能够用于构造其他证券的复制过程，所以我们将净铜价格过程转换为风险中性形式。具体地，在利率 r 的风险中性过程，净铜由如下方程决定： 373

$$dW=rW\mathrm{d}t+\sigma W\mathrm{d}\hat{z} \tag{13—27}$$

这里 $\hat{z}$ 是标准维纳过程。

前面包括的适当变形是从式（13—26）到式（13—27），浓缩为 $\mu-c\rightarrow r$ 的变化。这等价于 $\mu\rightarrow r+c$ 的变化。因此，在风险中性世界中，原来的铜价格满足如下方程：

$$\mathrm{d}S=(r+c)S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}\hat{z} \tag{13—28}$$

这是与铜相关的投资的风险中性定价必须应用的方程。

13.10 鞅定价*

考虑任何具有连续时间价格过程 $S(t)$ 的证券。假定利率是 r 并且在 $0\leqslant t\leqslant T$ 证券没有任何支付。风险中性定价理论指出 $[0, T]$ 上的价格过程存在风险中性形式，使得：

$$S(0)=e^{-rt}\hat{E}[S(t)] \tag{13—29}$$

这里 $\hat{E}$ 表示风险中性世界的期望。我们可以将到时间 t_1 的表达式写成：

$$S(t_1)=e^{-r(t_2-t_1)}\hat{E}_{t_1}[S(t_2)]$$

对任意 $t_2>t_1$ 成立，这里 $\hat{E}_{t_1}$ 表示时间 t_1 观察[4]的风险中性期望。因此，我们可以将这个表达式整理得：

$$e^{-rt_1}S(t_1)=e^{-rt_2}\hat{E}_{t_1}[S(t_2)]$$

同样地，对所有 t，我们定义：

$$\overline{S}(t)=e^{-rt}S(t)$$

对所有 $t_2>t_1$，我们有特别简单的表达式：

$$\bar{S}(t_1)=\hat{E}_{t_1}[\bar{S}(t_2)] \qquad (13—30)$$

一般地，对所有 $t_2>t_1$，满足 $x(t_1)=E_{t_1}[x(t_2)]$ 过程的 $x(t)$ 被称为**鞅**（**martingale**）（以首先研究这些过程的数学家命名）。鞅的预期未来价值等于过程的现在价值——没有系统性漂移。

方程（13—30）指出被时间 0 到 t 的贴现因子缩小的证券价格 $S(t)$ 在风险中性概率结构下是鞅。

进一步，风险中性定价的结果意味着：以同样的方式，任何证券（S 的
374 衍生证券且没有中间现金流）的价格过程 P 在同样的概率结构下一定是鞅，也就是：

$$\bar{P}(t_1)=\hat{E}[\bar{P}(t_2)] \qquad (13—31)$$

这只是风险中性定价公式的重新表述，因为我们将式（13—31）整理得到：

$$P(t_1)=e^{-r(t_2-t_1)}\hat{E}[P(t_2)] \qquad (13—32)$$

例 13.10（远期价值） 考虑具有价格过程 S 的证券的远期合约。该合约是时间 0 时开立的，远期价格为 F_0，交割时间为 T。这个合约的初始价值是 $f_0=0$。在时间 $t>0$，新合约的远期价格为 F_t。原来的远期合约在时间 t 的价值 f_t 是多少？

函数 f_t 是证券 S 的派生物，因此，在风险中性世界中，被压缩的价格一定是鞅，从而：

$$\bar{f}_t=\hat{E}_t(f_T)$$

等价地，有：

$$e^{-rt}f_t=e^{-rT}\hat{E}_t(f_T)=e^{-rT}\hat{E}_t(S_T-F_0) \qquad (13—33)$$

将同样的结论应用于时间 t 开立的远期价格为 F_t（及零价值）的合约，得出：

$$0=e^{-rT}\hat{E}_t(S_T-F_t)$$

或者，等价地有，$\hat{E}(S_T)=F_t$。将这个等式应用到式（13—33），我们求得希望得到的结果：

$$f_t = e^{-r(T-t)}(F_t - F_0)$$

这与 10.4 节从更基本的（但较不一般的）结论推导的公式是一致的。

鞅公式也可以用于二项式网格框架。与式（13—31）类似的方程是：

$$\bar{P}_k = \hat{E}_k(\bar{P}_j) \tag{13—34}$$

对所有 $j>k$ 成立，其中

$$\bar{P}_k = \frac{P_k}{(1+r)^k}$$

并且 $\hat{E}_k$ 表示时间 k 关于风险中性概率的期望。而且 $\bar{P}$ 是 P 被贴现因子压缩后的价格。在二项式网格框架中，式（13—34）通常适用于一次一步，一旦利率期限结构被明确决定，这种情况与熟悉的风险中性贴现递归定价过程是一样的。

由于与鞅的联系，风险中性概率常常被称为**鞅概率**（**martingale probability**）。但是，在这个教材中我们一般喜欢用风险中性这个术语而不用鞅这个术语。 375

13.11　小结

布莱克－斯科尔斯方程是任何具有如下价格过程的标的资产的衍生证券的函数 $f(S, t)$ 必须满足的偏微分方程：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

这里 z 是标准化的维纳过程。特别地，函数 S 和 e^{rt} 两个都满足布莱克－斯科尔斯方程。其他衍生证券——如期权，满足同样的方程，但具有不同的边界条件。

通常要就一系列边界条件明确地求解布莱克－斯科尔斯方程是很困难的，或不可能的。期权生命期内不支付股息的股票看涨期权这种特殊情况是可以求解的。推导出的解答公式 $C(S, t)$ 被称为看涨期权价格的布莱克－

斯科尔斯公式。这个公式是按照标准正态随机变量的累积分布函数 N 来表示的。函数 N 不能以封闭形式估价，但能够找到准确的近似表达式。

布莱克－斯科尔斯方程可以看成风险中性定价的一个例子。事实上，在时间 T 回报为 $V(T)$，而没有其他支付的衍生证券的价值可以写成 $V=e^{-rT}\hat{E}[V(T)]$，这里 $\hat{E}$ 表示关于风险中性过程 $dS=rSdt+\sigma Sd\hat{z}$ 的期望。

得尔塔被定义为 $\Delta=\partial f/\partial S$。因此，得尔塔度量衍生资产对标的股票价格变化的敏感性。通过构造一个证券组合，使得组合的净得尔塔是 0，从而该证券组合被套期保值。得尔塔还可通过复制的方式用于人为地构造一种衍生证券。为了这样做，你要构造一个包含足够数量的标的证券的特殊证券组合，使得该证券组合的价值等于得尔塔乘以标的证券的价格。该证券组合还包括某种数量的无风险资产（或者空头或者多头），使整个组合的价值等于衍生证券的理论价值。该组合周期性地被重新平衡以使得组合价值继续紧密地跟踪衍生证券的理论价值。组合保险是这种思想的拓展，但它用标的资产的期货合约、而不是标的资产本身构造复制组合。

有好几种计算期权或其他衍生证券价值的数值方法。蒙特卡罗模拟是很好地适用于欧式期权的一种简单方法，即使在最终回报既取决于最终价格本身还取决于标的证券的特定价格轨道这个意义上，那些欧式期权是路径依赖的（例如，执行价格等于期权生命期内标的证券的平均价格的看涨期权）。蒙特卡罗模拟的一个缺陷是它可能要求极大数量的模拟次数。

有限差分方法通过一系列可用数值方法求解的代数方程对布莱克－斯科
376 尔斯方程作近似处理。这种方法既能处理欧式期权，也能处理美式期权，但除了特殊例子外，它不能处理路径依赖期权。

网格方法和树形方法很受欢迎。缺陷是网格或树形图经常变得非常庞大。路径依赖期权要求树形图而不是网格，因此节点数目可能确实变得很巨大。

期权概念存在许多变化。有些特异性期权的理论价格公式已经找到，但大多数情况这些理论价格必须用数值方法求解。

如果引起了储存成本，或持有一项资产时收到股息，这些情况将影响该

资产的衍生证券的价值。如果储存成本或股息与资产价格成比例，通过适当调整风险中性概率，或在连续时间情况下调整决定资产的风险中性过程的增长系数，可以求得衍生证券的价值。

当持有一种衍生证券本身时，如果有中间支付或引致成本，在二项式网格框架中，这些附加现金流可以如第 12 章说明的那样，在贴现的风险中性定价过程的每个节点加以说明。在连续时间框架中，附加现金流利率可以和附加期限一样置入布莱克－斯科尔斯方程，如本章附录所示。

风险中性定价方程可以转换为（容易地）鞅的形式：被贴现因子压缩的衍生证券价格定义了风险中性概率结构下的鞅过程。

附录：布莱克－斯科尔斯方程的另一种推导

这里我们用离散时间风险中性定价公式，并当 $\Delta t \to 0$ 时取极限推导布莱克－斯科尔斯方程。此外，我们将说明中间的现金流。

标的证券的价格由如下方程决定：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

这里 z 是标准维纳过程。衍生证券在时间 t 以 $h(S, t)$ 的速度支付现金流，并且最终现金流是 $g(S, T)$。

为了确定衍生证券的价格，我们建立一个二项式网格来近似价格过程 S。按照通常的程序（见第 11 章），我们选择 Δt，并设定：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$R = e^{r\Delta t}$$

上行和下行的风险中性概率是：

$$q = \frac{R-d}{u-d}, 1-q = \frac{u-R}{u-d}$$

377 我们利用一阶近似得到：

$$e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=1+\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$

$$e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}=1-\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$

$$e^{r\Delta t}=1+r\Delta t$$

$$e^{-r\Delta t}=1-r\Delta t$$

将这些关系式代入 q 和 $1-q$ 的表达式，并且只保留一阶项，得到：

$$q=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sigma}\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t}$$

$$1-q=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sigma}\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t}$$

令 $f(S,t)$ 表示衍生证券在 S 和 t 的价值。根据递归定价公式，我们有：

$$f(S,t)=h(S,t)\Delta t+(1-r\Delta t)[qf(uS,t+\Delta t)+(1-q)f(dS,t+\Delta t)] \tag{13—35}$$

但是，展开到一阶，有：

$$f(uS,t+\Delta t)=f(S,t)+\frac{\partial f}{\partial S}\left(\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{\sigma^2}{2}\Delta t\right)S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma^2\Delta t)S^2+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t$$

$$f(dS,t+\Delta t)=f(S,t)+\frac{\partial f}{\partial S}\left(-\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{\sigma^2}{2}\Delta t\right)S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma^2\Delta t)S^2+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t$$

将这两个关系式代入式（13—35），保留到一阶项，并合并同类项，我们得到：

$$f(S,t)=h(S,t)\Delta t+f(S,t)-rf(S,t)\Delta t+\frac{\partial f}{\partial S}rS\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Delta t+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t$$

消去 $f(S, t)$ 并约去 Δt，我们有：

$$h+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}rS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2=rf \qquad (13\text{-}36)$$

边界条件是 $f(S, T)=g(S, T)$。这就是存在现金流的布莱克-斯科尔斯方程。

练习

378

1. （正态分布的数值估价⊕）累积正态分布可以用修正的多项式关系来近似（6 位小数以内）

$$N(x)=\begin{cases}1-N'(x)(a_1k+a_2k^2+a_3k^3+a_4k^4+a_5k^5), x\geqslant 0\\ 1-N(-x), x<0\end{cases}$$

这里

$$N'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

$$k=\frac{1}{1+\gamma x}$$

$\gamma=0.231\,641\,9$

$a_1=0.319\,381\,530$

$a_2=-0.356\,537\,82$

$a_3=1.781\,477\,937$

$a_4=-1.821\,255\,978$

$a_5=1.330\,274\,429$

用这个公式求参数 $T=0.5$、$\sigma=0.25$、$r=0.08$、$K=35$ 和 $S_0=34$ 美元的看涨期权的价值。

2. （永久看跌期权◇）考虑一个永久美式看跌期权（$T=\infty$）。对低股票价格执行这个看跌期权是有优势的。令 G 为这种股票的最高价格。时间

独立的布莱克-斯科尔斯方程变成：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P''(S)+rSP'(S)-rP(S)=0$$

对 $G\leqslant S\leqslant\infty$ 成立。合适的边界条件是 $P(\infty)=0$ 和 $P(G)=K-G$。G 的选择必须使期权价值达到最大。

(a) 证明 $P(S)$ 具有如下形式：

$$P(S)=a_1S+a_2S^{-\gamma}$$

这里 $\gamma=2r/\sigma^2$。

(b) 利用两个边界条件证明：

$$P(S)=(K-G)(S/G)^{-\gamma}$$

(c) 最后，选择 G 使 $P(S)$ 的值最大以证明：

$$P(S)=\frac{K}{1+\gamma}\left[\frac{(1+\gamma)S}{\gamma K}\right]^{-\gamma}$$

3. (σ 估计⊕) 主要金融机构的交易者以向后推的方式应用布莱克-斯科尔斯公式，从期权价格推断其他交易者对 σ 的估计。事实上，交易者频繁地相互引用 σ 而不是价格来安排交易。假定 6 个月内不支付股息的股票看涨期权的执行价格为 35 美元，期权溢价为 2.15 美元，到期时间为 7 周。现在
379 的短期国库券利率是 7%，并且标的股票的价格是 36.12 美元。这种标的证券的隐含波动率是多少？

4. (布莱克-斯科尔斯近似◇) 注意到一阶展开 $N(d)=\frac{1}{2}+d/\sqrt{2\pi}$。利用它推导当股票价格为执行价格的现值，也就是 $S=Ke^{-rT}$ 时，看涨期权的价值。特别地，证明 $C\approx 0.4S\sigma\sqrt{T}$。另外，证明 $\Delta\approx\frac{1}{2}+0.2\sigma\sqrt{T}$。应用这些近似值估计例 13.2 的看涨期权的价值。

5. (得尔塔) 如果最初的股票价值是 63 美元，应用和例 13.2 同样的参数，求 5 个月看涨期权的价值。由此估计数量 $\Delta=\Delta C/\Delta S$。估计 $\Theta=\Delta C/\Delta t$。

6. (特殊的恒等式) 盖文·琼斯相信对价格 $P(S)$ 的衍生证券，Δ、Γ

和 Θ 的值是相关的。证明事实上有：

$$\Theta+rS\Delta+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma=rP$$

7.（伽马和西塔◇）证明对没有股息支付的股票看涨期权或股票看跌期权，有：

$$\Gamma=\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Theta=-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}-rKe^{-rT}N(d_2)$$

（提示：应用练习 6。）

8.（巨型西部 CD⊕）大西部银行已经提供了与标准普尔 500 相联系的特殊的存款单（CD）。资金每个月初被存入一个账户，并在该账户保存 3 年。利息每年末被记入该账户，收到的利息以前 12 个月标准普尔 500 指数的表现为基准。具体地，[5] 如果 k 个月末的指数值是 $S_k(k=0,1,2,\cdots,12)$，那么在第一年末，12 个月指数值的平均值定义为 $A=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{12}S_k$，并且收到的利息是：

$$I=\max[0,(A-S_0)/S_0]$$

乘以最初的账户余额。下一年的利息用新的账户余额和指数值按同样的方法计算。假定每月的标准普尔 500 指数的变化可以用 $\sigma=0.20$ 的几何布朗运动模型表示。与这个 CD 等价的无风险利率是多少？（提示：试试树形图。用 2 个月时间间隔。）

9.（控制变量方法）假定要估计随机变量 x 的期望值。（这个随机变量可能是服从风险中性随机过程的股票的看涨期权的贴现的最终价值，因此，期望值是期权的价值。）作这种估计的一种方法是按照概率分布产生 x 的大样本，然后取结果的平均值。这种方法的一个困难是它可能需要极大数量的样本才能获得满意的结果。通过应用额外的随机变量 y——称为**控制变量**（**control variate**），这个过程可以稍微加快一点。控制变量必须与 x 相关，

380 并且它的期望值必须是已知的。例如，如果 x 是具有下跌和出局特征的看涨期权的最终价值，我们可以选择 y 为没有下跌和出局特征的类似看涨期权的最终价值。通过直接方法如布莱克－斯科尔斯公式或二项式网格，我们能够确定 $E(y)=\bar{y}$ 的值。但我们确实预期到要是股票价格在某一特定的模拟试验终止于高水平，那么 x 和 y 的值也都相对要高一些。因此，两个变量是相关的。

$E(x)$ 的估计 $\hat{x}$ 是用如下公式决定的：

$$\hat{x}=x_{avg}+a(y_{avg}-y)$$

有时任意选择一个小 a 值。但是，也可以估计 a 的最优值。求 a 值使得 $\hat{x}$ 的方差最小。(结果将取决于一定的方差和协方差。)

10. (控制变量应用⊕) 用练习 9 的控制变量方法确定股票的 5 个月亚洲看涨期权的价值，其中参数 $S_0=62$ 美元、$\sigma=20\%$、$r=10\%$、执行价格 $K=60$ 美元。

(a) 用例 12.3 探讨的 5 个月标准看涨期权作为控制变量。

(b) 用 S_{avg} 作为控制变量并与 (a) 进行比较。

11. (以后支付期权) 以后支付期权是购买者不需要预先 (如达成合约时) 支付期权溢价的期权。在到期时，如果期权处于实值状态，以后支付期权的持有者必须执行期权，这时他支付期权溢价。否则，期权不执行，也不支付期权溢价。

CCC 公司的股票现在的价值是 12 美元，并假定具有几何布朗运动的所有性质。该股票具有 15%的预期年回报，20%的年波动率，无风险年利率是 10%。

(a) 用二项式网格确定执行价格为 14 美元、10 个月后到期的 CCC 公司股票的看涨期权的价格。(令你的网格的节点之间的距离是 1 个月长度。)

(b) 用同样的方法，确定和 (a) 的看涨期权具有同样参数的、以后支付看涨期权的期权溢价。

(c) 比较 (a) 和 (b) 的答案。这两个答案不同吗？如果不同，为什

么？如果相同，又是为什么？在什么条件下，你将喜欢持有哪种期权？

12.（加尼福利亚住房看跌期权⊕）假定你购买一处新住房，从某银行获得的抵押贷款为住房价格的 90%。假定几年以后，你的住房价值下降到抵押贷款余额以下，并且你决定在抵押贷款上违约。加尼福利亚的反违约裁判法规定：银行只能取得房子本身的价值，而不是整个抵押贷款余额。[6]（当然，加尼福利亚的房地产价值总是上升，所以这绝不是一个问题！）

假定你获得住房价格的 90%的 15 年期抵押贷款，并假定无风险利率是常数 10%。还假定这个住房每年给你市场价值 5%的净值（大概作为节省的租金），房产价格每年有 18%的波动率。一笔 90 美元贷款的看跌期权的价值是多少？你的抵押贷款的利率的公平价值是多少？（用小数量 Δt 近似。）

13.（森林价值）假定已砍伐的木材的储存成本是每年木材价值的 5%，求解第 12 章的练习 16。 381

14.（史密斯先生的看跌期权）求例 13.9 描述的史密斯先生的看跌期权的价值。

【注释】

[1] 实际上，这是一个简化证明。方程（13—11）应该包括 $x_t{}'S+y_t{}'B$，但可以证明这个和等于 0。

[2] 回想到 δS 与 $\sqrt{\delta \cdot t}$ 成比例，所以我们必须包括 $(\delta S)^2$ 项。

[3] 在这个例子中，我们假定按月复利，而布莱克－斯科尔斯公式中含蓄地假定连续复利。我们也能在这个例子中用等价的连续复利，得到的结果与 5.83 美元仅仅相差 1 美分的十分之一。

[4] 在式（13—29）我们能够写成 $\hat{E}_0$，但时间参照符号被省略了。

[5] 实际的公式可能有些小变化。

[6] 当然，这是法律的简明含义。

【参考文献】

布莱克和斯科尔斯的经典论文（见文献 [1]）创立了现代期权定价方法。另一个早期的重要的贡献者是默顿，他的许多论文被收集在文献 [2] 中。默顿考察了许多重要的特例，如永久期权。期权交易的详情可以参见文献 [3]。组合保险在文献 [4～5] 中讨论。蒙特卡罗技术是估价期望价值的典型方法。蒙特卡罗技术在期权定价的应用在文献 [6～7] 中探讨。一般有限差分方法论述的教材是文献 [8]。期权定价的应用在文献 [9～10] 中讨论。特异性期权的讨论可参见文献 [11～12]。练习 4 的思想在文献 [13] 中。

1. Black, F., and M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637—654.
2. Merton, R.C. (1990), *Continuous-Time Finance*, Blackwell, Cambridge, MA.
3. *Characteristics and Risks of Standardized Options*, American Stock Exchange, New York; Chicago Board Options Exchange, Chicago; New York Stock Exchange, New York; Pacific Stock Exchange, San Francisco; Philadelphia Stock Exchange, Philadelphia, February 1994.
4. Leland, H.E. (1980), "Who Should Buy Portfolio Insurance", *Journal of Finance*, 35, 581—594.
5. Rubinstein, M., and H.E. Leland (1981), "Replicating Options with Positions in Stock and Cash", *Financial Analyst Journal*, 37, July/August, 63—72.
6. Boyle, P.P. (1977), "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4, 323—338.
7. Hull, J.C., and A. White (1988), "The Use of the Control Variate

Technique in Option Pricing", *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 23, 237—251.

8. Mitchel, A., and D. Griffiths (1980), *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*, Wiley, New York.
9. Brennan, M., and E. S. Schwartz (1977), "The Valuation of American Put Options", *Journal of Finance*, 32, 449—462.
10. Courtadon, G. (1982), "A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options", *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 17, 697—705.
11. Rubinstein, M. (1991), "Pay Now, Choose Later", *Risk* (February). (Also see similar articles on other exotic options by the same author in subsequent issues of *Risk*.)

382 回报依赖利率的证券被称为**利率衍生证券**（**interest rate derivatives**）。这种证券极其重要，因为几乎每种金融交易都面临利率风险，而利率衍生证券提供了控制这种风险的手段。此外，和其他衍生证券一样，利率衍生证券还可以创造性地用于提高投资组合的绩效。

下一节将列举一些利率衍生证券的例子。这些例子描述了利率环境的复杂性和设计利用这种复杂性的金融工具的范围。

利率市场的复杂性反映在分析中应用的

理论结构上。即使在确定性情况下，我们发现有必要定义整个利率期限结构，以便解释债券价格。当引入不确定性时，有必要定义随机变化的期限结构。但足，我们将发现前面几章展开的概念和方法——即风险中性定价、二项式网格和伊藤过程——能够和期限结构思想令人满意地结合起来开发紧凑的利率衍生证券定价方法。因此，读者将发现这一章相当有趣，既因为这个主题本身在投资领域极其重要，也因为它把前面的许多内容结合起来并加以拓展。

14.1　利率衍生证券的例子

利率衍生证券与许多投资形式有关。这里列举一些例子。

1. 债券　债券本身可以看成利率衍生证券，虽然这种依赖关系相当直 383
接。尤其是，期限为 N 年的无风险零息债券的价格是 N 年利率的直接度量。附息债券总是可以看成零息债券的组合。

2. 债券期货　中长期国债和其他利率工具的期货是在交易所交易的。这已经在第 10 章讨论过。

3. 债券期权　期权可以由一个债券给予。10 年期国债的美式看涨期权给予某人在固定的期限内按固定的（执行）价格购买该债券的权利。

4. 债券期货期权　比实际的债券期权更普通的是债券期货期权。这种期权是在处理债券期货和其他利率期货合约的交易所交易的。这种期权规定了标的期货合约的交割。

5. 嵌入债券期权　许多债券是**可赎回的**（**callable**），这意味着债券发行者有权按一定的条件购回债券。（通常债券只有在规定的年数后才可赎回。）赎回条件可以看成给予发行者的期权，该期权被嵌入债券本身。如果利率降低到原来的发行利率以下，这种债券的发行者将会发现执行看涨期权的优势。有些债券是**可赎回的**（**putable**），这意味着债券持有者可以要求债券发

行者在一定的条件下赎回债券。这种债券给予债券持有者嵌入的看跌期权。

6. 抵押贷款 典型地，住房抵押贷款带有一定的预付优惠，允许抵押人在任何时候偿还贷款。（或许在前两年常常有偿还罚金。）偿还优惠类似于债券的赎回条款，住房所有者相当于债券发行者。有些抵押贷款具有特殊的特征，如利率随现行利率调整。

7. 抵押证券 抵押贷款通常打包集中到抵押贷款池。抵押证券是这种抵押贷款池或抵押贷款池担保的债务产生的收入的所有者份额。抵押贷款池中的单个抵押贷款典型地是由银行支付利息的，银行每月收到抵押贷款支付并转交给抵押贷款所有者。因为这个原因，这些抵押证券又被称为**过手证券**（**pass through**）。整个抵押证券市场规模庞大，并超过公司债券市场规模。

8. 利率上限和下限 金融机构向企业提供贷款，未偿贷款余额按固定在某一个标准利率（如 LIBOR[1]利率的优惠利率）上的利率收取利息。但
384 是，金融机构可以提供在一定时期内利率具有上限的贷款。如，金融机构可以提供今后 6 个月按 LIBOR 利率加 1%的利率每天收取利息的贷款，但利息费用将不会超过 10%（年利率）。类似地，也可以建立利率下限，就是利率水平不会低于某个下限水平。可调整利率的抵押贷款常常具有利率上限和利率下限的特征。利率水平根据某一利率指数周期性地更新，但利息费用每期不能超过某一规定的值，而且可以用一个总的上限限制整个抵押贷款有效期内的利息费用。

9. 互换 互换是双方交换两个利率工具的现金流的协定。例如，A 方可以用固定收入流与 B 方的可调整利率的收入流交换。

10. 互换期权 这个词是“swap option”的缩写。互换期权是利率互换的期权。这种期权在希望对利率风险套期的公司中相当受欢迎。（见练习 10。）对学生来说，它们是利率市场怎样变得更加复杂的一个出色的例子。

14.2　理论需要

聪明的投资者把利率波动看成一种风险形式。为了系统地分析这种风险，最好是开发出一种利率波动模型。这种模型的开发看起来很困难，因为在任何一个时间，利率环境不是由单一的利率刻画，而是由一系列现货利率或现货利率曲线组成的整个期限结构来刻画的。整个现货利率曲线的形状随时间而发生变化。

将利率波动建模的简单方法是假定单个现货利率以完全随机的方式相互独立地运动。这个假定在理论抽象上是可以接受的，但是它与观察到的接近到期期限的利率倾向于共同运动的结论不一致。符合实际的理论总是能解释观察到的现象，并将另外的期限结构建立到可允许的波动模型中。但是，只要具体的模型一经提出，就产生了新的问题——套利的可能性。

为了弄明白这个问题是怎么产生的，作为限定利率波动的简单模型，让我们假设期限结构总是水平的，但是期限结构随机地向上运动或向下运动——所有现货利率按同样的数量共同运动。事实上，这个简单模型在第3章的免疫分析中使用过。为完成这个模型，或者假想可能的离散变化，或者假想连续的变化分布，我们可以决定向上运动和向下运动的概率结构。但是，就目前的论述，我们没有必要做得那么具体。不管概率是怎么规定的，这个期限结构变化的简单模型都意味着存在套利机会。这个问题的最简单证明可再看第3章处理X公司的免疫问题的例3.10。根据那个例子，如果利率都是9%，你可以通过购买价值292 788美元的债券1和价值121 854美元的债券2，同时卖空10年后到期、价值414 642美元的零息债券而构造一个证券组合。这个组合的总成本是0。但是，如果期限结构向上运动或向 385
下运动，组合的净值将增加。因此，存在从这个组合赚取正的利润而没有损失的可能性——经典的B型套利机会。（正如第3章练习16显示的

那样，这是水平期限结构假设的一般结果。）这个例子证明了：如果要避免套利机会，我们不能任意选择期限结构波动框架。我们怎样找到实际的无套利框架呢？

14.3　二项式方法

我们熟悉的工具——二项式网格——提供了构建利率模型的合适框架。我们建立一个网格，连续节点之间的基本时间跨度等于我们用于表示期限结构的时期长度——也许一周、一个月、一个季度或一年。然后，我们将**短期利率（short rate）**（也就是一个时期的利率）置入网格的每个节点。这个网格的解释是：如果利率过程到达某一具体的节点，那么下一个时期的单期利率就是该节点规定的利率。为完成这个模型，我们可以给各个节点变迁规定概率，使得我们构造完整的短期利率概率过程。但是，节点变迁的实际概率与下面的定价理论不相关。取而代之，我们还将指定风险中性的节点变迁概率。正如即将描述的那样，短期利率值和相应的风险中性概率的指定完全定义了所有期限的利率结构。理解风险中性概率是根据这种情况配置的，而不是从复制论述推导出来的很重要。

既然风险中性概率是指定的而不是计算的，因此将它们设定都等于二分之一最方便。这一节我们遵循这个惯例。给网格的节点建立一个索引惯例也很方便。为这个目的，将网格画成图 14—1 显示的直角形式最
386 容易。注意到时间 t 总共有 $t+1$ 个节点，以 i 表示从 0 到 t 的索引。将这个记号形象化的合适的方法是：设想从任何节点出发的两个分支看成一个向上的和一个水平的。时间 t 的索引 i 表示已经经过多少个向上运动才到达这个节点。网格中的特定节点用数对（t，i）编制索引，t 表示时间，而 i 表示该时间的节点索引。在节点（t，i），有指定的短期利率 $r_{ti} \geqslant 0$，它是该点的单期利率。

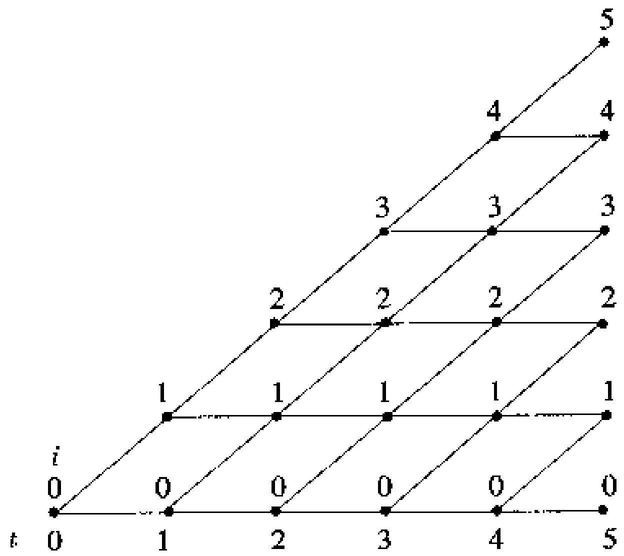


图 14—1　短期利率网格的索引系统

节点是双索引形式（t，i）。t 指网格底部显示的时间，而 i 指离网格最低部分的高度。

这个网格构成了用风险中性定价理论给利率证券定价的基础。在定价过程的任何一个节点，任何利率证券的价值取决于该节点，而且我们假定所有节点的价值通过风险中性定价公式相互关联。例如，考虑网格中部某给定的节点（t，i）和任何利率证券。假定这种证券在节点（t，i）的价值是 V_{ti}。因此，依据网格的规律，这个价值与这种证券下面两个可能相继节点的价值有关，根据风险中性定价公式，有：

$$V_{ti}=\frac{1}{1+r_{ti}}\left(\frac{1}{2}V_{t+1,i+1}+\frac{1}{2}V_{t+1,i}\right)+D_{ti} \qquad (14\text{—}1)$$

这里 D_{ti} 是节点（t，i）的股息支付。[2]

隐含的期限结构

根据已经规定的整个期限结构模型，看起来我们还有很长的路要走，因为我们所有的利率都是短期利率，但实际上完整的期限结构已经出来了。我们只是不得不推出完整的期限结构。这个推导与确定性情况下从一系列单期远期利率推出现货利率曲线的方法一样。对二项式网格，这种推导是以风险

中性定价理论为基础的。为了弄明白这种推导是怎么进行的，假定我们在初始时间的节点（0，0）。单期现货利率像该节点的定义一样，简单地表示成 r_{00}。为了求得两期现货利率，我们考虑时间 2 支付 1 美元的债券。我们利用风险中性定价公式向后推算两步，求得它的价值。详细地说，为简便起见假定每期的长度是一整年。用 $P_{ti}(2)$ 表示第二年到期的债券在节点（t，i）的价格，则有：

$$P_{10}(2)=\frac{1}{1+r_{10}}(\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 1)=\frac{1}{1+r_{10}}$$

$$P_{11}(2)=\frac{1}{1+r_{11}}(\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 1)=\frac{1}{1+r_{11}}$$

下一步我们求得：

$$P_{00}(2)=\frac{1}{1+r_{00}}[\frac{1}{2}\times P_{10}(2)+\frac{1}{2}\times P_{11}(2)]$$

387 这个过程适用于对任意 k 估算价格 $P_{00}(k)$。因此，相应的时期 k 的现货利率 s_k 满足方程：

$$\frac{1}{(1+s_k)^k}=P_{00}(k)$$

例 14.1（简单的短期利率网格） 图 14—2 显示了给定 6 年利率的短期利率网格。（期间长度是 1 年。）该图是使用上行因子 $u=1.3$ 和水平（或下行）因子 $d=0.9$ 而构造的。这个网格的风险中性概率指定为上行概率 $q=0.5$ 和水平概率 $1-q=0.5$。

根据这个网格计算各种不同期限的零息债券的价格能够确定整个利率期限结构。作为这种计算的例子，时间 4 到期的债券价格显示在图的下面部分。这个价值是按熟悉的方式在网格中向后推算的，在每一期将下一期的价值用风险中性概率求加权平均值，并用单期利率贴现。例如，第三列最上面的输入值是 $P_{22}(4)=\frac{1}{2}(0.8667+0.9038)/1.1183=0.7916$。求得债券

在时间 0 时的价值是 0.733 4 乘以债券的面值。这对应于时间 0 到时间 4 的现货利率 $s_4=(1/0.733\,4)^{0.25}-1=0.080\,6$。其他现货利率可以通过在最后一列构造相应的时间长度为 1 年的网格按同样的方式计算。如果按这种方法计算，推导出的期限结构是（0.070 0，0.073 4，0.076 9，0.080 6，0.084 4，0.088 2）。注意，这个期限结构平滑上升的方式简直与实际的期限结构的特征一样。

短期利率					0.259 9
				0.199 9	0.179 9
			0.153 8	0.138 4	0.124 6
		0.118 3	0.106 5	0.095 8	0.086 2
	0.091 0	0.081 9	0.073 7	0.066 3	0.059 7
0.070 0	0.063 0	0.056 7	0.051 0	0.045 9	0.041 3
债券价值				1.000 0	
			0.866 7	1.000 0	
		0.791 6	0.903 8	1.000 0	
	0.751 5	0.848 1	0.931 4	1.000 0	
0.733 4	0.818 0	0.890 9	0.951 4	1.000 0	

图 14—2 简单短期利率网格和 4 年期债券定价

债券是从最终价值 1.0 开始并用网格上部的短期利率贴现，在网格下部后推求得的。

短期利率二项式网格产生整个现货利率曲线族，描述利率期限结构随时间随机变化的方式。为了弄清楚这一点，假设利率过程最初在节点（0，0）。相应的期限结构（现货利率曲线）可以通过前面例子描述的计算确定。经过一期后，利率过程运动到两个继任节点的一个。因此，这个继任节点被看成短期利率网格（原来网格的子网格）的新的起始节点。相应的现货利率曲线 388
可以和以前完全一样地计算，但计算出的价值有点不同，表示有一个周期的改变。如果利率过程运动到其他可能的节点，相应的现货利率曲线仍然会有

点不同。因此，我们将网格中与每个节点相关的现货利率曲线形象化。随着标的利率过程从一个节点运动到另一个节点，整个现货利率曲线发生变化了。

没有套利机会

期限结构是由没有套利机会的短期利率二项式网格决定的吗？是的！这个重要事实是从风险中性定价公式得出的结果。为证明这个结论，首先考虑从节点（t，i）开始的单期套利的可能性。在该节点的任何证券由节点（t，i）的价格 P_{ti}、$t+1$ 期的价值 $V_{t+1,i}$ 和 $V_{t+1,i+1}$ 定义。它们由下式联系起来：

$$P_{ti}=\frac{1}{2}\frac{V_{t+1,i}+V_{t+1,i+1}}{1+r_{ti}}$$

如果该证券表示一个套利机会，那么我们必须有 $P_{ti}\leqslant 0$ 和 $V_{t+1,i}\geqslant 0$、$V_{t+1,i+1}\geqslant 0$，其中一个不等式是严格成立的。这显然是不可能的，因为联系这些价值的方程的所有系数都是正的。因此，在一个时期里，没有套利机会是可能的。

两个时期的论述与此类似。某证券在时间 t 的价格为 P_{ti}，时间 $t+1$ 时的回报为 $D_{t+1,i}$ 和 $D_{t+1,i+1}$，时间 $t+2$ 的价值为 $V_{t+2,i}$、$V_{t+2,i+1}$ 和 $V_{t+2,i+2}$。很明显（见图 14—3）这些价值由下式联系起来：

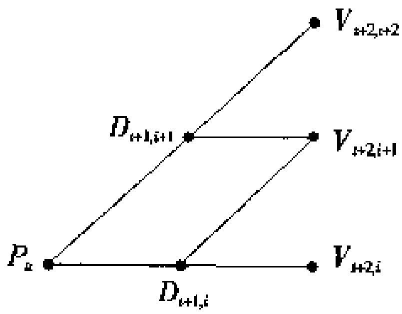


图 14—3 没有套利机会是可能的

初始价格 P_{ti} 是通过贴现风险中性价值决定的。如果所有的回报是非负的，那么初始价格也一定是非负的。

$$P_{ti}=\frac{1}{2}\frac{D_{t+1,i}+D_{t+1,i+1}}{1+r_{ti}}+\frac{1}{4}\frac{V_{t+2,i}+V_{t+2,i+1}}{(1+r_{t+1,i})(1+r_{ti})}$$

$$+\frac{1}{4}\frac{V_{t+2,i+1}+V_{t+2,i+2}}{(1+r_{t+1,i+1})(1+r_{ti})}$$

若还存在套利机会，则右边的所有变量必须大于或者等于 0，而且小于 P_{ti} 或者等于 0，至少有一个不等式是严格成立的。显然这是不可能的。因此，不存在两期套利机会。这个论述可以拓展到任意期数。所以建立利率模型的短期利率二项式网格路径是无套利的，因此短期利率网格的规定提供了可行的利率变化模型。

14.4 定价的应用

许多有趣的证券能够用短期利率网格定价。有时短期利率网格连同网格节 389
点可能的回报方式就是：建立后推计算程序确定价值的所有必要条件。而另一些时候必须利用更精巧的技术。但种类繁多的问题是可修改成用二项式网格框架快速计算的。这一节讨论和描述这种有代表性的、重要而有趣的应用。

债券衍生证券

前面一节说明了如何用二项式网格方法计算零息债券的价值。其他债券价值的计算只是一个直接推广。为了计算债券衍生证券的价值，我们分两步进行：首先我们计算债券本身的价格网格，然后我们再计算衍生证券的价值。我们描述债券期权价值的计算程序。

例 14.2（债券期权） 考虑一个还有 4 年到期的零息债券，并以 73.34 的现价出售。假定我们给予 2 年后购买这种债券的欧式期权，执行价格为 84。这个期权的价值是多少？

我们假定期限结构由例 14.1 的短期利率网格决定。任意节点的零息债券的价值标在图 14—2 下面部分的债券价格网格。为了给这个期权定价，我们只需要网格的前面三期。期权到期时的价值是 max(0，$P-K$)，这里 P 是期权到期时的债券价格，而 K 是执行价格。然后，我们可以构造一个小网格确定期权的价值，如图 14—4。最后一列表示期权到期时的价值。前面各列表示利用 0.5 的风险中性概率、并根据短期利率网格相应值贴现、后推计算获得的价值。我们推算出期权的价值是 1.470 3。

		0
	0.371 2	0.81
1.470 3	2.775 2	5.09

图 14—4　债券期权计算

应用标准的后推方法。

远期和期货*

利率证券，如债券的远期和期货合约用二项式网格方法很容易处理。这
390 种方法给第 10 章的结果提供了另一种认识，并用重要方法得出了那些结果，因为没有必要假定利率是确定性的。实际上，远期合约的结果没有受不确定性的很大影响，但期货合约的结果受不确定性的影响很大。尤其是，这意味着期货—远期等价结果不再适用。但是，利率期货要求的计算很简单。

例 14.3（债券远期） 考虑一个 4 年后购买 2 年后到期、利率为 10%的国债远期合约。假定利率过程遵循前面例子图 14—2 显示的网格，并假定利息按年支付，且合约规定恰好在利息支付后的第四年初交割。

计算的第一步是求国债在第四年初的价值。这个计算按通常的后推计算方法进行，如图 14—5 的右边所示。计算中包括了第五年和第六年的利息支付。例如，第五年最上面的输入值是 $\frac{1}{1.26}(0.5\times110+0.5\times110)+10=$

97.31。第四年的那一列按类似的方法计算，但没有利息。第四年这一列的数字是该年债券可能出售的价格。

网格的左边部分继续按后推方法计算，但不包括任何利息支付。推出的初始节点的价值就是第四年交割的 2 年期债券在第 0 年支付的价值。这个价值是 72.90。

对远期合约没有初始支付，支付发生在第四年。这种支付的推迟具有时间价值，它由四年零息债券的价值决定。这种零息债券的价值在例 14.1 计算得 73.34。通过与四年后交割的 100 美元现金的远期价格（这个远期价格当然恰好是 100 美元）相比较，我们能够求得正确的债券远期价格。因此，正确的远期价格是：

年						
0	1	2	3	4	5	6
				债券		110
					97.31	110
远期				83.56	103.23	110
时期			76.38	92.69	107.82	110
		73.07	87.06	99.69	111.27	110
	72.2	84.46	95.69	105.5	113.80	110
72.9	83.81	93.72	102.4	109.7	115.63	110

图 14—5 债券远期网格

债券的价值是从第六年到第四年后推计算的。因此，远期价格是用第四年的债券价值作为最终价值计算的。

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \text{债券的远期价格} \\
&= 100\text{ 美元的远期价格} \times \frac{\text{债券的现在价值}}{100\text{ 美元的现在价值}} \\
&= 100 \times \frac{72.90}{73.34} \\
&= 99.40
\end{aligned}
$$

期货*

391 利用二项式网格，期货合约定价也很容易。这种方法继续通过例 14.3 可以得到最好的描述。

例 14.4（债券期货） 考虑 4 年后购买的 2 年期、利率为 10%的债券期货合约。和以前一样，我们需要知道第四年期货合约到期时债券在每个节点的价值。这种计算在前面的例子中已经做过，我们只是在新网格第四年输入价值，如图 14—6 所示。现在假定你在第三年最高的节点，并且该节点期货合约的价格为 F。当时你什么也不要支付，但下一期你将获得的利润为 83.56－F 或者 92.69－F。因此，第三年你应该支付的价格是 0.5(83.56－F) ＋0.5 (92.69－F)，并用该节点的短期利率贴现。但是这个价格是 0，因为你为这个合约什么也没有支付。因此，F＝0.5(83.56＋92.69) ＝88.13。换句话说，期货价格是后面两个价格（用风险中性概率）的平均值。这个论证能够应用到前面每个节点。所以我们只要往后推算，计算没有贴现的平均值。初始节点的价值就是期货合约的价格，即，期货合约的价格是 99.12。注意到事实上这个价值与相应的远期价格 99.40 稍微有点不同，表明当利率是随机变化时（虽然偏差可能很小）期货－远期等价性不成立。

年				
0	1	2	3	4
期货时期				83.56
			88.13	92.69
		92.23	96.33	99.96
	95.88	99.54	102.75	105.53
99.12	102.36	105.18	107.61	109.68

图 14—6　债券期货网格

期货价格是通过没有贴现的后推步骤计算的。

14.5　校准和可调整利率贷款*

幸运地，我们已经能够用二项式网格而不是更复杂的树形结构解决本书中的大多数定价问题。网格是很吸引人的，因为网格的节点数仅仅与时期数 n 成比例，而更一般的树节点数可能按几何级数（如二叉树是按 2^n）增长。因此，如果应用网格，描述将相对简单，而且计算量也相对小；而如果要求应用完整的树，则每件事都更困难。毫无疑问，可能时，我们愿意努力工作将树形结构转换成网格结构。这一节正好要描述这种转换的一种方法，然后将这种方法应用于可调整利率贷款的定价。

当应用网格时，节点典型地被一些惟一决定节点现金流的基础变量所定义。例如，对标准期权而言，股票价格起基础变量的作用，而对债券来说，短期利率起基础变量的作用。如果与节点有关的现金流取决于用以到达该节点的路径，那么这个现金流过程称为**路径依赖**的（**path dependent**），并且网格不是合适的结构。另一方面，树形结构没有这些缺点，因为树上的每个节点都是由惟一的路径到达的。因此，解决路径依赖问题的方法是将网格中的组合节点分离，从而得到描述同一个问题的树。 392

通常，发生路径依赖情况的是需要多于一个变量描述节点的现金流。有时，我们可以将这些变量转化为一个变量再利用网格。

我们把这种技术称为**校准**（**leveling**）的一个原因将变得清楚了。它适用于现金流由两个变量（如 j 和 x）定义的情形。这两个变量的第一个变量是离散变量，本身就可以定义一个网格。第二个变量是连续变量，它也是定义现金流所要求的。作为一个例子，考虑具有随机黄金价格的（第 12 章例 12.5 探讨过的）科普莱克斯可金矿问题。黄金价格可以用二项式网格建模，所以这个价格充当网格变量 j。但是，到达一个网格节点以后，该节点的现金流取决于金矿中剩余的黄金量，因此这个剩余量作为变量 x。金矿价值是

路径依赖的，因为在任何黄金价格节点上的量 x 取决于到达该节点的路径。这种问题看起来让人失望，因为我们担心可能需要大量更多的节点解释 x 的依赖关系。

如果节点价格能够被证明与变量 x 成比例，那么路径依赖困境能够被克服。如果是这样的话，我们可以选定 x 的一个固定标准值 x_0，并在所有节点应用这个标准值，而且以后按比例合适地调整结果。具体地，当后推时，在任何节点 j，我们用基础变量值 j 和 x_0 确定证券价格 V。推导出的价值是 V_j。一步一步的后推计算是简单的，因为我们能够容易控制 x 的单步变化量。例如，假定在节点 j，我们需要节点 $j+1$ 的价格，这是前面一步，但是当 $x \neq x_0$ 时，我们需要求节点 $j+1$ 的价格。由线性关系，这个价格是 $(x/x_0)\ V_{j+1}$，V_{j+1}是 $x=x_0$ 时节点 $j+1$ 的价格。如果我们选取 $x_0=1$，问题尤其简单。因此，任意节点 j 和校准变量 x 的价格具有 $V_j(x)\ =K_jx$ 的形式。我们只需要控制 K_j，然后用合适的 x 相乘即可。

这种方法被称为校准，因为变量 x 保持在不变水平。在发现租赁价值和黄金储存量 x 成线性关系后，科普莱克斯克金矿问题按这种方式解决了。这种方法看起来对利率衍生证券问题尤其宝贵。我们在下一小节用这种方法探讨可调整利率贷款。那个例子将阐明这种方法。

可调整利率贷款

可调整利率贷款是很常见、很重要的。典型的可调整利率贷款索要的利
393 息率在任一期都与标准的指数，如三个月国库券利率联系起来。例如，索要的利率可能是国库券利率加上 2 个百分点。但是，如果贷款是在固定期数内分期偿还的（即贷款是按大体一致的方式偿还的），利息率的变化意味着要求支付的标准的变化。在到期日前利率将保持不变的假设下，任何时期支付额的计算要使得贷款在到期日结清。

假定将要试图给这种贷款定价。你可以站在银行提供贷款的角度考虑问题，并且弄明白根据贷款偿还时间计划表示的（随机）收入流，银行应该付

出多少。你将从国债利率的二项式网格模型开始。然后将倾向于在网格的任何一个节点输入应该支付的付款，并用标准的后推计算方法给该支付结构定价。但是，在考虑这个问题时，你不久将发现不能用惟一的方式将付款输入网格，因为在任何节点应该支付的付款不仅取决于该节点，还取决于到达该节点的路径。例如，如果选择高利率路径，则贷款余额可能要大于选择低利率路径的贷款余额。此时你的思考将最可能是“噢，噢，看起来我将不得不用带有成千上万个节点的二叉树，而不是网格。但是请等一等，也许我能用校准。”

例 14.5（汽车购买者的困境） 丹尼斯刚从大学毕业，并同意购买一辆新汽车。支付现款后，现在她面临如何借到 10 000 美元欠款的决定。她已经确定一个 5 年期贷款计划，但有两个选择：（A） 10%的固定利率贷款；（B） 任何一年的利率比该年初 1 年期国债利率高两个百分点的可调整利率贷款。目前，国债利率是 7%。她要知道哪个选择更好。

丹尼斯对电子表格计算程序相当熟练，所以当晚她就做了这方面的工作。首先，她决定国债利率可以用前面例 14.1 的网格建模。她决定站在银行的角度考虑这个问题，并弄清楚这两个贷款对银行来说价值是多少。她假设所有的付款是从第一年末开始按年支付的。

固定利率贷款的计算很容易。用第 3 章的年金公式能够求得付款额，即：

$$A=\frac{r(1+r)^nP}{(1+r)^n-1}$$

对 $P=10\ 000$ 美元、$r=10\%$ 和 $n=5$，可求得 $A=2\ 638$ 美元，它是每年的支付额。每个节点的现金流显示在图 14—7 左边的网格。该图右边网格显示了利用例 14.1 的利率计算的现金流的对应价值。[3] 丹尼斯断定对银行来说固定利率贷款值 561.10 美元。

394

年						年					
0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
					2 638						2 638
收到的付款				2 638	2 638	贷款价值				4 836.5	2 638
			2 638	2 638	2 638				6 881.3	4 955.3	2 638
		2 638	2 638	2 638	2 638			8 914.7	7 157.1	5 045.3	2 638
	2 638	2 638	2 638	2 638	2 638		11 009.0	9 350.8	7 368.0	5 111.9	2 638
−10 000	2 638	2 638	2 638	2 638	2 638	561.1	11 591.7	9 684.8	7 521.7	5 160.2	2 638

图 14—7　固定利率贷款的价值

右边的网格是将左边网格的支付额用标准的风险中性价值贴现求得的。

对可调整利率贷款，丹尼斯很快认识到节点的现金流不是惟一的，而是取决于到达该节点的特定路径。她从构造一个树，并将短期利率和贷款余额记录在节点开始计算。节点的现金流将被这两个值惟一地决定。不同的是，她用校准技术保存网格结构，每个节点用同样的贷款余额计算。她用 100 美元的余额值。在每个节点，她计算分期偿还当时开始第五年结束的 100 美元贷款的每年支付额。这些价值显示在图 14—8 左边的网格。例如，第四年最上面的元素是 122 美元，这是按 19.99%+2%的利率计算的结清 100 美元贷款第一年末应该收到的金额。类似地，初始节点是 25.71 美元，这是按

年						年					
0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
					100						0
支付率				122	100	每 100 美元的价值				1.667	0
			63.38	115.8	100				2.535	1.757	0
		42.95	59.67	111.6	100			3.436	2.665	1.825	0
	32.3	40.35	57.13	108.6	100		4.3744	3.601	2.763	1.876	0
25.71	30.39	38.57	55.39	106.6	100	5.349	4.56512	3.723	2.835	1.912	0

图 14—8 可调整利率贷款的价值

右边的网格是使贷款余额固定在 100 美元，用校准技术求得的。左边网格中显示的支付是与 100 美元余额相关联的。

7%+2%的固定利率在整个 5 年时期里分期偿还 100 美元贷款每年末必须收回的金额。这个表是用分期付款公式构造的。它可以在不断发展的基础上求可调整利率贷款的实际支付额。丹尼斯只要求节点的贷款余额（取决于到达该节点的路径），然后应用网格中的数值作为 100 美元贷款余额的支付额。这个支付将在当前年末进行。

对银行来说，图 14--8 右边网格包括从该节点开始的 100 美元可调整利率贷款每个节点的价值。但贷款的时间长度是这样的，它在原来 5 年期贷款 395 的终点结束。这个网格的最终价值是 0，因为从那儿开始的贷款将立即被偿还，并且没有收到任何利息。在第四年最上面节点，银行能够以 22%的利率贷出 100 美元。下一年，银行将收到 122 美元的贷款偿付款。这个付款的现值是 122/1.20=101.67 美元。减去 100 美元的贷款费用得到净现值 1.67 美元的利润。前面的节点稍微复杂一点。第三年最上面节点的计算要注意到：下一年 100 美元的新贷款将产生 63.38 美元的现金流。这个付款的一部分是利息支付，而另一部分降低了本金。剩下的本金将等于 100－63.38＋(15.38＋2.00) =54.00 美元。这个本金被银行收回，并在下一个时期按当时决定的利率再次贷给丹尼斯。（事实上，丹尼斯将付给银行 63.38＋54 美元，而银行那时将发给她 54 美元的新贷款。）这下一个贷款的价值各以 0.5 的（风险中性）概率，或者是每 100 美元 1.67 美元，或者是每 100 美元 1.76 美元。这个价值与第一个支付一起可以往回贴现一期，并减去 100 美元，得到总的净现值 2.535 美元。具体地，就是：

$$\frac{54\left[1+\frac{1}{2}(1.67+1.76)/100\right]+63.38}{1.1538}-100=2.535$$

在网格从头至尾往后推算，丹尼斯求得 0 年的 100 美元贷款值 5.349 美元。因此10 000美元贷款值 534.90 美元，它只比固定利率贷款求得的价值 561.10 美元稍微小一点。所以她断定从价格方面看可调整利率贷款比固定利率贷款稍微好一点。（尽管她可以指望实施不同的分析找出哪个选择给她

的效用最高，但她可能不愿从事活跃的国债交易对不确定性充分套期。）

14.6 前推方程

根据树或网格后推定价是金融工具定价的一种强有力的方法。存在对偶方法——向前递归——是更好方法的时候。这种前推方法对决定短期利率网格为基础的期限结构尤其有用。

在 14.4 节我们看到短期利率完全决定了期限结构。这种期限结构可以通过后推定价方法求每个到期期限的零息债券的价格而计算出来。但是，每种到期期限都要求独立的递归和独立的价格网格。因此，如果有 n 个时期，要计算完整的期限结构则要作 n 个独立的递归。对大的 n 值，单一节点定价的个数近似于 $n^3/6$，可以比作一个人穿过整个树的 $n^2/2$。[4]下面描述的前推过程仅仅要求一个独立的递归。

396 向前递归是以计算**初级价格（elementary prices）**为基础的。初级价格 $P_0(k, s)$ 是在时间 k 和状态 s 支付 1 个单位，而在其他时间或状态没有任何支付的证券在时间 0 时的价格。价格 $P_0(k, s)$ 被称为初级价格是因为它们仅仅是在一个节点有回报的初级证券的价格。我们可以对任何固定的时间 k 和状态 s 在网格节点 (k, s) 指定回报 1，然后后推到时间 0 求得价格 $P_0(k, s)$。二者挑一，我们也可以向前推。

假定已经求出时间 0 到时间 k 网格上所有节点的初级价格。考虑形如 $(k+1, s)$ 的节点，这里 $s\neq0$，$s\neq k+1$，即 s 不是时间 $k+1$ 时网格最下面和最上面的节点。这就是图 14—9 描述的情况。这样的节点有两个前任节点（通往该节点的节点），即 $(k, s-1)$ 和 (k, s)。假定某证券在节点 $(k+1, s)$ 支付 1 单位，而在其他节点没有支付。如果我们要在网格中进行后推计算，那么这个证券在各自的前任节点的价值是 $0.5d_{k,s-1}$ 和 $0.5d_{k,s}$，这里 $d_{k,s-1}$ 和 $d_{k,s}$ 是一期贴现因子（由这些节点的短期利率决定）。

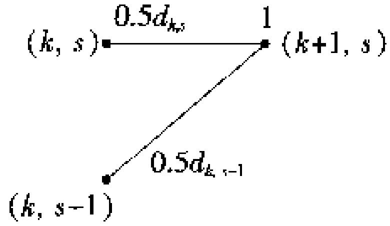


图 14—9 前推方程的构建

节点（$k+1$，s）的初级价格可以表示成两个前任节点初级价格的组合。

根据初级价格的定义，这两个前任节点在时间 0 时的价值分别是 $0.5d_{k,s-1}P_0(k, s-1)$ 和 $0.5d_{k,s}P_0(k, s)$。时间 0 时的总价值是这两个价值的和，并且它就是节点（$k+1$，s）的初级价格。因此，$P_0(k+1, s) = 0.5d_{k,s-1}P_0(k, s-1) + 0.5d_{k,s}P_0(k, s)$。这是向前递归，因为时间 $k+1$ 的价值是用时间 k 的价值表示的。如果 $s=0$ 或者 $k+1$，那么只有一个前任节点，所得结果要相应地修正。总之，我们获得三种形式的前推方程，取决于节点是在网格的中间、下面还是上面。

$$P_0(k+1,s)=\frac{1}{2}[d_{k,s-1}P_0(k,s-1)+d_{k,s}P_0(k,s)]$$

$$0<s<k+1 \tag{14—2a}$$

$$P_0(k+1,0)=\frac{1}{2}d_{k,0}P_0(k,0), \qquad s=0 \tag{14—2b}$$

$$P_0(k+1,k+1)=\frac{1}{2}d_{k,k}P_0(k,k), \qquad s=k+1$$

虽然我们是通过直觉推理推导这个方程的，但是从后推方程用纯代数方法推导这个方程是可能的。前推方程只是组织基本的风险中性定价方程的一种不同方法。

一旦初级价格是已知的，就可以很容易地求得任何利率证券的价格。我们只要将任何节点（k，s）的回报乘以价格 P_0（k，s），并将所有有回报的节点的结果相加求和。例如，时间 n 到期、价值为 1 的零息债券在时间 0 时的价格是：

$$P_0 = \sum_{s=0}^{n} P_0(n,s)$$

397 通过单一的向前递归，前推方程可以用来求对应于短期利率树的完整的期限结构——因为可以确定所有零息债券的价格。

例 14.6（简单网格） 让我们将前推方程应用于例 14.1。初级价格网格可以从短期利率网格直接计算求得。它与推导出的零息债券价格和期限结构共同显示在图 14—10。

短期利率					0.259 9	
				0.199 9	0.179 9	
			0.153 8	0.138 4	0.124 6	
		0.118 3	0.106 5	0.095 8	0.086 2	
	0.091 0	0.081 9	0.073 7	0.066 3	0.059 7	
0.070 0	0.063 0	0.056 7	0.051 0	0.045 9	0.041 3	
初级价格						0.006 9
					0.017 3	0.046 8
				0.041 5	0.094 3	0.130 2
			0.095 8	0.175 4	0.202 8	0.189 4
		0.214 2	0.296 3	0.275 7	0.215 5	0.152 7
	0.467 3	0.434 0	0.304 6	0.191 3	0.113 4	0.064 8
1.000 0	0.467 3	0.219 8	0.104 0	0.049 5	0.023 7	0.011 4
债券价格	0.934 6	0.867 9	0.800 6	0.733 4	0.667 0	0.602 1
即期利率	0.070 0	0.073 4	0.076 9	0.080 6	0.084 4	0.088 2

图 14—10　用初级价格求期限结构

初级价格是通过网格的单一向前推算决定的。因此，任何一列的和给出该到期日零息债券的价格。注意：短期利率适用于下一年，而现货利率适用于前一年。因此，初始短期利率和初始现货利率虽然相等，但在同一列是分开的。

作为计算的例子，第二列的两项是从单一的前任节点推导出来的，这些项等于 1/2 乘以第一期的贴现率再乘以时间 0 的初级价格 1。因此，这些价值是 0.5/1.07=0.467 3。网格正下方的数字是上面元素的和。这些价值对应于零息债券的价格。网格下面最后的数字构成以现货利率表示的期限结构，它们是从上面的债券价格直接计算出来的。这些值与例 14.1 用更烦琐的过程计算出来的结果是一致的。

14.7 匹配期限结构

幸运地，以构造短期利率二项式网格为基础，我们在利率衍生证券定价的可行方法方面有了一个出色的开端。从该网格出发，用风险中性定价公式和后推递归方法，我们可以计算期限结构，并能给利率衍生证券定价。到目前为止，我们还没有充分论述的、这种方法的关键内容是如何构造最初的短期利率网格使得它是实际利率动态的描述。这是这一节的主题。

利率波动与股票价格波动的特征是类似的。因此，短期利率网格应该反映那些基本性质。但是，我们还知道一旦短期利率网格被确定，它就隐含了一定的期限结构。因此，构造短期利率网格使得初始期限结构匹配现在观察到的期限结构看起来是合适的。利用前面几节发展的概念和工具很容易实现这个目标。 398

Ho-Lee 模型

让我们按照标准格式将短期利率网格的节点编索引为 (k, s)，这里 k 是时间，$k=0, 1, \cdots, n$，s 是状态，时间 k 时 $s=0, 1, \cdots, k$。我们必须在每个节点指定短期利率 r_{ks}。

指定短期利率的一种简单方法是规定：

$$r_{ks}=a_k+b_k s \tag{14—3}$$

这就是 Ho-Lee 形式的模型。对 $k=0$，1，…，n，该模型仅仅剩下选择参数 a_k 和 b_k。在给定时间，节点之间的变化完全被参数 b_k 决定。事实上，对时间 $k-1$ 的任何节点（$k-1$，s），下一个短期利率或者是 a_k+b_ks 或者是 $a_k+b_k(s+1)$。这两个短期利率的差是 b_k。事实上，很容易证明（见练习 6）单期利率的（风险中性）标准差恰好是 $b_k/2$。因此，我们称 b_k 为**波动参数**（**volatility parameter**）。参数 a_k 是时间 0 到时间 k **总漂移**（**aggregate drift**）的度量。如果我们仍在状态 0，短期利率就增加到 a_k。

在标准的 Ho-Lee 模型中，波动参数都设定等于常数 b，它是被观察到的利率占 1/2 的因子波动特征。因此，仅仅剩下选择 a_k，而它们可以选择为匹配时间 0 时观察到的期限结构。

如果时间是 0，1，…，n，那么存在 $n+1$ 个 a_k 值需要确定，并且有 $n+1$ 个现货利率需要匹配。因此，我们有同样数目的变量和条件。惟一的困难是 a_k 和现货利率之间的关系稍微有点迂回，但仍能够用数值方法实现这种匹配。

例 14.7（14 年的匹配） 考虑第 4 章应用的 14 年的期限结构。我们将假定它是观察到的现货利率曲线。为了使它与完整的 Ho-Lee 模型匹配，我们必须就波动程度作出一些假设。假定我们已经度量到波动程度是每年 0.01，这意味着短期利率在 1 年里可能要波动 1 个百分点。

我们可以用包括方程求解程序的电子表格包实现这种匹配。详细情况见图 14—11。该图的前两行显示 14 年的时间里假设的现货利率。下面一行说明 Ho-Lee 模型中应用的参数 a_k。这些参数被认为是根据程序变化的。以这些参数为基础，即可构造短期利率网格，如图 14—11 后面部分显示的。以短期利率网格为基础，前推方程被构造为另一个网格。任何一列元素的和给出当时到期的零息债券价格。由这些价格可以间接地计算现货利率。运行方程求解程序，调整 a_k 直到最底部一行匹配第二行给出的假设现货利率值。

年		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
即期利率		7.67	8.27	8.81	9.31	9.75	10.16	10.52	10.85	11.15	11.42	11.67	11.89	12.09	12.27	
δ		7.67	8.863	9.878	10.79	11.49	12.18	12.64	13.12	13.5	13.79	14.1	14.23	14.4	14.51	
状态	13														14.77	
	12													14.64	14.75	
	11												14.45	14.62	14.73	
	10	短期利率								14.30	14.43	14.60	14.71			
	9										13.97	14.28	14.41	14.58	14.69	
	8									13.66	13.95	14.26	14.39	14.56	14.67	
	7								13.26	13.64	13.93	14.24	14.37	14.54	14.65	
	6							12.76	13.24	13.62	13.91	14.22	14.35	14.52	14.63	
	5						12.28	12.74	13.22	13.60	13.89	14.20	14.33	14.50	14.61	
	4					11.57	12.26	12.72	13.20	13.58	13.87	14.18	14.31	14.48	14.59	
	3				10.85	11.55	12.24	12.70	13.18	13.56	13.85	14.16	14.29	14.46	14.57	
	2			9.92	10.83	11.53	12.22	12.68	13.16	13.54	13.83	14.14	14.27	14.44	14.55	
	1		8.88	9.90	10.81	11.51	12.20	12.66	13.14	13.52	13.81	14.12	14.25	14.42	14.53	
	0	7.67	8.86	9.88	10.79	11.49	12.18	12.64	13.12	13.50	13.79	14.10	14.23	14.40	14.51	
	14															1E-05
	13														3E-05	2E-04
	12													6E-05	4E-04	0.001
	11	初级价格											1E-04	8E-04	0.002	0.004
	10											3E-04	0.002	0.004	0.008	0.012
	9										8E-04	0.003	0.008	0.014	0.02	0.024
	8									0.002	0.007	0.015	0.024	0.031	0.036	0.036
	7								0.004	0.014	0.027	0.04	0.048	0.05	0.047	0.041
	6							0.009	0.027	0.048	0.063	0.069	0.067	0.059	0.048	0.036
	5						0.02	0.052	0.081	0.096	0.095	0.083	0.067	0.05	0.036	0.024
	4					0.044	0.098	0.131	0.136	0.12	0.095	0.07	0.048	0.031	0.02	0.012
	3				0.097	0.175	0.196	0.175	0.136	0.096	0.063	0.04	0.024	0.014	0.008	0.004
	2			0.213	0.291	0.263	0.196	0.131	0.082	0.048	0.027	0.015	0.008	0.004	0.002	0.001
	1		0.464	0.427	0.291	0.175	0.098	0.053	0.027	0.014	0.007	0.003	0.002	8E-04	4E-04	2E-04
	0	1	0.464	0.213	0.097	0.044	0.02	0.009	0.004	0.002	8E-04	3E-04	1E-04	6E-05	3E-05	1E-05
		1	0.929	0.853	0.776	0.7	0.628	0.56	0.496	0.439	0.386	0.339	0.297	0.26	0.227	0.198
远期利率			7.67	8.27	8.81	9.31	9.75	10.16	10.52	10.85	11.15	11.42	11.67	11.89	12.09	12.27

图 14—11　期限结构匹配

观察到的即期利率曲线在图的上部。在即期利率下面是假设的 a_k 值。利用这些 a_k 值，可以构造短期利率网格并利用前推方程计算初级价格。将初级价格逐列相加得到零息债券价格，而这些零息债券价格被转化成最下面一行的远期利率。调整假设的 a_k 值并运行解方程的程序，直到最下面一行与上面的即期利率一致。

400 电子表格方法利用了前推方程，并且当时期数不大时它是一种合适的方法。当时期数确实很大时，最好利用现货利率 s_1 仅仅取决于 a_0，s_2 仅仅取决于 a_0 和 a_1 等等这个事实。因此，a_i 能够通过一个很快的过程按顺序地求出。

布莱克－德曼－托伊（Black-Derman-Toy）模型

由式（14—3）给出的模型的另一个替代选择是假定短期利率网格上的值具有如下形式：

$$r_{ks}=a_k e^{b_k s} \qquad (14—4)$$

这可以看成适用于 $\ln r_{ks}$ 的 Ho-Lee 模型。在这种情况下，b_k 代表时间 $k-1$ 到时间 k 的短期利率的对数的波动。

在最简单形式的布莱克－德曼－托伊模型中，b_k 的值都等于 b。因此，指定 a_k 要使得隐含的期限结构匹配观察到的远期利率，其计算方法与 Ho-Lee 模型的计算方法很相似。

匹配波动性

这一节的步骤既能拓展到现货利率本身，还能拓展到现货利率波动性[5]的匹配。为了实现这种匹配拓展，a_k 和 b_k 都是变化的。现货利率的波动性通过每个现货利率的历史记录首先被观察到。例如，2 年期零息债券利率的历史记录将提供 2 年期现货利率和现货利率的波动性的估计。很可能与各种不同到期期限相关的波动性也将不同。事实上，定义利率期限结构曲线和定义期限结构波动性曲线一样常见。

14.8 免疫

我们对利率波动及利率波动对期限结构的冲击的新理解为第 3 章、第 4

章和第 5 章讨论过的债券组合免疫的新的更高级方法打下了基础。在前面各 401
章中，不确定性没有被直截了当地处理过；相反，组合免疫是针对现货利率曲线的平行移动进行的。但是，在 14.2 节我们看到平行移动假设不仅简单，而且事实上与消除套利机会的理论不一致。而新方法没有这个缺点。

新方法是以二项式网格框架为基础的。假定我们将来（就是说直到 n 年）的特定时间有一系列现金债务要偿还。还假定我们已经确定描述短期利率的二项式网格。因此，我们能用这个网格计算债务流的初始价值。计算这种价值的方法是：首先，求时间 0 时的期限结构（用前推方程）；然后，像第 4 章我们学会的计算方法那样计算债务流的现值。两者挑一但等价地，我们可以应用债务流的风险中性贴现后推过程来计算债务流的初始价值。初始节点的价值将等于债务流的初始价值（现值）。为了支付这个债务流，我们必须拥有具有同样现值的债券组合。

第一个时期后，债务流的价值可能取两个可能价值的任何一个，这两个价值相当于两个继任节点的价值。为简便起见，假定这时不需要作任何支付。特定节点的价值将相当于用新期限结构该节点可能获得的价值的现值。同样，债券组合在两个继任节点也将有新价值。如果两个继任节点的每个节点的债券组合价值刚好匹配这些节点债务的现值，则我们的债券组合获得免疫。换句话说，要在一个时期实现免疫，我们必须匹配三个地方的现值——初始节点和两个继任节点。

这种匹配可能看起来很复杂，但由于利率期限结构的无套利性质，情况变得相当令人满意。为了弄清楚这种匹配是怎样进行的，假想时间 0 时定价 1 美元的两种不同的债券。其中一个债券是单期的，在两个继任节点都支付 $1+r_{00}$ 的无风险债券。另一个是 n 年到期、价值 1 美元的零息债券。如果现货利率上升，第二种债券下一期将具有相对较低的价值，但如果现货利率下降，下一期它将具有相对较大的价值。下一期两个债券将提供两个独立的结果，因此这些债券可构造债券组合，复制其他任何利率工具的单期绩效。特别地，它们能够组合起来复制债务的行为。

免疫问题的求解现在清楚了。利用任何两个不同的债券，我们构造下面两个状态都具有相同价值的债券组合。利用无套利性质，这个债券组合的初始价值将等于复制的债务流的初始价值。进一步，开始时和下一期不管发生哪个状态，由这些债券和债务流组成的总组合的净值刚好等于 0，在这个意义下，总组合的价值获得免疫。一个时期后，债券组合能够再平衡，获得下一期的免疫。通过每期连续再平衡（结果取决于出现的状态），在所有各期获得完全免疫是可能的。

402 **例 14.8（以前的问题）** 我们再次考虑第 4 章例 4.8 的免疫问题。这个问题中，在第五年末，我们有 100 万美元的债务。我们希望用两个债券免疫这个债务。债券 1 是价格为 65.95 美元的利率为 6%的 12 年期债券。债券 2 是价格为 101.65 美元的利率为 10%的 5 年期债券。现货利率曲线是已知的，并且等于上一节解决的 Ho-Lee 匹配问题的现货利率曲线。

为了实现免疫，我们利用例 14.7 求得的短期利率网格，因为这个短期利率网格匹配前面例子给出的期限结构。利用这个网格，我们向后推，求解每个债券和债务的价格。我们需要知道的仅仅是前面两期的结果，如图 14—12 所示。（开始的价格与网格中由于四舍五入计算的价格稍有不同。）在每种情况下，显示的价值是面值的百分点。

债券 1		70.966 36
	65.951 47	71.053 53
债券 2		109.434 2
	101.667 7	109.497
债务		67.594 99
	62.802 56	67.644 04

图 14—12　最初的价值分支

两个债券和债务的最初价值和下一期的价值如图所示。债券组合将复制一个时期的债务。

为了构造这个免疫，我们令 x_1 和 x_2 分别为组合中债券 1 和债券 2 的单位数。然后我们解如下方程：

$$65.95147x_1+101.6677x_2=628025.6 \tag{14—5}$$

$$70.96636x_1+109.4342x_2=675949.9 \tag{14—6}$$

（在时期 1 明确地复制状态 0 是不必要的，状态 0 将自动出现；否则将存在套利机会——这是不可能的。）求得的结果是：

$$x_1=2165.66 \tag{14—7}$$

$$x_2=4772.38 \tag{14—8}$$

这个解对构造短期利率网格假想的波动性相当不敏感。注意到这个解与第 4 章提出的用标准久期匹配方法求得的值 2 208.17 和 4 744.03 很接近。这个结果看起来基本上是正确的，因此尽管网格理论具有深厚的美感，但久期匹配常规方法的实际应用常常具有好的结果。

14.9　担保抵押债券*

担保抵押债券（collateralized mortgage obligations，CMO）是根据抵押贷款池构造的证券。抵押贷款池派生的现金流用各种不同的方法分割，并且单个部分定义特定 CMO 的回报。这种分割过程可能相当复杂，而不仅仅是 403
分配本金或者利息支付流，CMO 是由特定时间内改变的利息和本金部分所组成的。一般的主题存在许多变化，并且经常引进新的证券设计。

引进 CMO 背后的驱动力是房地产抵押贷款固有的提前偿还期权。房屋所有者能够在任何时间（有一些限制）偿还他们的抵押贷款余额，从而解除抵押贷款合约。这个提前偿还特征意味着抵押贷款的支付流并没有事先固定，因为本金可以提前偿还。时间安排的这种不确定性通过抵押贷款池导出的平均效应稍微得到减轻，但这种不确定性并没有被完全消除，因为提前偿还模式是不可能完全预测的。设计 CMO 是为了降低由于提前偿还引起的现

金流的可变性。

CMO 首先是由联邦住房抵押贷款公司（称为“弗雷迪·麦克”）发行的，它购买单个抵押贷款，并组成抵押贷款池。由弗雷迪·麦克发行的 CMO 是由联邦政府进行违约保险的。现在其他机构和公司也提供 CMO，但是由弗雷迪·麦克始发的 CMO 占市场的大多数。

首批 CMO 是系列 CMO，并且它们仍然很普遍。在这种结构中，本金的偿还是按照 CMO 债券的不同种类（或部分）连续安排的。通常有 4～12 只不同种类的债券。抵押贷款池的总本金首先被划分成这些债券种类。早年，抵押贷款池收到的抵押贷款债券偿付按各类现存未清偿抵押贷款债券的本金余额的比例支付各类债券的利息，除非它们被规定为 Z 类债券，这类债券欠下的利息不支付，而是累积起来加到该类债券的本金上。收到的抵押贷款债券偿付的其余部分被支付到第一类抵押贷款债券，以减少本金余额。这个过程继续下去，直到第一类抵押贷款债券被完全偿清。此后，第二类抵押贷款债券的本金开始被减少直到被偿清，如此等等。一旦前面所有各类抵押贷款债券被偿清，Z 类债券收到收入以减少（现在的本金比原来的本金大）本金并支付按该本金计算的利息。

例如，假如总共有三类抵押贷款债券：A 类、B 类和 Z 类。因此，当收到第一次抵押贷款偿付时，利息被支付到 A 类和 B 类，其余收益被分配到 A 类减少本金。Z 类债券的到期利息被偿还 A 类债券本金，从而加速了 A 类债券的清偿过程。前述的利息还增加了欠 Z 类债券的本金。当 A 类债券被偿清时，本金偿付转到 B 类债券，最后才转到 Z 类债券。一个 20 年期的抵押贷款池的本金余额模式描述如图 14—13 所示。

CMO 的定价很大程度取决于假想的提前支付模式。一个简单方法是假定确定的提前支付模式。事实上，存在一种被公共证券协会（PSA）采用的基准模式。这种模式假定提前支付率第一个月为 0.2%（以年为基础），第二个月为 0.4%，第三个月为 0.6%，如此等等，直到第 30 个月。以后，提前支付率假定固定为每年 6%，即每月 0.5%。对这种模式，或与此类似的

模式，容易规划出任何一种 CMO 债券的现金流模式。因此，相应的 CMO 各类债券的价值能用现在的现货利率曲线直接贴现求得。不需要应用网格或树形结构计算。

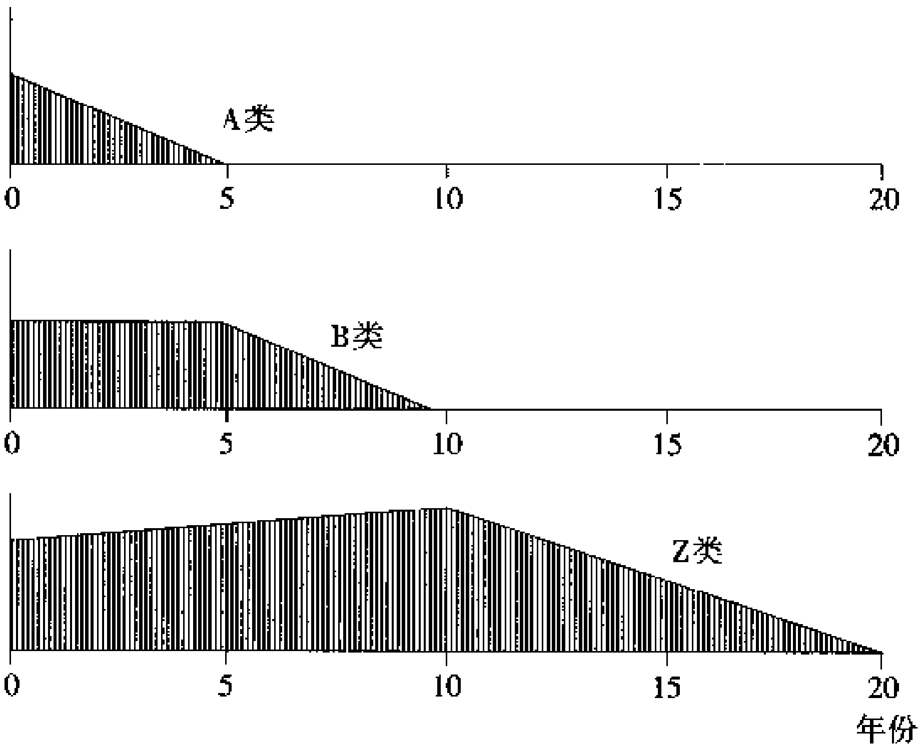


图 14—13　三类系列 CMO 的本金余额模式

A 类在其他种类 CMO 之前偿还本金。当 A 类被偿清时，偿付 B 类。Z 类 CMO 在前面所有各类 CMO 被偿清前不收取利息。相反，它的利息被累积起来，增加了本金余额。

实际上，提前支付取决于现行利率。当利率比较低时，房屋所有者更可能为他们的贷款再融资（满足现存贷款提前支付的需要）。用这种模型，CMO 类债券能够用我们已经研究过的网格和树形技术定价。 404

例 14.9（奎克，买这种 CMO） 乔纳逊·奎克先生，是白瀑布市的财政长官。他年轻，受过良好的教育，并且想把该市的财政事务现代化。一家大的纽约银行已经敦促他为白瀑布市的财政账户购买一部分由弗雷迪·麦克始发的 A 类 CMO 债券。这种 CMO 共有四类：A 类、B 类、C 类和 Z 类，每一类分配利率为 12%的 30 年期抵押贷款池的总本金的四分之一。他已经被

告知这种抵押贷款已被联邦政府担保。现在的利率是 10%，并且他给 A 类债券的报价是 105.00。

奎克先生决定给这种 CMO 债券实施简单规范的定价。为此，他首先作了几个简单计算。他求出 30 年的利率为 12%的抵押贷款每年的偿还额（见第 3 章）是 12.41 美元/百美元。在 A 类债券没有被偿清时，B 类和 C 类将要偿付的利息是 25×12%＝3。

然后，他构造了一个覆盖 4 年的短期利率网格，如图 14—14 上部所示。（该网格从左边最上面节点开始。继任节点是下面一行的两个节点。）这个网格的风险中性概率为 0.5。接着，指定估计的提前偿付率。当短期利率下降时，指定 5%的年提前偿付率，当短期利率上升时，指定 2%的年提前偿付率。然后他将剩余的贷款池部分置于短期利率网格上（如图 14—14 的单独列阵所示）。

405

短期利率网格			
0.100			
0.095	0.115		
0.090	0.110	0.130	
0.085	0.105	0.125	0.145

贷款池网格			
1.000			
0.950	0.980		
0.903	0.931	0.960	
0.857	0.884	0.912	0.941

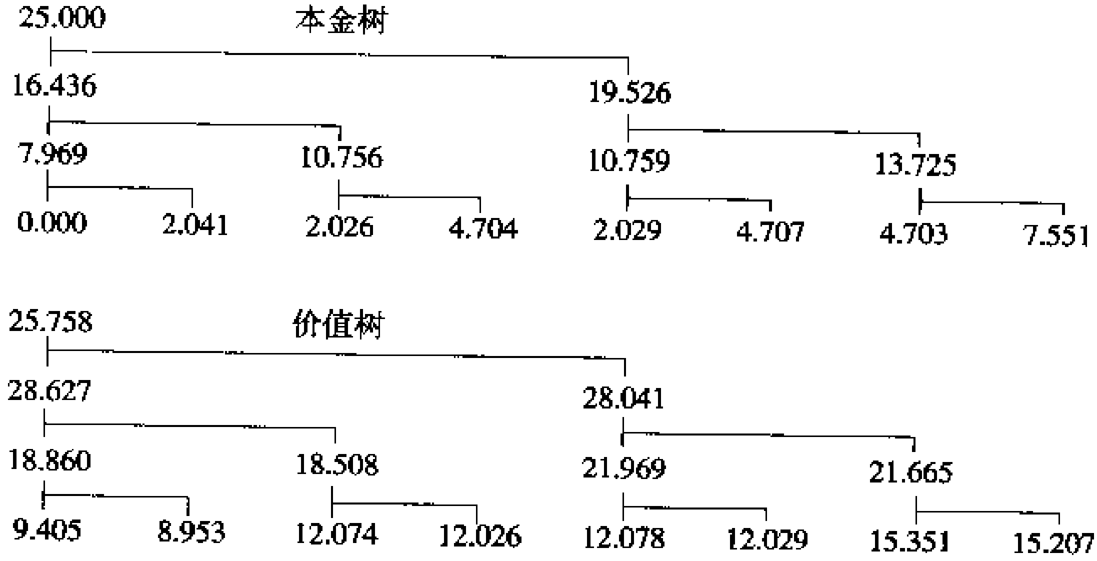


图 14—14 奎克的 CMO 定价

图的上方显示的是短期利率网格。与之相邻的是显示相应的贷款池规模部分的网格。这些网格从最上端开始并向下运动。向下运动是向正下方移动，而向上运动是向右下方移动。网格下方是应该支付 A 类债券的本金树，最后是 A 类债券相应的价值树。

奎克必须掌握欠 A 类债券的本金的线索。很不幸，该本金在原来网格是路径依赖的。所以他决定应该使用二叉树而不是网格。他规定初始本金是 25，因为 A 类债券分配总本金的 25%。他按向下流动的方式排列他的树，如图 14—14 所示。作为计算的例子，树上的最终价值是：

$$13.725\times1.12-12.41\times0.960+2\times3.00-(0.960-0.941)$$
$$\times[13.725+50+25(1.12)^3]=7.551$$

简而言之，新本金是旧本金乘以 1 加贷款利率（12%），减去剩余贷款池的总偿付，减去应该支付到 B 类和 C 类（但不是 Z 类）的利息，再减去新的提前偿付额（它是贷款池规模的变化乘以剩余的总本金）。这个树三年后终止。奎克先生假定剩余的少量本金将在下一年偿付到 A 类债券。

为了求得 A 类债券的价值，他用一个树实施风险中性后推定价过程。第三年节点上的价值等于第三年的现金流加上下一年的本金和利息的贴现值。前面节点的价值等于该节点的现金流加继任节点价值的期望值的贴现值。例如，最终节点的价值是：

$$7.551\times1.12/1.145+12.41\times0.960-2\times3.00+(0.960-0.941)$$
$$\times[13.725+50+25(1.12)^3]=15.207$$

前面一行最终节点的价值是： 406

$$12.41\times0.980-2\times3.00+(0.980-0.960)[19.526+50+25$$
$$\times(1.12)^2]+0.5(15.351+15.207)/1.130=21.665$$

总价值是 25.758，将其标准化为基数 100 的价值是 $4\times25.758=103.032$。奎克先生断定 105.00 的报价可能有点高。

因此，在每个短期利率加上一个百分点后运行他的电子表格程序求得的价值是 101.112，并且推算出有效的修正久期是 $D_M=100(103.032-101.112)/103.032=1.863$ 年。这与 A 类债券很快被偿清的结论是一致的。

奎克先生审查其他各类债券，他相信可以提供很高的财务回报，并且他的分析一定会提供极大的智力工作回报。

前面的例子说明 CMO 的定价可能具有相当的挑战性。如果我们要对该

例子应用树形方法，但按每月为基础并对其他种类债券定价，将要求很大的树。当然，主要的困难在于本金是路径依赖的。实际上，由于这个原因，CMO 定价技术通常以模拟（蒙特卡罗）方法为基础。但是，从该例子还能够明白过去几章概括的概念性原理适合应用于这个金融领域。

14.10 利率动态模型*

在前面几节，通过规定每个时间和状态的短期利率，短期利率被直接指定。虽然这是一种实用的好方法，但另一种可选择的方法是规定短期利率为伊藤方程决定的过程（类似于定义股票行为的过程）。这允许我们在连续时间进行推导。

在这种方法中，我们规定（瞬时）短期利率 $r(t)$ 满足伊藤型方程：

$$dr=\mu(r,t)dt+\sigma(r,t)d\hat{z} \tag{14—9}$$

这里 $\hat{z}(t)$ 是风险中性世界的标准维纳过程。给定初始条件，该方程定义随机过程 $r(t)$。

许多这种模型被提出来作为实际利率过程的良好的近似。我们列举一些著名的模型：

1. Rendleman 和 Bartter 模型

$$dr=mrdt+\sigma\cdot rd\hat{z}$$

这个模型模拟了股票动态应用的标准几何布朗运动模型。它导致将来短期利率的对数正态分布。但是，现在很少有人提倡它作为实际的短期利率过程模型。

407 **2. Ho-Lee 模型**

$$dr=\theta(t)dt+\sigma d\hat{z}$$

这是 Ho-Lee 模型连续时间的极限。函数 $\theta(t)$ 的选择要使得推导的远期利率曲线匹配现在的期限结构。该模型潜在的困难是对某些 t 而言，$r(t)$ 可

能取负值。

3. Black-Derman-Toy 模型

$$d\ln r=\theta(t)dt+\sigma\cdot d\hat{z}$$

实际上，除了基础变量是 $\ln r$ 而不是 r 外，这个模型与 Ho-Lee 模型是一样的。应用伊藤引理，它可以转化为如下的等价形式：

$$dr=\left[\theta(t)+\frac{1}{2}\sigma^2\right]rdt+\sigma\cdot rd\hat{z}$$

4. Vasicek 模型

$$dr=a(b-r)dt+\sigma\cdot d\hat{z}$$

这个模型具有**均值回复**（**mean reversion**）特征，它倾向于被拉回到 b 值。而且，$r(t)$ 可能取负值，但由于均值回复效应，取负值的可能性低于其他模型。事实上，如果没有随机项（也就是 $\sigma=0$），那么当 r 高于 b 时，r 将下降，而当 r 低于 b 时，r 将上升。许多研究人员和从业者认为均值回复特征相当重要，因为它让人感到利率有一个天然的家（大约 6%），而且如果利率远远地偏离了这个要害值，那么存在返回该要害值的强烈倾向。

5. Cox，Ingersoll 和 Ross 模型

$$dr=a(b-r)dt+c\sqrt{r}d\hat{z}$$

在这个模型中，不仅漂移值具有均值回复性，而且随机项被 $\sqrt{r}$ 相乘，意味着过程的方差随着利率本身增加而增加。

6. Hull 和 White 模型

$$dr=[\theta(t)-ar]dt+\sigma\cdot d\hat{z}$$

这个模型基本上是加上均值回复项的 Ho-Lee 模型。

7. Black 和 Karasinski 模型

$$d\ln r=(\theta-a\ln r)dt+\sigma\cdot d\hat{z}$$

这是带有均值回复性的 Black-Derman-Toy 模型。

所有这些模型都被称为**单因子模型**（**single-factor models**），因为每个模型仅仅取决于单一的维纳过程。还存在**多因子模型**（**multifactor**），该模型 408

取决于两个或者更多的基础维纳过程。

14.11 连续时间解*

离散时间的三种一般求解方法每个都有连续时间对应的解析解：(1) 后推递归方法变成了一般化的布莱克－斯科尔斯偏微分方程；(2) 贴现风险中性价值方法变成了积分定价；(3) 向前递归方法变成了前推偏微分方程，它是布莱克－斯科尔斯方程的对偶方程。我们将给出前两种方法的详细情况。

后推方程

后推方程也许是最实用的。假定短期利率由风险中性世界的伊藤方程(14—9) 决定，并假定 $f(r, t)$ 是除最终时间的支付外没有支付的利率证券的价格函数。因此，可以证明 f 由一般化的布莱克－斯科尔斯方程决定：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial r}\mu(r,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\sigma(r,t)^2-rf(r,t)=0 \qquad (14—10)$$

边界条件限定在 $t=T$，并且取决于最终回报结构。这个方程类似于后推递归。

例如，假定我们用 $P(r, t, T)$ 表示现在的短期利率 (在时间 t 时) 是 r 的时间 T 到期的零息债券在时间 t 时的价格。定义函数 $f(r, t)=P(r, t, T)$，合适的边界条件是 $f(r, T)=1$。

在某些情况下，后推方程 (14—10) 能够求得解析解，并且可以推出利率衍生证券定价的解析公式。但是，实际上通常需要用数值解法。

例 14.10 (常数利率) 最简单的情况是短期利率由方程 $dr=0$ 决定，这意味着利率是常数。为了求得零息债券的价格，我们设定 $f(r, t)=P(r, t, T)$。但是，既然利率 r 是常数，我们可以省略对利率 r 的依赖性而

写成 $f(t)$。后推方程变成：

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}-rf(t)=0$$

这个方程也可以写成：

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{f(t)}=r\mathrm{d}t$$

或者，等价地写成： 409

$$\mathrm{d}\ln f(t)=r\mathrm{d}t$$

这个方程的解为：

$$\ln f(t)=c+rt$$

这里 c 是常数。边界条件给出 $f(T)=1$，或者等价地有 $\ln f(T)=0$。因此，我们推出 $c=-rT$。从而最终解是

$$P(t,T)=e^{-r(T-t)}$$

这与我们知道的利率为常数时的债券价值是一致的。

例 14.11（Ho-Lee 模型解） 作为解析解的稍微复杂一点的例子，考虑一个特殊情况，短期利率由如下方程决定：

$$\mathrm{d}r=a\mathrm{d}t+\sigma\cdot\mathrm{d}\hat{z}$$

我们试图求出零息债券的价格 $P(r,t,T)$。我们设定 $f(r,t)=P(r,t,T)$，并解式（14—10）。受前面例子的解的鼓励，我们试一试如下形式的解：

$$f(r,t)=A(t,T)e^{-r(T-t)}$$

将它代入布莱克－斯科尔斯方程，我们求得：

$$\frac{\mathrm{d}A(t,T)}{\mathrm{d}t}-(T-t)A(t,T)a+\frac{1}{2}(T-t)^2\sigma^2A(t,T)=0$$

这里各项共同的因式 $e^{-r(T-t)}$ 已经被约去。从上述方程可以推出如下方程：

$$\mathrm{d}\ln A(t,T)=\left[(T-t)a-\frac{1}{2}(T-t)^2\sigma^2\right]\mathrm{d}t$$

根据边界条件 $\ln A(T,T)=0$，我们求得：

$$\ln A(t,T)=-\frac{1}{2}(T-t)^2a+\frac{1}{6}(T-t)^3\sigma^2$$

因此，对价格 $P(r, t, T)$ 我们有一个明确的公式。

风险中性定价公式

贴现的风险中性定价公式在连续时间情况同样有效，而且它能够用于定义利率衍生证券的价值。假定该证券在时间 t 支付 $Y(r, t)$ 的股息，并假定短期利率由如下风险中性过程决定：

$$dr=\mu(r,t)dt+\sigma(r,t)d\hat{z}$$

因此，该证券在时间 0 时的价值是：

$$v(0)=\hat{E}\left\{\int_0^T \exp\left[\int_0^t -r(s)ds\right]Y(r,t)dt\right\} \tag{14—11}$$

410 这里 $\hat{E}$ 表示关于过程 $\hat{z}$ 定义的风险中性概率的期望。当然，这个公式很少被直接用于定价，但它确实提供了模拟的基础。

14.12 小结

利率证券极其重要，因为几乎每种投资都要承受利率风险。利率衍生证券，如债券期权、互换、可调整利率抵押贷款和抵押担保证券能够帮助控制利率风险。利率证券的分析需要期限结构变化模型。仅仅在期限结构曲线上增加随机性的简单模型是不合适的，因为它们可能漫不经心地承认套利机会。

一种优美而可行的方法是定义横跨几个时期的短期利率网格。标在每个节点的利率就是适用于该节点一个时期贷款的利率。网格弧形指定了两组概率。第一组概率定义实际概率，给定各种转变的概率。第二组概率定义用于定价的风险中性概率。事实上，利率衍生证券定价时仅仅需要第二组概率。

一旦短期利率网格和风险中性概率一起被构造，像债券这样的证券就能够通过网格从头至尾用风险中性定价公式后推定价。节点的短期利率确定了通过该节点的定价过程的贴现因子。

表面上很复杂的证券，如债券期权、债券期货期权和可调整利率抵押贷款能够用风险中性贴现方法定价。在有些情况下，确定节点现金流的必要数量是路径依赖的，这些数量既取决于节点本身，也取决于到达该节点的路径。在这种情况下，可以用一个树而不是网格精确记录贴现风险中性价值必要的信息。但是，这样会导致节点数目的极大增长。存在一种特殊的称为校准的方法，该方法将明显路径依赖的情况转化成不是路径依赖的情况。当节点的现金流取决于节点本身，并且是基础路径依赖变量的线性函数时，该方法也是适用的。可调整利率贷款可以用这种方法定价。

完整的期限结构可以从短期利率网格得到。这样做的一种方法是给各种可能到期期限的零息债券定价。这种方法要求大量独立的定价过程。求期限结构更有效的方法是构造初级价格网格，这可以用原来的短期利率网格的单一前推实现。

短期利率网格必须精心地构造，以便给出有用的结果。通常的策略是构造短期利率网格使得隐含的期限结构匹配现在的期限结构。有些波动性也常常要匹配。两个最简单的方法是 Ho-Lee 方法和布莱克－德曼－托伊方法。

短期利率网格还提供了债券组合免疫的新方法。在这种方法中，使债券组合在短期利率最初的上行变化和下行变化的利率风险得到免疫。

利率衍生证券定价方法的重要而具有挑战性的应用是担保抵押债券 411
(CMO) 的定价。这些金融工具可能具有很复杂的结构，正确的定价要求精心的分析。通常，定价的数学表述的某些方面是路径依赖的，因此必须应用树形结构方法或蒙特卡罗方法。

通过确定短期利率伊藤过程可以构造连续时间期限结构模型。这个过程由规定的风险中性标准维纳过程推动。其中某些模型可推导出有关期限结构的解析表达式。

练习

1. (可赎回债券⊕) 构造一个时期(年)0 到时期 9 的短期利率网格,初始利率为 6%,后继利率由倍数因子 $u=1.2$ 或者 $d=0.9$ 决定。指定风险中性概率为 0.5。

(a) 利用这个网格求 10 年期、利率为 6%的债券的价值。

(b) 假定这种债券可以在 5 年后的任何时间被发行方赎回。(当债券被赎回时,支付债券面值加应该支付的利息并且债券被注销。)这种债券的公平价值是多少?

2. (通用的可调整公式) 令 V_{ks} 为时期 k 和状态 s 开始的可调整利率贷款,最初的本金是 100。该贷款在时期 n 被完全偿清。每期索取的利率为该期的短期利率加上溢价 p。一期的贷款偿付为按剩余时期的相同利率分期等额偿还该贷款的金额。写出 V_{ks} 的明确的后推递归公式,它是 k 和 s 的函数。

3. (债券期货期权) 解释你将怎样求债券期货期权的价值。

4. (可调整利率的利率上限⊕) 假定例 14.5 的可调整利率汽车贷款被利率上限条款所修正,它保证借款者适用的利率将决不会超过 11%。对银行来说,这个贷款的价值是多少?

5. (前推构造⊕) 利用前推方程求练习 1 构造的网格的现货利率曲线。

6. (Ho-Lee 波动系数) 证明 Ho-Lee 模型单期利率的(风险中性)标准差恰好是 $b_k/2$。

7. (期限匹配⊕) 利用 $b=0.01$ 的 Black-Derman-Toy 模型匹配例 14.7 的期限结构。

8. (互换) 考虑一个普通的香子兰利率互换,A 方同意以名义本金 1 000万美元为基准每年按固定利率支付给 B 方,B 方以同样的名义本金为

412 基准每年按浮动利率支付给 A 方,期限为 6 年。假定短期利率过程由例

14.1 的网格描述。

(a) 建立一个网格，给出每个短期利率节点的浮动利率现金流的价值，并因此而决定这个现金流的初始价值。

(b) 什么样的固定利率将使互换双方相等？（与第 10 章练习 11 比较。）

9.（互换期权定价）互换期权是将来达成互换安排的期权。假定 B 公司有一笔1 000万美元的债务，期限为 6 年，利率为固定的 8.64%。A 公司提出卖给 B 公司一个用固定利率债务交换浮动利率债务的互换期权，利息支付等于短期利率、同样的本金和同样的终止期限。该互换期权可以在第 2 年初执行（恰好在前一年的支付后，并且下一年的利率是已知的）。假定短期利率过程是例 14.1 的短期利率过程，这个互换期权的价值是多少？

10.（变量变换◇）假定风险中性世界的短期利率过程由如下方程定义：

$$dr=\mu(r,t)dt+\sigma(r,t)d\hat{z}$$

这里 $\hat{z}(t)$ 是标准维纳过程。对点 $(r,\ t)$ 的小间隔 Δt，将这个方程近似表述的普通方法是用图 14—15 的二叉树。在这种近似关系中，有：

$$r^{+}=r+\sigma(r,t)\sqrt{\Delta t}$$

$$r^{-}=r-\sigma(r,t)\sqrt{\Delta t}$$

$$q=\frac{1}{2}+\frac{\mu(r,t)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma(r,t)}$$

(a) 证明一般地这个不会产生重组性网格。也就是说，证明上行运动接着一个下行运动与下行运动接着一个上行运动是不一样的。

(b) 考虑变量变换：

$$w(r,t)=\int_0^r\frac{dy}{\sigma(y,t)}$$

利用伊藤引理推出满足 $w(r,\ t)$ 的过程，并证明它的波动项是常数。推断 $w(r,\ t)$ 的二项式近似是重组性的。（见图 14—15。）

(c) 找出几何过程中变量的适当变化：413

$$dr=\mu r dt+\sigma r d\hat{z}$$

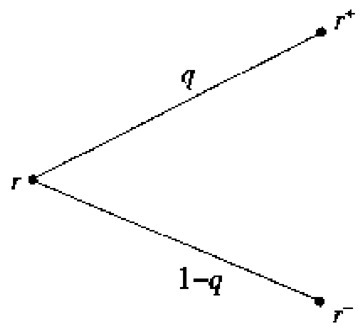


图 14—15　近似方法

如果使用合适的变量变换，短期利率过程能够用二项式网格近似。

11.（Ho-Lee 期限结构）参考例 14.11。令 $F(t)$ 是时间 0 到 t 的远期利率。利用远期利率的基本定义，我们有如下恒等式：

$$e^{-F(t)t}=P(r,0,t)$$

求 $F(t)$ 的明确公式。

12.（连续 0◇）盖文要深刻地探究定价理论，所以他决定设计方程（14—11）的一个应用。他自己提出风险中性世界的简单利率模型可以是：

$$dr=\sigma\cdot d\hat{z}$$

这里 $\hat{z}$ 是标准布朗运动，并且 $r(0)=r_0$。以方程（14—11）为基础而不用布莱克-斯科尔斯方程，他推算出时间 T 支付 1 美元的零息债券价值的公式。你能吗？与例 14.11 比较。

【注释】

[1] 伦敦银行间拆放利率（LIBOR）是通过伦敦金融中介机构借入美元使用的利率。这种利率有各种不同期限的，如一个月的、三个月的、六个月的等等。

[2] 这个公式假定 D_{ti} 仅仅取决于 t 和 i。对一些复杂的证券，这个假设不成立，因此定价过程是路径依赖的。这些情况在以后各节中描述。

[3] 贷款的价值可以等价地计算为 $-10\,000+\sum_{k=1}^{5}[2\,638/(1+s_k)^k]$，

其中 s_k 是隐含在短期利率网格中的现货利率。

[4] $j-1$ 期的递归要求 j 个单独定价。因此，为了定价时期 k 到期的债券要求 $1+2+\cdots+k=(k+1)\ k/2$ 个独立定价。因为 n 个期限都必须这么做，定价总数是 $\sum_{k=1}^{n}(k+1)k/2=[n(n+1)^2/6][1+1/(n+1)]$。一个人穿过整个树，定价数目是 $n(n+1)\ /2$。

[5] 使用的概率是风险中性概率，所以严格地说，b_k 决定风险中性波动性。但是，对小的时期实际概率接近于 1/2，所以实际的波动性和风险中性波动性近似相等。

【参考文献】

介绍利率衍生证券的一般教材见文献 [1～2]。前推方程在詹姆西戴安(Jamshidian) 的文献 [3] 中介绍。Ho-Lee 模型最初是在文献 [4] 中发展的，没有短期利率网格概念的帮助。短期利率网格应用在文献 [5] 中提出布莱克-德曼-托伊模型。更复杂的利率过程是希思（Heath)，贾罗（Jarrow）和默顿（Morton）的利率模型见文献 [6]，它不是单因子模型可描述的。对 CMO 和抵押证券的概述，可参见文献 [7]。连续时间模型，见文献 [8～13]。练习 10 是以文献 [14] 为基础的。

1. Hull，J. C. (1993)，"*Options, Futures and Other Derivatives Securities*"，Prentice-Hall，Englewood Cliffs，1997.
2. Duffie，D. (1996)，*Dynamic Asset Pricing*，2nd ed.，Princeton University Press，Princeton，NJ.
3. Jamshidian，F. (1991)，"Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models"，*Journal of Fixed Income*，1，62—74.
4. Ho，T. S. Y.，and S. —B. Lee (1986)，"Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims"，*The Journal of Finance*，41，1011—1029.

5. Black, F., E. Derman and W. Toy (1990), "A One factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, January-February, 46, 33—39.

6. Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1990), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 419—440.

7. Fabozzi, F. J., Ed (1988), *The Handbook of Mortgage-Backed Securities*, rev. ed., Probus, Chicago, IL.

8. Brennan, M., and E. Schwartz (1979), "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, 3, 133—155.

9. Vasicek, O. A. (1977), "A Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 177—188.

414 10. Hull, J., and A. White (1990), "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3, 573—592.

11. Black, F., and P. Karasinski (1991), "Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal", *Financial Analysts Journal*, July-August, 47, 52—59.

12. Rendleman, R., and B. Bartter (1980), "The Pricing of Option on Debt Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, March, 11—24.

13. Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, 385—407.

14. Nelson, D., and K. Ramaswamy (1989), "Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models", *Review of Financial Studies*, 3, 393—430.

第15章 最优组合增长

有关多期投资情境的结论并不仅仅是单期投资结论的变化——多期投资往往要推翻单期投资的结论。这个状况使得多期投资问题在理论知识和实践上都令人兴奋。一旦多期投资的微妙性被人所了解，按增加的投资绩效衡量的报偿可能是巨大的。 417

幸运地，多期情景分析的概念和方法建立在前面各章基础上。内在收益率、现值、比较原理、组合设计和网格与树形定价方法都可以自然地拓展到一般情境。但是像波动是“不好的”或多样化是“好的”不再是普

遍的真理。这些内容相当有趣。

这一章从拓展内在收益率的基本概念说明如何设计具有最大增长的组合开始。下一章拓展现值分析。

15.1 投资轮盘

理解组合增长要求人们采取长期视角。为了突出这种视角的重要性，考虑如图 15—1 的投资轮盘。你可以在轮盘的三个部分的任何一部分下赌注。事实上，你可以在每个部分投资不同的数量。各个部分的数字表示轮盘旋转后该部分赢得的金额。例如，如果旋转后轮盘停下来，指针指向最上面那部分，你在该部分的 1 美元投资将获得 3 美元（这意味着净收益为 2 美元）。

上面部分很有吸引力，尽管上半部分是整个轮盘的二分之一，但获得的收益是 3 比 1。1 美元的赌注（或投资）将获得 0 美元或者 3 美元的回报，每种情况的概率都是 0.5。因此，预期收益是 $\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{2}\times 0-1=0.5$ 美元。这是相当有利的结果。

418

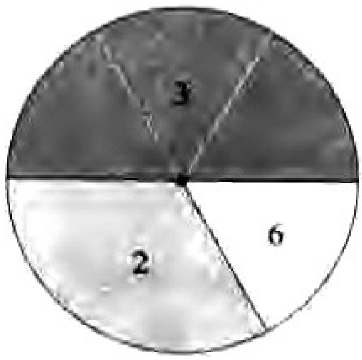


图 15—1 投资轮盘

显示的数字是该部分一单位投资的回报。如果投资被恰当地管理，轮盘是有利的，并且预期能够引起资本增长。

另一方面，左下部分有不利的可能性，因为在三分之一的区域内，它的收益仅仅为 2 比 1。右下部分稍微好一点，它有均衡的收益可能性，因为在 6 分之一的区域内，它的收益为 6 比 1。

现在假定你从 100 美元开始，有机会重复地将全部或部分资金下注，并将轮盘连续旋转赢得的钱再投资。由于上半部分的有利情况，你可以通过明智的投资使你的资本长期增长。问题是：究竟什么构成明智的投资？

以我们计算的可能性为基础，看起来将你的注意力（和资本）集中在上部是合适的。一种策略将是把你所有的钱全部投资在该部分。事实上，这是产生最高单期预期收益的策略。100 美元的投资在第一次旋转预期获得额外的 50 美元。问题是你可能半途而废，不能继续其他轮盘旋转了。即使你赢了并且继续这个策略，你还将在下一次旋转时面临毁灭的风险。大多数人发现给定重复赌博机会时，这种策略太冒险。

第二种更保守的策略将是每次旋转时投资一半钱放在上半部分，留下另一半。这种策略如果出现不利的结果，你不会完全退出赌博。[1]现在还并不清楚这种策略是否是能够操作的最好策略。

轮盘分析

为了开始系统地寻找有效的策略，让我们把考察局限在固定比例策略。这些策略规定投资轮盘每一部分的比例，这些比例用于把现在的财富作为赌注每次旋转时分配到每一部分。让我们将各部分编号为 1、2 和 3，分别对应于上、左和右三部分。因此，该轮盘的一般的固定比例策略是由三个数的数组（α_1，α_2，α_3）描述的，这里 $\alpha_i \geqslant 0$，$i=1$，2，3，且 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leqslant 1$。$\alpha_i$ 对应于投资于不同部分的赌注比例。剩余部分 $1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$ 留作储备。作为例子， 419
前面提到的每次将你的资本的一半投资到上部的策略是（$\frac{1}{2}$，0，0）。

每个固定比例策略都导致一系列决定资本增长的倍数因子。例如，假定你用策略（$\frac{1}{2}$，0，0）下注 100 美元。轮盘的一次旋转有两种可能性：

(1) 你以概率1/2获得有利的结果，最后得到 $50+3\times50=200$ 美元；(2) 你以概率 1/2 获得不利的结果最后仅得到 50 美元。一般地，用这个策略每次旋转后你的钱要么翻倍要么减半，每种可能性出现的概率都是 1/2。因此，一次旋转的倍数因子是 2 和 1/2，每个因子出现的概率是 1/2。依照这个策略进行长期系列投资后，你最初的 100 美元将可能被形如 $(\frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2})$ (2) $(\frac{1}{2})$ (2) (2) … (2) $(\frac{1}{2})$ 的总的乘数相乘，其中 2 的个数和 1/2 的个数大致相等。因此，总因子可能是 1。这意味着在许多旋转的过程中，你的资本倾向于上下波动，但不可能极大地增长。

另一个可替代的策略是将你的钱的四分之一在上部下注，对应于策略 $(\frac{1}{4}, 0, 0)$。如果旋转的结果是上部，你的钱将被 $1-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$ 相乘。如果上部不是旋转的结果，你的钱将被 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 相乘。平均计算，两次旋转提供 $(\frac{3}{2})(\frac{3}{4})=\frac{9}{8}$ 的因子。因此，平均地看，每次旋转提供 $\sqrt{\frac{9}{8}}=1.060\ 66$ 的因子。根据这个策略，你的钱每次旋转将平均按 6%的速度增长。(练习 1 证明了这种策略在极限意义下是最优的。)

15.2 增长的对数效用方法

投资轮盘是特定策略导致随机增长过程的广泛而重要的投资情境的描述。这类情境包括这一节后面说明的普通股票投资。如果 X_k 表示第 k 次试验后的资本，那么一般公式是：

$$X_k=R_kX_{k-1} \tag{15—1}$$

$k=1, 2, \cdots$ 在这个方程中，R_k 是随机回报变量。我们假定它是**平稳独立**

(**stationary independent**)过程，其中所有的 R_k 具有同样的概率分布，并且是相互独立的。

一半资本投资于上部这种策略的投资轮盘对应于 R_k 各以 0.5 的概率取 2.0 或者取 0.5 两个值的模型。变量 R_k 都有同样的概率密度，并且是相互独立的（也就是说其他结果不影响现在的结果）。

在一般资本增长过程中，n 次试验结束时的资本是：

$$X_n = R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 X_0$$

两边取对数得： 420

$$\ln X_n = \ln X_0 + \sum_{k=1}^{n} \ln R_k$$

再作简单处理得：

$$\ln\left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{1/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln R_k \qquad (15—2)$$

考虑当 $n \to \infty$ 时式（15—2）的右边，变量 $\ln R_k$ 每个都是独立并且具有同样概率分布的随机变量。因此，大数定律[2]断定：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln R_k \to E(\ln R_1)$$

（在这个表达式中我们可以用 $E\ln R_1$，因为对所有 k 期望值是一样的。）

我们定义 $m = E(\ln R_1)$。因此从式（15—2）我们有：

$$\ln\left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{1/n} \to m$$

这是我们现在要着重强调的基本结果。

⇒**对数绩效**　*如果 X_1，X_2，…是由如下过程产生的资本价值的随机序列：*

$$X_k = R_k X_{k-1}$$

那么有：

$$\ln\left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{1/n} \to m \qquad (15—3)$$

当 $n\to\infty$ 时。这里：

$$m=E(\ln R_1) \qquad (15-4)$$

在式（15—3）的两边取反对数得：

$$\left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{1/n}\to e^m$$

因此，形式上（虽然这样做不是相当合理），我们两边取 n 次幂，求得：

$$X_n\to X_0e^{mn}$$

换句话说，对大的 n 值，资本以速度 m 随 n（大致）成指数级增长。

421 前面的分析显示式（15-4）定义的数 m 的重要性。它决定了长期重复试验的投资增长率。因此，看起来选择导致最大的 m 值的策略是合适的。

对数效用形式

注意到如果我们将常数 $\ln X_0$ 加到式（15-4），我们发现：

$$m+\ln X_0=E(\ln R_1)+\ln X_0=E(\ln R_1X_0)=E(\ln X_1)$$

因此，如果我们定义特殊的效用函数 $U(X)=\ln X$，最大化增长率 m 的问题就等价于最大化预期效用 $E[U(X_1)]$，并且每次试验中利用同样的策略。换句话说，用对数作为效用函数，我们能够像处理单期问题一样处理该问题。通过以预期对数为标准找到第一次试验的最佳做法可以求得最优策略。这种单步观点保证了从长期看的最大增长率。

例子

许多重要而有趣的情境符合这一节提出的框架。

例 15.1（凯利赌博规则） 假定你有在某种情境投资的机会，要么将你的投资翻倍，要么什么回报也没有。出现有利结果的概率是 p。假定你有初始资本 X_0，并且你可以重复这种投资许多次。你每次应该投资多少呢？

这种情况很像黑桃杰克的游戏，游戏者精神上密切注意所玩的牌。通过

调整剩余牌的构成比例的游戏策略，这个游戏者平均有大约 50.75%的可能性赢一手，也就是说，$p=0.5075$。游戏者必须决定在这种情况下应该下多大的赌注。

令 α 为一次游戏投资的（或下赌注）资本比例。游戏者希望找到最好的 α 值。如果游戏者赢了，他或她的资本将按因子 $1-\alpha+2\alpha=1+\alpha$ 增长。如果他或她输了，那么该因子是 $1-\alpha$。因此，为了求 α 的对数最优值，我们将如下式子最大化：

$$m=p\ln(1+\alpha)+(1-p)\ln(1-\alpha)$$

令其关于 α 的导数等于 0，我们有：

$$\frac{p}{1+\alpha}-\frac{1-p}{1-\alpha}=0$$

上式变形可得方程：

$$p(1-\alpha)-(1-p)(1+\alpha)=0$$

或者 $\alpha=2p-1$。[3] 因此，在黑桃杰克游戏的例子中，$p=0.5075$ 时游戏者应该每手下赌注为总资本的 1.5%。专业的黑桃杰克游戏者实际上确实应用这个规则或该规则的修正版。 422

黑桃杰克看起来提供了一种安逸的生计。凯利规则策略的增长率是：

$$m=p\ln2p+(1-p)\ln(2-2p)=p\ln p+(1-p)\ln(1-p)+\ln2$$

当 $p=0.5075$ 时，可得 $e^m\approx1.0001125$，这是 0.011 25%的增长。为了将你的资本翻倍，预期你必须游戏 72/0.011 25=6 440 手（回忆第 2 章的 72 规则）。这大约需要玩 80 小时，实际上大约需要 1 个月的游戏活动。但是在这种职业的道路上存在许多障碍。

例 15.2（波动泵吸） 假定有两种资产可用于投资。一种是股票，每期各以 0.5 的概率要么价值翻倍要么价值减半。另一种资产只是保值——就像把钱放在床垫下。两种投资没有一个是很刺激的。放在股票上的投资价值将波动许多，但并没有全面的增长率。另一种投资很明显地没有增长率。然

而，利用这两种投资的组合却可以实现增长。

要明白怎么回事，假定我们每期投资一半资本于每种资产。因此，由于要确信我们的一半资本投资于每种资产，我们每期初**再平衡**（rebalance）我们的投资。在有利的结果下，我们的资本将按因子$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}+1$增长。在不利的结果下，该因子将是$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$。因此，该策略的期望增长率是：

$$m=\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}+1)+\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\approx 0.059$$

所以 $e^m=1.0607$，该组合每期的增长是大约 6%。

图 15—2 显示了 50—50 的两种资产组合与股票本身表现的模拟趋势。组合的表现超过了股票。

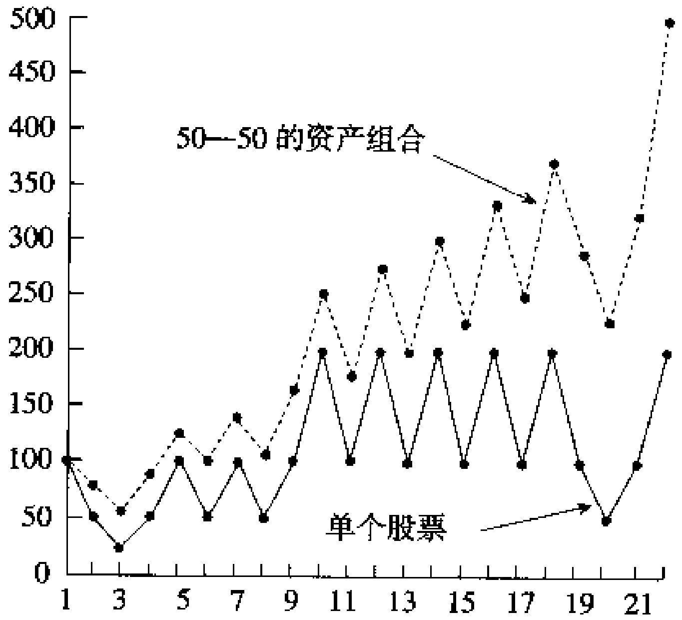


图 15—2　两种资产混合

两种普普通通的股票能够组合起来提供改进的增长。

该增长是通过股票波动的泵吸行为实现的。如果股票价格在某一时期上升，其中一些收益被储存起来以备用。另一方面，如果股票价格下降，就投

入备用的资本。为了实现比任何单一资产能够实现的更大增长，资本在这两种资产之间来回泵吸。

注意到，平均地看这种策略通过再平衡的过程自动地遵循“买低卖高”的格言。实质上，这是为什么产生增长的原因。

例 15.3（泵吸两个股票） 让我们修改例 15.2，假定两种资产的价值都具有各以 0.5 的概率要么翻倍要么减半的性质。每个资产的运动独立于其他资产。而且我们将一半资本投资于每种资产，在每期都再平衡。我们立即求得： 423

$$m=\frac{1}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}=0.111\ 6$$

因此，$e^m=\sqrt{\frac{5}{4}}=1.118$，它相当于每期 11.8%的增长率。泵吸行为与前一个例子相比大大强化了。两个波动资产之间的泵吸行为导致极大的增长率。

例 15.4（大股票组合） 假定有 n 个股票，任何一期（比如一周）的回报为 $R_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)$。这些回报是随机的，但它们每期具有同样的概率分布。不同股票的回报可能是相关的，但不同时期的回报是不相关的。通过指定权数 w_1，w_2，w_3，…，w_n（对每个 i，$w_i\geqslant 0$ 并且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$），我们构造这些股票的组合。该组合的总回报是 $R=\sum_{i=1}^{n}w_iR_i$。为了获得该组合的最大可能增长，我们选择权数使得 $m=E(\ln R)$ 最大化。如果这么做，那么从平均看该组合可能预期大致地按照因子 e^{mk} 增长，其中 k 是时期数。

我们将在这一章后面更为详细地研究这个例子。

例 15.5（投资轮盘） 让我们计算考虑各部分投资可能性的投资轮盘的完全最优策略。对某一策略[4]（α_1，α_2，α_3），我们求得如下结果：

1. 如果出现 1，$R=1+2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$。

424 2. 如果出现 2，$R=1-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$。

3. 如果出现 3，$R=1-\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3$。

为了使回报结构的预期对数最大化，我们使下式最大化：

$$m=\frac{1}{2}\ln(1+2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)+\frac{1}{3}\ln(1-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)$$
$$+\frac{1}{6}\ln(1-\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3)$$

如果我们假定对每个 $i=1, 2, 3$，其解都有 $\alpha_i>0$，通过规定关于每个 α_i 的导数等于 0，我们能够求得这个解。这样得到如下方程：

$$\frac{2}{2(1+2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)}-\frac{1}{3(1-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)}-\frac{1}{6(1-\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3)}=0$$

$$-\frac{1}{2(1+2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)}+\frac{1}{3(1-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)}-\frac{1}{6(1-\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3)}=0$$

$$-\frac{1}{2(1+2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)}-\frac{1}{3(1-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)}+\frac{5}{6(1-\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3)}=0$$

这种形式的一般方程很难解出解析式。在这种情况下，容易检验 $\alpha_1=\frac{1}{2}$，$\alpha_2=\frac{1}{3}$ 和 $\alpha_3=\frac{1}{6}$ 是方程的解。（这个问题的一般形式和解可参见练习 4。）这意味着你必须在投资轮盘的每一部分投资，并且赌注比例等于该部分出现的概率。

将这个最优策略代入到原来的预期对数目标函数，得到：

$$m=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\ln 1=\frac{1}{6}\ln\frac{3}{2}$$

因此，我们求得：

$$e^m\approx 1.069\ 91$$

因此，最优解实现了大约 7%的增长率，与上部投资 1/4 而其他两部分不投资的策略实现的接近于 6%的增长率相比要高。

图 15—3 显示的是投资轮盘 50 次模拟试验的结果。该图显示了三个策

略的结果：最优策略、四分之一的赌注下在上部的简化策略和在上部投资二分之一的蹩脚策略。另外显示的是代表 7%的增长率的曲线。该模拟具有巨大的波动性，并且其他趋势看起来与这个模拟有相当大的差别。当试验数百次时，长期效应就显示出来了，例如，就像日常股票市场投资一年的结果显示的那样。

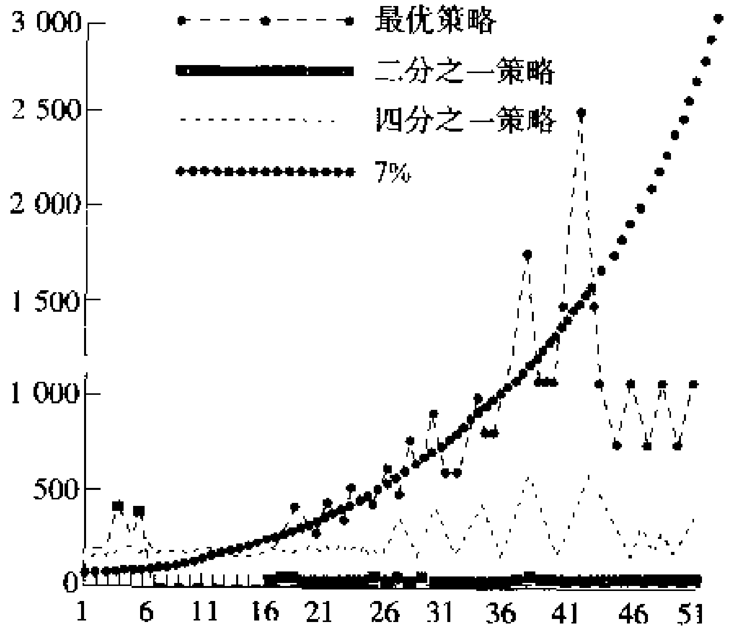


图 15—3 轮盘模拟

在最优策略下，该轮盘提供接近 7%的增长率。

注意到最优策略要求在不利的部分 2 投资，获得的收益仅为 2 比 1。这个投资充当其他部分的套期——它恰好在其他部分不赢钱的时候赢钱。[5]正像你的房屋的火灾保险一样，当你的家里发生火灾时才能获得赔偿。

15.3 对数—最优策略的性质*

虽然对数最优策略使预期增长率最大化，但短期增长率可能不同。但是，我们能够对给人印象深刻的对数最优策略作出一些明确的说明。 425

假定两个人从同样的初始资本 X_0 开始。进一步假定 A 用对数最优策略投资，而 B 用其他策略（具有较低的 m 值）投资。用 X_K^A 和 X_K^B 分别表示时期 $k=1$，2，…导出的资本流。因此，可以证明：

$$E(X_k^B/X_k^A) \leqslant 1,\ 对所有\ k\ 成立。$$

这就是说和替代策略 B 相关的资本与和最优策略 A 相关的资本的比率的期望在每个时期不会超过 1。这个性质证明赞成应用对数最优策略，并且事实上许多人被说服：这是他们应该采纳的策略。

15.4 替代方法*

对数最优策略并不必然是重复投资情境使用的最佳策略，但它是考虑替代策略时记在心中的好的参照物。这一节我们提出一些可能的替代选择。

其他效用函数

一个替代选择是利用普通的最大化预期效用框架（如第 9 章第一部分）。如果恰好有 K 个重复，我们可以定义第 K 期末财富的效用函数，相应地，试图使 $E[U(X_K)]$ 最大化。

426 应用 $U(X_K)=\ln X_K$ 只是一个特例。实际上，由于特殊的递归性质，$E(\ln X_K)$关于确定的策略的最大化恰好等价于 $E(\ln X_1)$ 的对数最优策略最大化。这是如下推导的结果：

$$\begin{aligned} E(\ln X_K) &= E[\ln(R_K R_{K-1}\cdots R_1 X_0)] \\ &= \ln X_0 + E(\ln R_1) + \sum_{k=2}^{K} E(\ln R_k) \end{aligned}$$

左边的最大化等价于 $E(\ln R_1)$ 的最大化，因为所有的 R_k 是同样的随机变量。接下来，这等价于 $E(\ln X_1)=\ln X_0+E(\ln R_1)$ 的最大化。因此，选择 $U(X_K)=\ln X_K$ 再一次把我们引导到对数最优策略。

一类有趣的效用函数是幂效用函数 $U(X)=(1/\gamma)X^{\gamma}(\gamma\leqslant 1)$。这类效用函数（因为 $\lim_{\gamma\to 0}\{(1/\gamma)X^{\gamma}-1/\gamma\}=\ln X$）；它还包括线性效用函数 $U(X)=X$。

这类函数和对数效用函数具有同样的递归性质，也就是说，从一期到另一期保留了同样的结构。这可以从下式看出来：

$$E[U(X_K)]=\frac{1}{\gamma}E[(R_K R_{K-1}\cdots R_1 X_0)^{\gamma}]=\frac{1}{\gamma}E(R_K^{\gamma}R_{K-1}^{\gamma}\cdots R_1^{\gamma})X_0^{\gamma}$$

$$=\frac{1}{\gamma}E(R_K^{\gamma})E(R_{K-1}^{\gamma})\cdots E(R_1^{\gamma})X_0^{\gamma}$$

其中最后一个方程是根据独立随机变量的积的期望值等于期望值的积这个事实得出的结果。因此，要使固定比例策略的 $E[U(X_K)]$ 最大化，只需要使 $E[(R_1X_0)^{\gamma}]$ 最大化，所以要使 $E[U(X_K)]$ 最大化，你只需要使$E[U(X_1)]$ 最大化。

如果 $\gamma>0$，幂效用函数相当具有进取性。$\gamma=1$，对应于$U(X)=X$ 的极端情况（导致期望值标准），在前面讨论投资轮盘时考虑过。我们发现使期望值最大化的策略把所有的资本投注到最有利的部分，是倾向于提前破产的策略。事实上，对满足 $1\geqslant\gamma>0$ 的任何 γ，破产都是可能的。例如，假定 $\gamma=\frac{1}{2}$。考虑两种机会：(a) 资本将以概率 0.9 翻倍，或者以概率 0.1 变成 0；(b) 资本将确定无疑地增长 25%。因为 $0.9\times\sqrt{2}>\sqrt{1.25}$，对平方根效用函数机会 (a) 优于机会 (b)。但是，在长期重复试验序列中，投资者遵循机会 (a) 实际上肯定会破产。当他们了解到将进行许多次试验时，大多数人偏好机会 (b)。类似的论断适用于 $1\geqslant\gamma>0$ 范围中的任何 γ。

更保守的是应用 $\gamma<0$。但是，许多人发现这个选择太保守。例如，假定 $\gamma=-\frac{1}{2}$。再次考虑两个机会：(a) 资本价值确定无疑地变成四倍；(b) 以概率 0.5 资本价值保持不变和以概率 0.5 被 1 000 万（或任何确定的数）相乘。因为 $-4^{-1/2}>-0.5-0.5\ (10\ 000\ 000)^{1/2}$，具有效用函数$V(X)=$

$-X^{-1/2}$的投资者将偏好机会（a）。这相当保守。而且，类似的论断适用于任何 $\gamma<0$，虽然如果 γ 接近于 0 时该论断变得不是那么让人信服。

以前面的讨论为基础，我们断定如果一个投资者使用幂效用函数，则这
427 个效用函数可能是 $\gamma<0$ 但接近于 0 的效用函数。这种效用函数接近于对数效用函数。我们能够证明类似的（虽然不是那么精确）结论对任何宽泛种类的可能效用函数都成立；也就是说，当考察长期序列时，看起来只有那些接近于对数效用函数的效用函数将是合适的。因此，虽然原则上投资者可以选择任何效用函数，根据推测反映个体风险承受能力，但重复情境倾向于将效用函数锤炼成接近于对数函数的效用函数。

大多数长期投资者确实既考虑增长率本身还考虑组合增长的波动性。这样导致既要考虑回报对数的期望值，还要考虑回报对数的方差。事实上，如果投资者采取长期视角，可以证明（在一定的假设下）这两个价值是惟一重要的价值。我们正式地提出如下结论：

⇒**增长效率命题** *一个仅考虑长期绩效的投资者将以单期回报的对数为基础，仅利用这个数值的期望值和方差评估组合的价值。*

这个命题与前面关于幂效用函数的讨论交织在一起。我们发现如果选择效用函数 $U(X_1)=(1/\gamma)\,X^{\gamma}$，则可能 $\gamma<0$ 并且 $\gamma\approx0$。因此，我们可以应用如下近似关系：

$$\frac{1}{\gamma}(X^{\gamma}-1)\approx\ln X+\frac{1}{2}\gamma(\ln X)^2$$

这说明使用这个效用函数接近于使用回报对数的期望和回报对数的方差的加权组合。换句话说，对数期望和对数方差是两个有重要意义的数量。

考虑到增长效率命题，描绘类似于普通的均值-方差有效边界的 m 对 σ 的有效边界是很自然的，这里的 m 和 σ 分别是回报对数的均值和方差。我们将在下一节对价格由连续时间方程描述的股票描绘有效边界。

15.5 连续时间增长

最优组合增长可以应用于任何再平衡时期——一年、一个月、一周或者一天。在很短时间的极限里，我们考虑连续再平衡。

事实上，存在令人信服的理由考虑极限情况：推导最优策略方程证明是相当简单的，因此计算最优解非常容易。所以，即使仅仅按每周实施再平衡，利用连续时间公式作这种计算也很方便。

连续时间公式还提供了重要的见解。例如，它很清楚地显示波动泵吸是怎么起作用的。

几种股票动态

我们首先将第 11 章提出的股票动态连续时间模型推广到几个相关股票的情形。因此，这个模型将应用到我们股票组合的分析中。 428

假定有 n 种资产。第 i 种资产的价格 $p_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)$ 由如下的标准几何布朗运动方程决定：

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{p_i}=\mu\mathrm{d}t+\mathrm{d}z_i$$

这里 z_i 表示维纳过程，但是方差参数为 σ_i^2 而不是 1。这等价于单一股票的普通模型。这里出现的新东西是资产通过维纳过程因素联系起来的。特别地，有：

$$\mathrm{cov}(\mathrm{d}z_i,\mathrm{d}z_j)=E(\mathrm{d}z_i\mathrm{d}z_j)=\sigma_{ij}\mathrm{d}t$$

我们用元素 σ_{ij} 定义**协方差矩阵 S（covariance matrix S）**，并且使用惯例 $\sigma_i^2=\sigma_{ii}$。我们通常假定 S 是非奇异的。

由第 11 章，在时间 t 每个资产 i 有对数正态分布：

$$E\left[\ln\left(\frac{p_i(t)}{p_i(0)}\right)\right]=\left(\mu_i-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)t\equiv v_i t$$

并且有：

$$\operatorname{var}\left[\ln\left(\frac{p_i(t)}{p_i(0)}\right)\right]=\sigma_i^2 t$$

组合动态

现在假定 n 个资产的组合是按权数 $w_i(i=1, 2, \cdots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1)$ 构成的。令 V 表示组合的价值。因此，由于组合的瞬时回报率等于单个资产的瞬时回报率的加权和，我们有：

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\mathrm{d}p_i}{p_i}=\sum_{i=1}^{n}(w_i\mu_i \mathrm{d}t+w_i \mathrm{d}z_i)$$

随机项的方差是：

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{d}z_i\right)^2=E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{d}z_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \mathrm{d}z_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n} w_i\sigma_{ij}w_j \mathrm{d}t$$

因此，$V(t)$ 的价值是对数正态的，有：

$$E\left[\ln\left(\frac{V(t)}{V(0)}\right)\right]=vt=\sum_{i=1}^{n} w_i\mu_i t-\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} w_i\sigma_{ij}w_j t \qquad (15—5)$$

429 $\ln[V(t)/V(0)]$ 的方差是：

$$\sigma^2(t)=\sum_{i,j}^{n} w_i\sigma_{ij}w_j t$$

注意到：

$$v=\frac{1}{t}E\left[\frac{\ln V(t)}{V(0)}\right]$$

因此，v 给出了组合增长率——它类似于前面几节应用的 m。通过选择加权系数 w_1，w_2，…，w_n 我们能够控制这个增长率。

增长的含义

方程（15—5）解释了怎样泵吸波动性获得增加的增长。作为具体例子，假定 n 个资产不相关，并且具有同样的均值和方差。因此，一个典型资产的

价格由如下过程决定：

$$\frac{dp_i}{p_i}=\mu dt+dz_i$$

这里的每个 dz_i 具有方差 $\sigma^2 dt$。每个股票各自的预期增长率是 $v=\mu-\frac{1}{2}\sigma^2$。现在假定这 n 个股票每个都包括在权数为 $1/n$ 的组合中。因此，由式(15—5)，该组合的预期增长率是：

$$v_{port}=\mu-\frac{1}{2n}\sigma^2$$

泵吸降低了矫正项 $-\frac{1}{2}\sigma^2$ 的值，从而增加了增长率。在这个例子中，对单个股票的增长率 v 增加了：

$$v_{port}-v=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})\sigma^2=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$$

当原来的方差很高时，很明显泵吸效应最强烈。认识到这一点以后，你将可能开始享受波动，为你的投资寻找波动而不是避免波动，正像你学习第 6 章和第 7 章的单期理论后可能具有的感觉一样。波动并不是和风险一样。波动也是机会。

例 15.6（行为波动性） 假定某股票有每年 15%的预期增长率和 20%的波动（对数）。这是相当典型的价值。这意味着 $v=\mu-\frac{1}{2}\sigma^2=0.15$、$\sigma=0.20$。因此 $\mu=0.15+0.04/2=0.17$。按照同样比例组合 10 个这样的股票（假定它们是不相关的），我们获得（9/20）×0.04=1.8%的总体增长率提 430
高——好，但不剧烈。

如果替代的波动性是 40%，那么增长率的提高将是 7.2%，这是巨大的提高。在 60%的波动性下，增长率的提高将是 16.2%，这确实让人心动。令人遗憾的是很难找到具有这种波动性水平的 10 个互不相关的股票，所以实际上你必须满足于更温和的收益。[6]

最大增长组合

通过使增长率 V 最大化我们得到最优增长组合。参考方程（15—5），我们明白这是通过解如下方程求得权数 w_1，w_2，…，w_n 而实现的：

$$\max \sum_{i=1}^{n} w_i\mu_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i\sigma_{ij}w_j$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

我们在下一节解这个问题。

15.6 可行区域

与熟悉的马克维茨概念相对应，证券组合可以用 v 对 σ 的二维图来描绘。由所有可能组合描绘出的区域确定**可行区域（feasible region）**。可行区域描述如图 15—4。

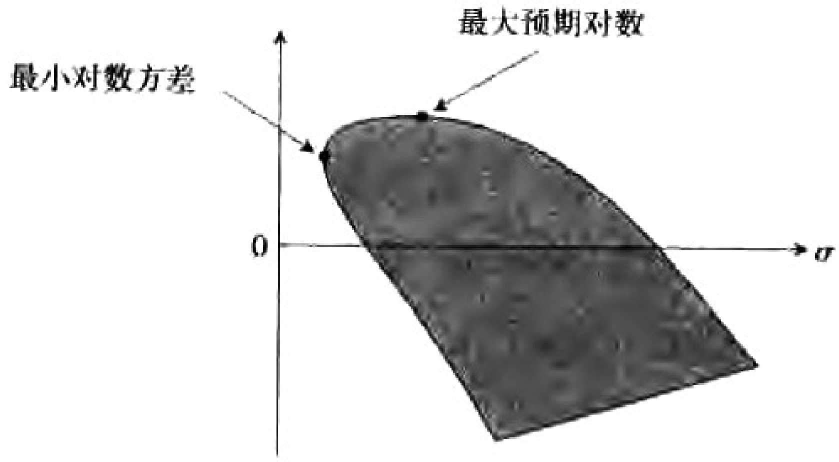


图 15—4 可行区域

可行区域有一个最大预期对数值和最小方差对数值。

但是，这个区域的一般形状和马克维茨区域之间存在重要的性质差别。新区域不能向上无限延伸，但存在最大的 v 值，对应于对数最优组合的增长

率。和马克维茨情形一样，也存在最小方差 σ 点。这些点标在图上。

有效边界

另一方面，正像马克维茨框架一样，我们定义边界左上部分为可行区域的有效边界。在 15.4 节增长效率命题阐述的增长意义上，这个边界是有效的。在这种情况下，我们可以相当具体，并且指明有效边界是最小方差点和对数最优点之间的边界曲线部分。

事实上，我们得到了**两基金定理**（**two-fund theorem**）的强化形式。任何有效边界上的点都可以通过最小方差组合和对数最优组合的混合组合实现。我们现在正式指明它为一个定理。我们还用向量—矩阵表示给出一个证明。（读者可以放心地跳过这个证明。） *431*

⇒两基金定理 *有效边界上的任何一点都能够由该边界上任意两个组合构成。特别地，最小对数方差组合和对数最优组合可以作为这两个组合。*

证明：假定有 n 个证券。令 $\mathbf{u}=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$，并令 $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 是组合的权数。如果 $\mathbf{w}$ 是有效的，必须对某些 s 解如下的问题：

$$\max \mathbf{w}^T\mathbf{u}-\frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{S}\mathbf{w}$$

$$\text{s. t. } \mathbf{w}^T\mathbf{1}=1$$

$$\mathbf{w}^T\mathbf{S}\mathbf{w}=s$$

通过引入拉格朗日乘数 λ 和 $\gamma/2$，我们构造拉格朗日函数：

$$L=\mathbf{w}^T\mathbf{u}-\frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{S}\mathbf{w}-\lambda(\mathbf{w}^T\mathbf{1}-1)-\frac{1}{2}\gamma(\mathbf{w}^T\mathbf{S}\mathbf{w}-s)$$

一阶条件是：

$$\mathbf{u}-\mathbf{S}\mathbf{w}-\lambda\mathbf{1}-\gamma\mathbf{S}\mathbf{w}=0$$

因此，解具有如下形式：

$$\mathbf{w}=\frac{1}{1+\gamma}\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{u}-\lambda\mathbf{1})$$

常数 λ 和 γ 的决定要使得解 w 满足原来问题的两个约束条件。

设定 $\gamma=0$ 意味着第二个约束条件不起作用，因此这个解相当于对数最优组合。

所有解都是两个向量 $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{1}$ 的线性组合，所以任何两个这样的解能够用来产生所有其他解。特别地，可以用对数最优解和最小方差解产生其他解。

432 **包含无风险资产的情形**

假定有一种具有常数利率 r_f 的无风险资产。这种资产可以看成是价格 $p_0(t)$ 满足如下方程的债券：

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{p_0}=r_f\mathrm{d}t$$

假定不存在其他产生零方差的资产组合，那么无风险资产在有效边界上。事实上，它是最小方差点。为了求得整个有效边界，因此仅仅需要求得对数最优点，并且我们现在将做这个工作。

对数最优组合被风险资产权数系列 w_1，w_2，…，w_n 和无风险资产权数 $w_0=1-\sum_{j=1}^{n}w_j$ 决定。风险资产权数的选择要使总的增长率最大化，也就是解如下问题：

$$\max\left[\left(1-\sum_{j=1}^{n}w_j\right)r_f+\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_j w_j-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}w_j\sigma_{jk}w_k\right)\right]$$

令关于 w_k 的导数等于0，我们得到对数最优组合的方程 $\mu_i-r_f-\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}w_j=0$，我们突出：

⇒**对数最优组合** *当存在无风险资产时，对数最优组合的风险资产权数满足如下方程：*

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}w_j=\mu_i-r_f \tag{15-6}$$

对 $i=1, 2, \cdots, n$ 成立。

方程（15—6）是可以求解 n 个权数的、有 n 个方程的线性方程组。

有无风险资产的有效边界显示在图 15—5。从图应该清楚大多数投资者实际上不希望设计相当于对数最优点的策略。这是因为标准差的一阶减少量可以通过沿有效边界稍微往左移动，仅仅牺牲二阶预期（对数）值而达到。

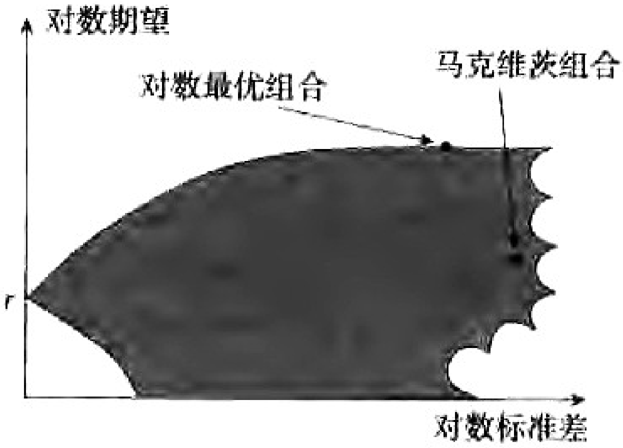


图 15—5 可行的增长率区域

马克维茨组合在增长意义下不是有效的。

马克维茨策略可以通过马克维茨组合权数和经常地再平衡而确定。这个策略关于预期的对数方差标准是无效的。 433

例 15.7（单个风险资产） 假定存在价格为 S 的单个股票和价格为 B 的债券。这些价格由如下方程决定：

$$\frac{dS}{S}=\mu dt+\sigma dz$$

$$\frac{dB}{B}=r_f dt$$

这里 z 是标准布朗运动过程。对数最优策略将有该股票由式（15—6）给出

的权数。在这种情况下，权数变成 $w=(\mu-r_f)/\sigma^2$。相应的最优增长率是：

$$v_{opt}=r_f+\frac{(\mu-r_f)^2}{2\sigma^2}$$

而相应的方差是：

$$\sigma_{opt}^2=\frac{(\mu-r_f)^2}{\sigma^2}$$

让我们考虑某些数量的值。假定该股票有 15% 的预期增长率和 20% 的标准差。还假定无风险利率是 10%。因此，我们知道 $\sigma=0.20$、$v=\mu-\frac{1}{2}\sigma^2=0.15$。这意味着 $\mu=0.17$。我们求得 $w=1.75$，意味着必须借入无风险资产以平衡持有股票。我们还求得 v 的最佳值是 $v_{opt}=0.10+(0.07)^2/0.08=16.125\%$。它相对于单独持有股票获得的 15% 仅仅略有提高。进一步，新的标准差是 0.07/0.20=35%，比该股票的情况更糟。这种情形描述如图15—6 所示。

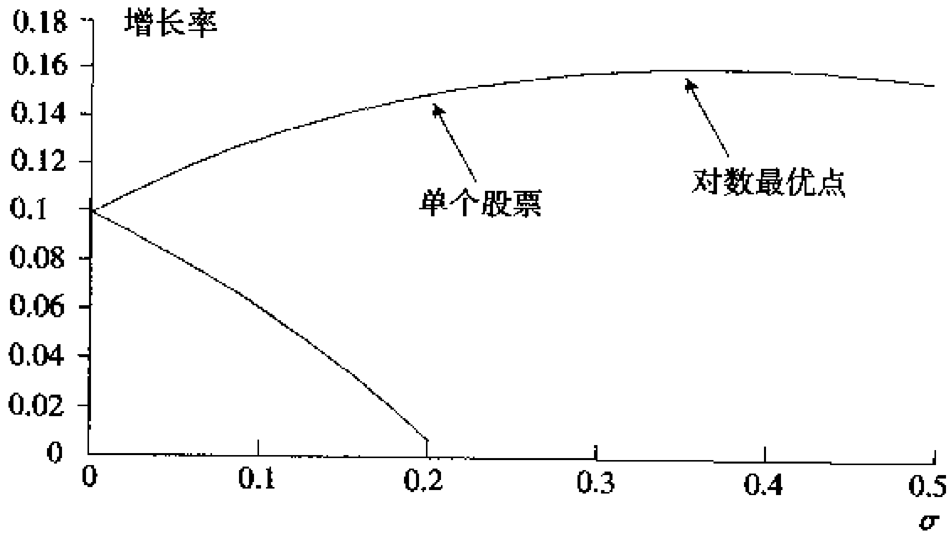


图 15—6　一个股票和一个无风险资产的可行区域

相对于单独持有股票，对数最优策略以大幅度增加标准差为代价，而增长率仅有温和的提高。

对数最优策略并没有使期望值得到很大的提高，而且使方差引人注意地

434 提高了。这说明对数最优方法不是太有用，除非在各种高波动性的股票之间存在泵吸的机会，在这种情况下期望值会有显著的提高。

例 15.8（三个股票） 假定有三个有风险的股票，价格由如下方程决定：

$$\frac{dS_1}{S_1}=0.24dt+dz_1$$

$$\frac{dS_2}{S_2}=0.20dt+dz_2$$

$$\frac{dS_3}{S_3}=0.15dt+dz_3$$

dz 的协方差是：

$$\begin{bmatrix} 0.09 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0.07 & -0.01 \\ 0.01 & -0.01 & 0.03 \end{bmatrix}$$

无风险利率是 10%。我们可以计算相应的增长率是：$v_1=19.5\%$、$v_2=16.5\%$和 $v_3=13.5\%$。

参考方程（15--6），对数最优组合权数满足如下方程组：

$$0.09w_1+0.02w_2+0.01w_3=0.14$$

$$0.02w_1+0.07w_2-0.01w_3=0.10$$

$$0.01w_1-0.01w_2+0.03w_3=0.05$$

这个方程组的解是：

$$w_1=1.05$$

$$w_2=1.38$$

$$w_3=1.78$$

因此，μ_{opt}是单个 μ 的对应加权和，也就是说，$\mu_{opt}=1.05\times0.24+1.38\times0.20+1.78\times0.15+(1-1.05-1.38-1.78)\times0.10=0.474\,2$

并且有：

$$\begin{aligned}\sigma_{opt}^2 &= \sum_{i,j=1}^{3} w_i w_j \sigma_{i,j} \\ &=0.09(1.05)^2+0.02(1.05)(1.38)+0.01(1.05)(1.78) \\ &\quad +0.02(1.38)(1.05)+0.07(1.38)^2-0.01(1.38)(1.78)\end{aligned}$$

$$+0.01(1.78)(1.05)-0.01(1.05)(1.38)+0.03(1.78)^2$$

$$=0.3742$$

因此，$\sigma_{opt}=61.17\%$。增长率是：

$$v_{opt}=\mu_{opt}-\frac{1}{2}\sigma_{opt}^2=28.71\%$$

图 15—7 显示了最初的三点和可行区域的一部分边界。

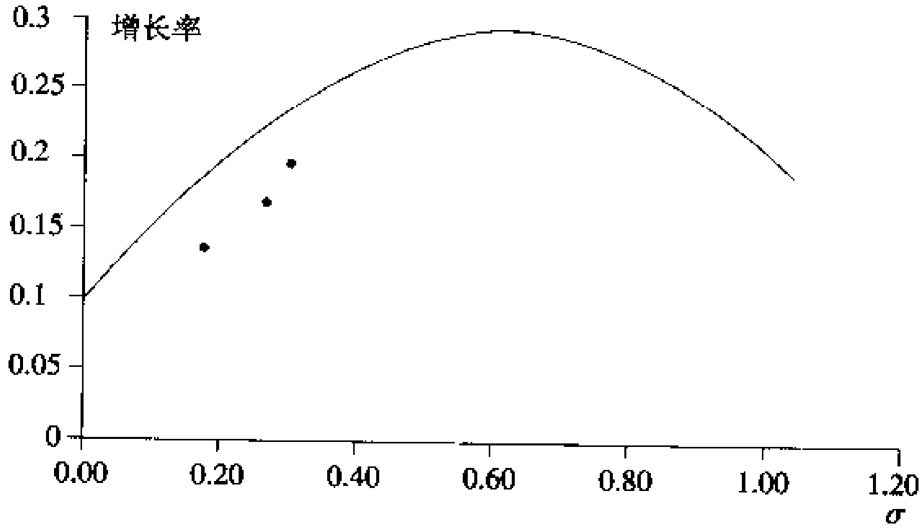


图 15—7 三只股票范例的边界点

最初的三只股票和无风险资产共同定义关于对数均值和对数方差最优的边界点。

15.7 对数最优定价公式*

对数最优策略与一般定价资产一样具有重要的作用，并且定价公式非常容易推导。和以前一样，我们假定有 n 个风险资产，每个资产的价格都由如下几何布朗运动决定：

$$\frac{dp_i}{p_i}=\mu_i dt+dz_i, i=1,2,\cdots,n$$

因为对所有 i，有 $E(dz_i)=0$，协方差 σ_{ij} 由 $E(dz_i dz_j)=\sigma_{ij}dt$ 确定。另外，

还存在一个回报率为 r_f 的无风险资产（资产编号为 0）。任何满足 $\sum_{i=0}^{n} w_i = 1$ 的权数组 w_0，w_1，w_2，…，w_n 按通常方式确定了一个组合。该组合的价值也将由几何布朗运动决定。我们用 $\sigma_{i,\text{port}}$表示这个过程和资产 i 对应的协方差。

作为特例，我们用下标"opt"表示对数最优组合。该组合的方差用 σ_{opt}^2 表示，并且用 $\sigma_{i,\text{opt}}$表示对数最优组合与资产 i 的协方差。

任何资产的 μ 值都可以通过计算该资产和对数最优组合的协方差而得到。这基本上就是一个定价公式，因为它证明了漂移和不确定性之间的关系。这里列出这个定价公式（四种形式）：

⇒***对数最优定价公式（LOPF）*** *对任何股票 i 有如下关系成立：*

$$\mu_i - r_f = \sigma_{i,\text{opt}} \tag{15—7a}$$

$$v_i - r_f = \sigma_{i,\text{opt}} - \frac{1}{2}\sigma_i^2 \tag{15—7b}$$

等价地，我们有： 436

$$\mu_i - r_f = \beta_{i,\text{opt}}(\mu_{\text{opt}} - r_f) \tag{15—8a}$$

$$v_i - r_f = \beta_{i,\text{opt}}\sigma_{\text{opt}}^2 - \frac{1}{2}\sigma_i^2 \tag{15—8b}$$

这里 $\beta_{i,\text{opt}} = \sigma_{i,\text{opt}} / \sigma_{\text{opt}}^2$。

证明：由对数最优策略方程（15—6）可得到这个结果，也就是说：

$$\mu_i - r_f = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j \tag{15—9}$$

如果对数最优组合的价值是 V，我们有：

$$\frac{dV}{V} = \sum_{j=1}^{n} w_j(\mu_j dt + dz_j)$$

因此，$\sigma_{i,\text{opt}} = E\ (dz_i dz_{\text{opt}})\ = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j = \mu_i - r_f$，其中最后一步就是式

(15—9)。这样可以得出式（15—7a)。由 $v_i=\mu_i-\frac{1}{2}\sigma_i^2$ 可得到式（15—7b)。

为了得到另外的表达式，我们将第一个定价公式（方程（15—7a)）应用于对数最优策略本身，得到 $\mu_{opt}-r_f=\sigma_{opt}^2$。可立即得到方程（15—8a)。直接从 $\beta_{i,opt}$ 的定义可以得到方程（15—8b)。

根据这些公式，一个资产与对数最优组合的协方差完全决定了该资产的瞬时超额预期回报。根据 $\mu-r_f$，方程（15—7a）和（15—7b）很容易记住，因为它们酷似 CAPM 方程。这些方程将超额预期瞬时回报表示成单个协方差或者表示成可替代的 β 型公式。

例 15.9（还是三只股票） 考虑例 15.8 的三只股票。让我们用式（15—7a）确定 μ_1。S_1 与对数最优组合的协方差是从下式求得的：

$$E[dz_1(w_1dz_1+w_2dz_2+w_3dz_3)]$$
$$=[1.05\times0.09+1.38\times0.02+1.78\times0.01]dt=0.14dt$$

因此，

$$\mu_1=r_f+0.14=0.24$$

这是对的，因为它与最初假设的 μ_1 一致。

按照 $v-r_f$，方程（15—7a）和（15—7b）也许是最相关的方程，因为 v 是实际观察到的增长率。考虑式（15—8b)，$v_i-r_f=\beta_{i,opt}\sigma_{opt}^2-\frac{1}{2}\sigma_i^2$。对低

437 波动性的股票（也就是说，σ_i^2 很小)，超额增长率大约与 $\beta_{i,opt}$ 成比例。这与 CAPM 的结果相对应。更大的风险导致更大的增长。但是，对大的波动性，$-\frac{1}{2}\sigma_i^2$ 项将起作用，并且使 r 减少。

尤其要注意到：如果证券 i 与对数最优组合不相关，那么它的增长率将低于无风险利率。这是因为它的波动性提供了无风险资产不能提供的可能性。

波动性这一项意味着 CAPM 理论中风险与回报的关系是二次的而不是线性的。为了突出这个二次特征，假定（平均来看可能是真实的）任何股票

的 σ 与它的 β 成比例，也就是说，$\sigma=\gamma\beta$，这里 γ 是常数。因此，我们求得：

$$v-r_f=\sigma_{opt}^2\beta-\frac{\gamma^2\beta^2}{2}$$

这个函数的图像如图 15—8 所示。注意这条曲线与传统 CAPM 的 β 图具有不同的形状。它是一条抛物线，在 $\beta_{opt}=\sigma_{opt}^2/\gamma^2$ 时取最大值。

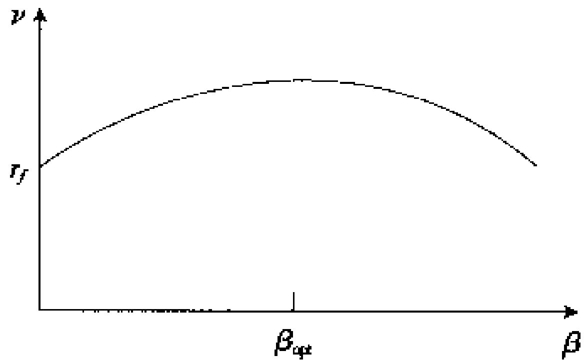


图 15—8 对数回报对 β

市场数据

如果看一族许多实际的股票，我们不会指望它们变成像图 15—8 显示的那样单一的曲线，因为真实的关系有两个自由度：β 和 σ。但是，根据我们讨论的理论，我们将预期所有股票变成大致沿着这条抛物线的散点图。我们可以检验这个结论与包括数十年市场回报数据的著名的全面研究的结论相违背。[7]图 15—9 和图 15—10 显示的数据资料就是从这个研究引用的。这两个图形显示：在 1963—1990 年期间，年度化的回报和按月计算的回报结果一样。当然，该研究应用的 β 是基于市场回报（而不是基于对数最优组合）的正常的 β。这个研究已经被用于证明 CAPM 模型预测的传统关系不成立，因为回报明显地与 β 不成比例。我们在每个图中画了虚线抛物线，它说明数据资料确实支持回报与 β 之间的关系粗略地看是二次的结论。为了正确地表达这个结论，我们强调 LOPF 与投资者怎样行事是不相关的。它是一个数学恒等式。因此，市场研究能够检验的所有东西是股票价格是否实际上如模型假设的那样是几何布朗运动过程。事实上，因为回报是接近于对数正态分 438

布的，所以对数最优定价模型也应该近似成立。

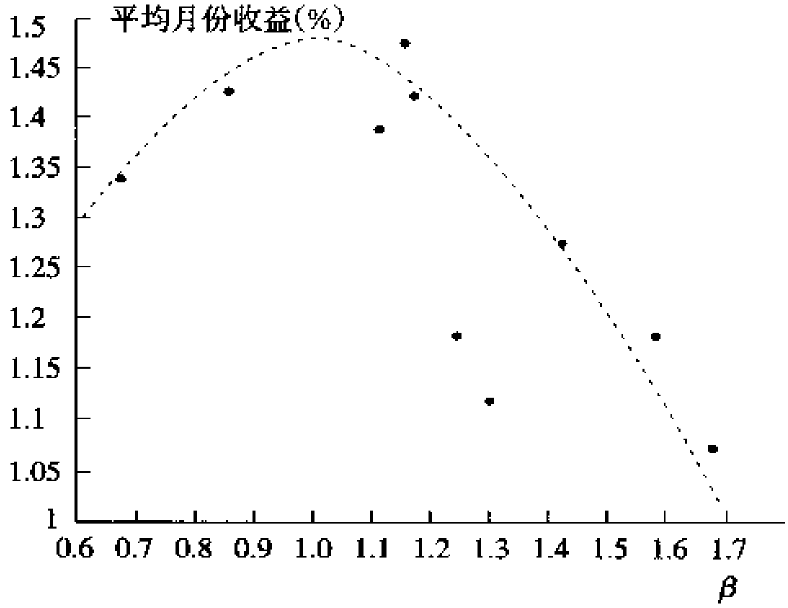


图 15—9　观察到的中型公司的回报与 β

数据资料支持 LOPF 的结论，回报关于 β 大约是二次的，并且在 β=1 附近有峰值。

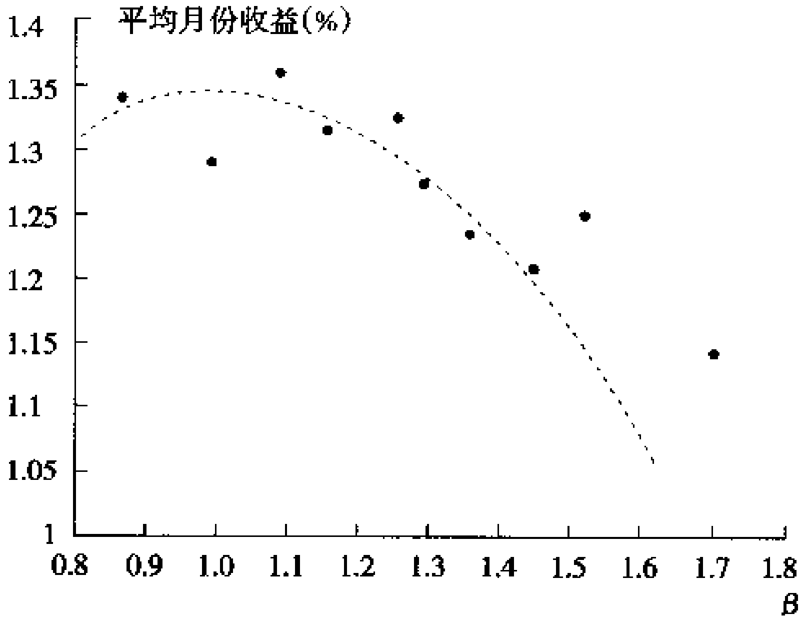


图 15—10　观察到的所有证券的截面回报与 β

数据资料支持 LOPF 的结论，回报关于 β 大约是二次的，并且在 β=1 附近有峰值。

15.8　对数最优定价和布莱克-斯科尔斯方程*

对数最优定价公式可以用于衍生资产定价，并且推导出的公式恰好是布莱克-斯科尔斯方程。因此，我们得到了布莱克-斯科尔斯结论的新解释，并且看到了对数最优定价公式的威力。对数最优定价方程比布莱克-斯科尔斯方程更一般，因为对数最优定价应用更普遍——不仅仅限于衍生资产。 439

和标准的布莱克-斯科尔斯框架一样，假定标的资产价格由几何布朗运动过程决定：

$$dS=\mu S dt+\sigma S dz$$

这里 z 是标准化维纳过程。另外假定有一个常数利率 r。最后假定某个股票衍生资产的价格为某个（未知）函数 F，$y=F(S,\ t)$。

价格 y 将根据本身的伊藤过程随机地波动。这个过程由伊藤引理给定如下：

$$dy(t)=\left(\frac{\partial F}{\partial S}\mu S+\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt+\frac{\partial F}{\partial S}\sigma S dz \qquad (15\quad 10)$$

如果将式（15—10）的左边被 $y(t)$ 除而右边被 $F(S,\ t)$ 除，我们将得到衍生资产瞬时回报率方程。因此，右边的第一项是预期瞬时回报率。我们可以称这一项为 μ_{denv}，因为它是衍生资产的 μ 值。所以 $\mu_{\text{deriv}}-r$ 一定等于该衍生资产与对数最优组合的瞬时回报率的协方差。写出这个方程将给出最终结果。在我们实施这个步骤之前，首先求对数最优组合。

对数最优组合是股票和无风险资产的组合。衍生资产不能通过这两种资产提高实现的回报，因为这是根据衍生资产定义的。因此，对数最优组合是例 15.7 求得的组合。具体地，它是股票权数为 $w=(\mu-r)/\sigma^2$ 的组合。

现在我们可以直接写出对数最优定价公式为：

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\mu S+\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)-r=\frac{1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\sigma S\right)\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)$$

左边正好是 $\mu_{deriv}-r$，这里 μ_{deriv} 是该衍生资产的预期瞬时回报率。这只是将式（15—10）右边的第一部分抄下来被 F 除并减去 r 求得的。右边是该衍生资产与对数最优组合的协方差。因为衍生资产和对数最优组合都有仅仅通过 dz 项随机变化的价格，我们简单地将瞬时回报方程的相应系数相乘求出协方差。第一部分只是式（15—10）的 dz 系数被 F 除照抄下来的，第二部分是如例 15.7 求得的对数最优组合的标准差。

该方程可以用 F 乘以方程的两边，并消去两个包含 μ 的同类项而简化，得到：

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial S}rS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2=rF$$

这是布莱克－斯科尔斯方程。

440 对于布莱克－斯科尔斯方程，我们现在有三种解释。第一种解释是无套利解释，它以两个风险资产能够复制一个无风险资产，并且它的回报率一定等于无风险利率的观察为基础。第二种解释是风险中性定价公式的后推求解过程。第三种解释为布莱克－斯科尔斯方程是对数最优定价公式的一个特例。

15.9 小结

给定在一系列类似的情境重复投资的机会（如在投资轮盘重复地下赌注，或者股票组合的周期性地再平衡），比较与资本的长期效应有关的各种可能的投资策略是明智的。为了这个目的，一个有用的测度是预期资本增长率。如果各种投资机会具有同样的概率性质，那么这个测度等于单个回报的预期对数。换句话说，通过选择使每次试验的回报的预期对数最大化的策略可以使长期预期资本增长最大化。这就是对数最优策略。

回报要么翻倍要么一无所获的赌博的对数最优策略被称为凯利规则。该规则指出：如果你赢的概率大于 0.5，你应该用你财富的 $2p-1$ 部分下赌

注，否则，什么赌注也不要下。

对股票来说，对数最优策略通过保持每个股票固定比例的资本，并每期再平衡而在波动频繁的股票之间泵吸资金。平均地看，这种策略自动地遵循“买低卖高”的格言。

对股票而言，对数最优方法在数学表述上连续时间框架比离散时间框架更灵活，因为在连续时间框架可以推导出对数最优策略和引致的预期增长率的明确的公式——它仅仅需要解一个二次规划问题。推导出的预期增长率公式明显地显示泵吸效应的痕迹。基本上：增长率是 $v=\mu-\frac{1}{2}\sigma^2$。当资产是按比例组成时，那么推出的 μ 同样也是单个 μ 的按比例的组合。但是，推出的 σ^2 比按该比例减少得多，因为它是用比例因子的平方和单个 σ 组合起来的。因此，推出的 v 大于单个 v 的比例组合。所以 v 通过波动项的减少被泵吸增加了。

增长效率命题指出任何长期投资者应该评价仅仅根据回报对数的均值和方差考虑的策略。这导出了描述对数回报期望对对数回报标准差的图形的有效边界的概念。该边界有两个极端的点：对数最优点和最小对数方差点。这种框架的两基金定理指出：任何有效点证券组合都是这两个极端点证券组合的组合。如果存在无风险资产，它扮演最小对数方差点。

对数最优组合在作为定价组合方面有另一个特殊的作用。具体地说，对任何资产 i 我们求得 $\mu_i-r_f=\sigma_{i,\mathrm{opt}}$。也就是说，一个资产的预期超额瞬时回报等于该资产与对数最优组合的协方差。这个对数最优定价公式（LOPF）可以变形为 $v_i-r_f=\beta_{i,\mathrm{opt}}\sigma^2_{\mathrm{opt}}-\frac{1}{2}\sigma_i^2$。这说明增长率 v_i 倾向于和 CAPM 模型一样，随着 $\beta_{i,\mathrm{opt}}$ 增加而增加，但它随着 σ_i^2 的增加而减少。粗略地说，这样 441
导出的证券市场线是二次的而不是线性的。实证证据倾向于支持这个结论。

由于布莱克－斯科尔斯偏微分方程可以直接从对数最优定价公式推导出来，明显地显示了对数最优定价公式（LOPF）的作用。但是，对数最优定

价公式并不仅仅局限于衍生证券的定价——它是一个一般结论。

练习

1.（简单轮盘策略）考虑投资轮盘的形如（γ，0，0）的策略。证明 n 步后与你的钱相乘的总因子可能是 $(1+2\gamma)^{n/2}(1-\gamma)^{n/2}$。求使这个因子最大化的 γ 值。

2.（怎么玩状态彩票）在一个特定的状态彩票游戏中，人们事先从 6 个数字的随机抽签中选择 8 个数字。如果某人的选择包括 6 个平局，那么他们获得一个大奖，但这个大奖要和其他胜利者分享。维克多已经发现有些数字是不受欢迎的，因为它们很少被游戏者选择到。他已经计算出由于选择这些数字他 1 美元的彩票有百万分之一的机会赢得 1 000 万美元。有 10 比 1 的可能性对他有利。维克多现在的财富是 100 000 美元，并且他想要他财富的预期对数最大化。

(a) 维克多应该买一张彩票吗?

(b) 维克多知道他可以通过和朋友构造一个资金池购买彩票的一部分。多大部分的彩票是最优的?

3.（安逸的策略）证明（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）是例 15.2 的最优策略。

4.（一般赌博轮盘◇）考虑一个有 n 部分的赌博轮盘。如果轮盘指针停在第 i 部分，则在该部分每单位赌注获得的回报是 r_i。指针停在第 i 部分的可能性是 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$。令 α_i 表示你的一部分资本下在第 i 部分的赌注。我们要求 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\leqslant 1$，并且对 $i=1, 2, \cdots, n$ 有 $\alpha_i\geqslant 0$。

(a) 证明最优增长策略是通过解如下规划问题求得的：

$$\max\sum_{j=1}^{n}p_j\ln\left(r_j\alpha_j+1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$$

(b) 假定对 $i=1, 2, \cdots, n$ 有 $\alpha_i>0$，证明最优值一定满足：

$$\frac{p_k r_k}{r_k\alpha_k+1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}-\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j}{r_j\alpha_j+1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}=0$$

对所有 $k=1, 2, \cdots, n$ 成立。

(c) 假定 $\sum_{i=1}^{n}1/r_i=1$，证明这种情况下的解是 $\alpha_i=p_i(i=1, 2, \cdots, n)$。

(d) 对例 15.5 给出的轮盘，求最优解，并确定相应的最优增长率。

5. (轮盘的其他问题◇) 利用练习 4 的记号，假定 $\sum_{i=1}^{n}1/r_i=1$，但是要试图求 α_k 中有一个是零的解。特别地，假定轮盘的各部分是按 $p_n r_n<p_i r_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 这种方式排序的。因此，第 n 部分是“最坏的”部分。 442

(a) 求 $\alpha_n=0$ 和所有其他的 α_i。

(b) 求例 15.5 中的轮盘的解。

6. (波动泵吸) 假定有 n 个股票。每个股票的价格都由几何布朗运动决定。每个股票有 $v_i=15\%$ 和 $\sigma_i=40\%$。但是，这些股票是相关的，并且为简化起见，我们假定对 $i\neq j$ 有 $\sigma_{i,j}=0.08$。在每个股票上投资部分相等的组合的 v 值是多少？

7. (道琼斯平均价格指数之谜) 道琼斯工业平均价格指数是权数都相等(但是权数和大于 1) 的 30 个工业股票价格的平均指数。偶然地 (每年大约两次) 30 个股票中的一个被分拆 (通常因为该股票价格达到接近每股 100 美元的水平)。当这种情况发生时，所有的权数都由于加上一个数量 ϵ 而向上调整，这里 ϵ 的选择要使得计算的道琼斯平均价格指数是连续的。

盖文・琼斯的父亲道・琼斯先生在 10 年期间应用如下投资策略。10 年时间开始时，琼斯先生从道琼斯平均价格指数的 30 个股票中每个购买一股。他将这些股权证书放到抽屉里不再作任何交易。如果股息派发下来，他就花掉。如果由于股票分拆获得额外的股权证书，他就将这些证书和其他股票一样放在抽屉里。在 10 年时期末，他将这些股票兑换成现金。因此，他比较

以最终价值与最初成本比率为基础的总回报和现在的道琼斯平均价格指数与10年前的道琼斯平均价格指数比率定义的假设的回报。他惊讶地发现这两个回报之间存在差异。你认为哪个回报将会大一点？为什么？（忽略交易成本，并且假定所有30个股票10年期间仍然留在道琼斯平均价格指数中。）（实际测度时，每年的差异接近1%。）

8.（幂效用函数）股票价格由如下方程决定：

$$\frac{\mathrm{d}S}{S}=\mu \mathrm{d}t+\sigma \mathrm{d}z$$

这里 z 是标准化的维纳过程。利息是按常数利率 r 计算的，且稳定不变。一个投资者希望构造由这两种资产构成的不断再平衡的组合，使得在所有时间 $t\geqslant 0$，他的幂效用函数 $U(X)=(1/\gamma)X^{\gamma}(\gamma<1)$ 的期望值最大化。利用如下的步骤证明投资于风险资产的财富比例是 $w=(\mu-r)/[(1-\gamma)\sigma^2]$。

（a）证明：

$$X(t)=X(0)e^{(rt+w(\mu-r)t-w^2\sigma^2t/2+w\sigma n\sqrt{t})}$$

其中 n 是均值为0方差为1的正态随机变量。

（b）利用 $E(e^{an})=e^{a^2/2}$，证明：

$$E[U(X(t))]=\frac{1}{\gamma}e^{\gamma[rt+w(\mu-r)t-w^2\sigma^2t/2]+\gamma^2w^2\sigma^2t/2}$$

（c）求 w。

443 9.（离散时间、对数最优定价公式）假定有 n 种资产，资产 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 的单期回报率为 r_i。另外还存在回报率为 r_f 的无风险资产。一个时期的对数最优组合的回报率为 r_0，并且我们定义 $P_0=1/(1+r_0)$。

（a）推导定价公式 $\bar{r}_i-r_f=-\dfrac{\mathrm{cov}(r_i,P_0)}{E(P_0)}$。

（b）假定在一个小的时期 Δt，资产 i 的回报是 $1+\mu_i\Delta t+n_i\sqrt{\Delta t}$，这里 n_i 是均值为0方差为 σ_i^2 的正态随机变量。证明当 $\Delta t\to 0$ 时，（a）部分的离散时间定价公式取极限趋近于15.7节给出的连续时间对数最优定价公式。

【注释】

[1] 这种轮盘投资问题实际上构造了一个好的团体游戏，使用赌博的钱或者做记录。实际的赌博迫使人们精确地思考他们希望怎样投资。关键是长期投资与一次轮盘旋转是不一样的。

[2] 大数定律指出：如果 Y_1，Y_2，…是具有同样分布的独立随机变量，那么 $(1/n)\sum_{k=1}^{n}Y_k \to E(Y_k)$。一个简单例子是抛硬币，并且如果第 k 次试验出现头像指定 $Y_k=+1$，如果出现背面指定 $Y_k=-1$。其平均值趋向于 0。

[3] 这个答案隐含地假定 $p>0.5$。如果 $p\leqslant 0.5$，最优的 α 值是 $\alpha=0$。

[4] 回想 1、2 和 3 对应于上部、左部和右部，回报分别是 3、2 和 6。

[5] 定义最优解的方程实际上是这个问题的退化情境。存在整个一族最优解，所有解给出同样的 m 值。一个替代解是 $\alpha_1=\frac{5}{18}$，$\alpha_2=0$，$\alpha_3=\frac{1}{18}$。在这个解中，不利的部分没有任何投资。

[6] 当然我们必须软化对具有与经常交易相关的佣金清算账户的热情。

[7] 这是本章末尾引用的法马（Fama）和弗伦奇（French）的研究。参见该参考文献的表Ⅰ。

【参考文献】

重复投资情境中应用对数效用函数的特殊优势最初是被凯利（Kelly）（见文献 [1]）和兰塔尼（Lantané）（见文献 [2]）发现的。该理论由布雷曼（Breiman）（见文献 [3]）更完整地发展。渐近性质的充分讨论参见文献 [4]。期望对数和对数的方差是长期行为中仅有的两个重要数量的思想是在文献 [5] 中提出来的。对数最优组合能够用于定价的事实是在文献 [6] 中提出来的。文献 [7] 是证券回报的经典实证研究。

1. Kelly, J. L., Jr. (1956), "A New Interpretation of Information Rate", *Bell System Technical Journal*, 35, 917—926.

2. Latané, H. (1959), "Criteria for Choice among Risky Ventures",

Journal of Political Economy, 67, 144—155.

3. Breiman, L. (1961), "Optimal Gambling Systems for Favorable Games", Fourth Berkeley Symposium, vol. I, 65—78.
4. Algoet, P. H., and T. M. Cover (1988), "Asymptotic Optimality and Asymptotic Equipartition Properties of Log-Optimium Investment", *Annals of Probability*, 16, 876—898.
5. Luenberger, D. G. (1993), "A Preference Foundation for Log Mean-Variance Criteria in Portfolio Choice Problems", *Journal of Economic Dynamic and Control*, 17, 887—906.
6. Long, J. B., Jr. (1990), "The Numeraire Portfolio", *Journal of Fi-*

第16章　一般投资评估

投资机会的分析以估价现金流的现值为中心。但是，合适的定价必须解释现金流的不确定性和该现金流与其他资产的关系。因此，要构造一个一般的定价程序，我们必须拥有描述几种资产多期随机现金流的框架。确定这种框架，熟悉的风险中性定价和效用最大化概念就能够推广到多期情境。 444

16.1　多期证券

我们从建立描述具有有限个状态数的多

期背景的证券的框架开始——一个使第 9 章的讨论一般化的框架。（读者在阅读这一章之前应该熟悉第 9 章了。）多期框架的基本元素是定义状态转移随机过程的图形（通常是一棵树或者网格），如图 16—1 所示。最左边的节点表示时间 0 时过程的起点。因此，该过程可以运动到 $t=1$ 的任何继任节点。然后指定每个弧线的概率。每个概率都大于或者等于 0，从任何特定节点出发各弧线的概率的和一定等于 1。

图中的节点可以认为是各种“金融状态”的描述。它们可以是影响农业，并因此影响农产品价格的各种气候条件。可以是影响工资，并因此影响
445 利润的失业状况。或者它们也可以是各种可能的黄金价格。该图形必须具有完全描述重要金融问题的足够分枝。和前面讨论的一样，通过规定节点数目定义特定的证券过程。

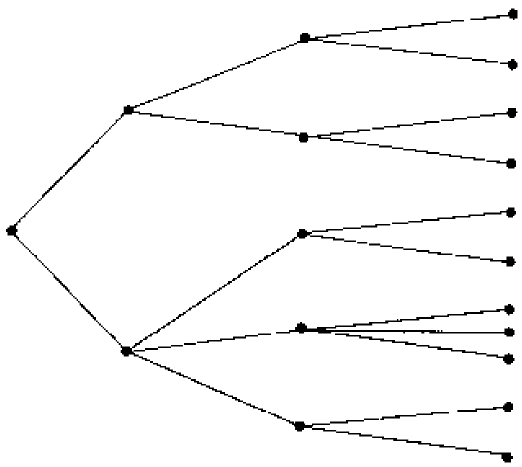


图 16—1　状态图

每个节点表示一个不同的状态。这个图形是一棵树，但一般地有些节点可以组合。

资产

资产是由现金流过程定义的，而现金流过程是通过规定图形的每个节点的现金流（或者股息）定义的。符号表示上，这种现金流或者股息过程是用形如 $\delta=(\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_T)$ 的序列描述的，其中每个 δ_t 是时间 t 的现金流。但是，现金流 δ_t 是随机的，因为它取决于时间 t 实际出现哪个状态，所以，

实际上 δ_t 是时间 t 各种可能价值的记号。

与每种资产有关的是另一种过程，即价格过程，它用 $S=(S_0, S_1, \cdots, S_T)$ 表示。价格 S_t 表示收到时间 t 的现金流后资产将进行交易的价格。而且，对 $t>0$ 的每个 S_t 是随机的，因为它取决于时间 t 出现哪个节点。

一种资产的例子是时间 T 支付 1 美元的零息债券。这种资产的现金流过程是除了时间 T 的 1 美元现金流以外每个节点都是零。对应的价格过程随着节点沿着整个图形向后运动而递减，实际的价值代表贴现因子。

状态模型可以同时用于描述几种资产。不同的资产只不过对应于不同的现金流和价格过程。

基础图形的构造要求作某些考虑。最可靠的总是将这种图形画成完整的、没有重合节点的树。这样将确保任何推出的数量都能够为图形所接纳。我们喜欢具有小数目节点的比较简单的描述，如网格。但是适合一种资产的网格描述可能不适合推出的数量，因为该数量可能是路径依赖的。（一个例子是回望期权的价值，它的价格取决于股票达到的最高价格。）这种现象也会出现在几种资产的图形描述中，因此我们必须小心路径依赖（要求节点是独立的）。总之，仅仅假定所有资产在一个共同的状态树上定义是最容易的。因此，我们永远也没有必要担心可能的路径依赖。另一方面，为便于计算， 446
我们大胆地寻找可使节点重合的机会——也许找到网格描述。所以，努力阻止节点分离使得我们能够设计计算上的有效求解方法。

组合策略

假定有 n 种资产。对 $i=1, 2, \cdots, n$，资产 i 有（随机）现金流过程 $\delta^i=(\delta_0^i, \delta_1^i, \cdots, \delta_T^i)$。另外，资产 i 有随机价格过程 $S_i=(S_0^i, S_1^i, \cdots, S_T^i)$。**交易策略**（**trading strategy**）是这些资产的组合，组合构成可以依时间和到达的特定节点而定。用 θ 表示对应的交易策略，时间 t 时资产 i 的数量为 θ_t^i，但是 θ_t^i 还取决于时间 t 特定的状态。换句话说，每个 $\theta^i=(\theta_0^i, \theta_1^i, \cdots, \theta_T^i)$ 本身是一个定义在基础图形上的过程——资产 i 持有多少的

过程。

交易策略用有关的现金流过程 δ^{θ} 定义了一个新资产。现金流从如下方程求出：

$$\delta_t^{\theta} = \sum_{i=1}^{n} [(\theta_{t-1}^{i} - \theta_t^{i})S_t^i + \theta_{t-1}^{i}\delta_t^i]$$

作为惯例，我们规定对所有 i 有 $\theta_{-1}^{i}=0$。求和号里的第一项表示由于时间 t 时改变组合持有比例而收到的资金量。第二项是时间 t 收到的按时间 $t-1$ 的组合权数计算的总股息。

作为简单例子，考虑时间 $t=0$ 时以价格 S 仅仅购买一个资产并持有的交易策略。这将产生净现金流（$-S$，δ_1，δ_2，…，δ_T）。

套利

也许找到保证赚钱而没有成本的交易策略是可能的。这种策略称为**套利**（**arbitrage**）。正式地，如果 $\delta^{\theta}\geqslant 0$，且 δ^{θ} 不全为零。换句话说，如果交易策略 θ 产生的股息过程至少有一个正项而没有负项，那么交易策略 θ 就是套利。设想套利是很容易的，因为我们已经理解前面各章的许多例子了。

短期无风险利率

如果时间 $t+1$ 的股息是 $\delta_{t+1}=1$，而其他时间的股息都为 0，则称一个资产在时间 t 是**短期无风险**（**short-time risk free**）的。它在时间 t 的价格 S_t
447 给出贴现因子 $d_t=S_t$。在时间 t 购买这种证券产生现金流过程（0，0，…，$-S_t$，1，0，…，0）。如果不存在这种标的资产，也许用交易策略人为地构造一个是可能的。在任何一种情况下，我们都说存在短期无风险借人。我们定义短期无风险回报为 $R_{t,t+1}=1/d_t$。

现在假定对所有 t（$0\leqslant t\leqslant T$），存在短期无风险借人。因此，我们将远期回报定义为：

$$R_{ts}=\frac{1}{d_t d_{t+1}\cdots d_{s-1}}$$

其中 $s>t$。

如果从时间 t 到时间 s 每期的利息都按现行的短期利率计算，那么变量 R_{ts}是时间 t 贷出的1美元在时间 s 将增长的数量。当然，数量 R_{ts}是随机的。因此，如果 t 不变，在时间 s 它的具体值取决于时间 s 的节点。正如我们将要看到的，它是概念上很有吸引力的数量，但是从计算方面看没有吸引力。它没有吸引力是因为对 $s-t>1$，它的描述可能需要完整的树形表述—— 即使基础短期利率是定义在网格上的，因为在两个时期之间的总回报是路径依赖的。（见练习2。）

16.2 风险中性定价

现在我们转向贯穿教材、始终强调的重要主题之一：风险中性定价。这一节我们始终假定如前面一节描述的所有时期存在短期无风险借入。因此，树上的每个节点都存在定义的短期利率。

再假定存在 n 个定义在基础状态过程图的资产。从这些资产出发，利用交易策略能够构造许多新资产。我们说风险中性概率存在，如果一组风险中性概率能够指定到图形的弧线上使得任何资产的价格或者任何交易策略满足：

$$S_t=\frac{1}{R_{t,t+1}}\hat{E}_t(S_{t+1}+\delta_{t+1}) \tag{16—1}$$

其中 $t=0,1,2,\cdots,T-1$，而 $\hat{E}_t$ 表示时间 t 时关于风险中性概率的期望。

这个定义仅仅适用于每次一个时期，并且它是以后推方式表示的。它提出 S_t 是可达到的价值 S_{t+1} 和 δ_{t+1}的函数。

在我们集合的特定资产组中，不能假定存在风险中性概率。毕竟，资产的实际价格可能不以系统的方式相关联。但是，尽管人们可能怀疑，可我们能够保证在某种程度上原来的资产价格与不可能存在套利机会的资产价格一

致时，风险中性概率存在。这就是下面定理的内容，从前面第 9 章风险中性定价的结论可以立即得到这个结果，因为风险中性定价公式（16—1）只是一个单期公式。

448 **⇒风险中性概率的存在性** *假定一组 n 个资产定义在一个状态过程。并假定由于这些资产，在每个时间 t 无风险借入是可能的。因此，存在风险中性概率使得关于这些资产的交易策略的价格由风险中性定价公式给出：*

$$S_t=\frac{1}{R_{t,t+1}}\hat{E}_t(S_{t+1}+\delta_{t+1})$$

当且仅当不存在套利机会时成立。

证明：我们已经具有所有的证明要素了。很明显风险中性定价意味着不可能存在套利机会。这已经在 14.3 节用短期利率网格证明过了，并且该证明几乎可完全适用。

仍然需要证明的是：如果不存在套利机会，那么存在风险中性概率。但是，如果 T 个时期里不存在套利机会，那么从给定节点开始的时间 t 的单个时期就确定无疑地不存在套利机会。第 9 章证明了这意味着从该节点出发的弧线上存在风险中性概率。因此，这个结论对所有时间所有节点都是正确的，所以我们得到了完整的风险中性概率组。

风险中性定价公式（16—1）可以写成非递归形式为：

$$S_t=\hat{E}_t\left(\sum_{s=t+1}^{T}\frac{\delta_s}{R_{ts}}\right)\qquad(16—2)$$

这里 $\hat{E}_t$ 表示从时间 t 的已知状态开始的所有将来数量的期望。这个公式将 S_t 表示成所有剩余现金流的风险中性贴现价值。利用确定性现金流，使熟悉的现值公式有了一个优美的解释。但是，这个形式不便于计算，因为数量 R_{ts} 一般需要完整的树形描述。（见练习 2。）当然，也存在利率是确定性的简化结果的情况。

之前的结果只是前面几章发展的概念稍作推广。我们已经理解了许多应用风险中性定价方程的例子。二项式期权定价是最简单和最早的例子。更复杂的、涉及利率衍生证券的例子在第 14 章讨论过。这一章我们将看到应用一般公式的其他例子，但首先我们需要更多的理论。

16.3 最优定价

根据定义，如果在可获得资产中间没有套利机会，那么存在风险中性概率。该定理并不是说这些概率是惟一的，而且一般地这些概率不是惟一的。

同两资产的二项式网格情况一样，如果资产横跨基础图形的自由度，那 449
么风险中性价格是惟一的。如果与三项式网格上的两资产情况一样，资产没有横跨自由度，将存在额外的自由度，风险中性概率就不惟一。

当存在额外的自由度时，通过引进效用函数 U、度量最终财富的效用、并且求使 $U(X_T)$ 的期望值最大化的交易策略，可定义一组特定的风险中性概率。最优交易策略将隐含一系列类似于第 9 章讨论的单期情形的风险中性价格。

我们将限定我们考虑的效用函数具有分离性质（如第 15 章分析的那样）。为了复习，假定我们从财富水平 X_0 开始。在第一个时期后，我们的财富将是 $X_1=\alpha_0^{\theta_0}\times X_0$，这里 $\alpha_0^{\theta_0}$ 是取决于时期 0 的交易策略变量的随机回报因子。继续按这种方式推算下去，我们可以得到 $X_T=\alpha_0^{\theta_0}\times\alpha_1^{\theta_1}\times\cdots\times\alpha_{T-1}^{\theta_{T-1}}\times X_0$。如果我们选择效用函数为 $U(X_T)=\ln X_T$，那么有 $U(X_T)=\ln\alpha_0^{\theta_0}+\ln\alpha_1^{\theta_1}+\cdots+\ln\alpha_{T-1}^{\theta_{T-1}}+\ln X_0$。因此，我们通过对每个 t 使 $E_t[\ln(\alpha_t^{\theta_t})]$ 最大化，使得$E_0[U(X_T)]$最大化，这里 E_t 表示时间 t 考察的期望值。这个最大化等价于关于 $E_t[\ln(\alpha_t^{\theta_t}X_t)]=E_t[U(X_{t+1})]$ 的最大化。这就是分离性质。通过在过程的每一步使同样的效用函数最大化获得预期最终效用的最大化。

分离性质对对数效用函数成立，并且它对幂效用函数 $U(X_T)=(1/\gamma)X_T^\gamma$ 也成立。当分离性质成立时，多期情形变成了单期问题序列，所有单期问题具有同样的效用函数。这样极大地简化了必要的计算（大多数的一般结论对其他效用函数成立）。

单期问题

回想存在 n 种资产。在时间 t 的特定节点的单期问题就是对 $i=1$，2，…，n 选择 n 个资产的数量 θ_t^i 组成证券组合。我们希望在时间 t 组合的总成本是 1 的约束条件下使得时间 $t+1$ 时组合价值的预期效用最大化。因此，我们解如下规划问题找到 θ_t^i：

$$\max_{\theta_t} E_t[U(X_{t+1})] \tag{16—3}$$

$$\text{s. t.} \sum_{i=1}^{n} \theta_t^i S_t^i = 1 \tag{16—4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_t^i (S_{t+1}^i + \delta_{t+1}^i) = X_{t+1} \tag{16—5}$$

它是关于继任节点的实际概率取期望。如果存在 K 个这样的节点，我们用 p_1，p_2，…，p_k 表示这些概率。给定数量 θ_t^i($i=1$，2，…，n)，则下
450 一期的财富 X_{t+1} 值取决于出现的特定节点 k。目标函数可以写成 $\sum_{k=1}^{K} p_k U(X_{t+1})_k$，这里 $U(X_{t+1})_k$ 表示 $U(X_{t+1})$ 在节点 k 的值。

利用第 9 章的结果，由这个解可以求得一组风险中性概率。具体地，风险中性概率是：

$$q_k = \frac{p_k U'(X_{t+1}^*)_k}{\sum_{k=1}^{K} p_k U'(X_{t+1}^*)_k} \tag{16—6}$$

这里 X_{t+1}^* 是下一期财富的最优（随机）值。如果效用函数是递增的，则 $U'(X_{t+1}^*)_k$ 将是正的，因此所有的 q_k 也是正的。

这些风险中性概率可以用如下一般公式给任何资产定价：

$$S_t = \frac{\hat{E}_t(S_{t+1} + \delta_{t+1})}{R_{t,t+1}}$$

其具体形式是：

$$S_t=\frac{\sum_{k=1}^{K}q_k(S_{t+1}+\delta_{t+1})_k}{R_{t,t+1}}$$

应用

如果用这种方法求状态个数比基本资产个数多的一组风险中性概率，那么风险中性概率将取决于效用函数的选择。风险中性概率的变化不会影响原来资产的价格，但将导致其他（新）资产的指定价格的变化。新资产的价格按这种方式指定，以致具有给定的效用函数的个体不会选择包括该资产的最优组合（不管是多头还是空头）。

例 16.1（期权的对数最优定价） 最优定价方法为新的网格程序的看涨期权定价提供了基础。假定我们计划在网格中使用中等大小的时期长度，但为了保持精确性我们决定利用多项式（而不是二项式）网格。我们指定网格弧线的（实际）概率以紧密地匹配股票的实际特征。

在这种情况下，风险中性概率不是惟一规定的，但我们能够应用效用函数，如对数效用函数 $U(X)=\ln X$ 推出一组这样的概率。一旦求出风险中性概率，我们就能够用通常的后推计算过程给看涨期权定价。

推导出的指定的看涨期权价格代表什么呢？它是看涨期权的价格，该看涨期权促使具有对数效用的人不在乎他的或者她的组合是否包括该看涨期权。具体地说，这个人可能首先组成一个由股票和无风险资产组成的对数最 451
优组合（每期再平衡）。因此，如果看涨期权按推导的价格提供，这个人将会发现包括该看涨期权（不论是多头还是空头）不会使他的效用增加。因此，看涨期权不会被增加到他的组合中。换句话说，以效用为基础的价格是导致零需求水平的价格。

例 16.2（5 个月的看涨期权） 作为一个特定的例子，让我们考虑例 12.3

研究过的 5 个月看涨期权。标的股票有：$S(0)=62$ 美元、$\mu=0.12$ 和 $\sigma=0.20$。无风险利率是每年 $r=10\%$，并且期权的执行价格是 $K=60$ 美元。我们应用一个月时期长度的三项式网格。为了与股票参数匹配，我们确定三项式网格参数为 $u=1.1$ 和 $d=1/u$，而中间树枝有倍数因子 1。为了求出实际概率，我们必须解对应于如下条件的方程：(1) 概率和等于 1；(2) 匹配均值；(3) 匹配方差。这些方程首先在 13.7 节给出，它们是：

$$p_1+p_2+p_3=1$$

$$up_1+p_2+dp_3=1+\mu\Delta t$$

$$u^2p_1+p_2+d^2p_3=\sigma^2\Delta t+(1+\mu\Delta t)^2$$

这些方程的解是 $p_1=0.228$、$p_2=0.632$ 和 $p_3=0.140$。

既然网格参数是固定的，我们必须解一步对数最优组合问题。因此，我们求解问题：

$$\max_{\alpha} E\{\ln[\alpha R+(1-\alpha)R_0]\}$$

这里 R 是一期股票随机回报，R_0 是无风险回报。详细地写出这个问题就是：

$$\max\{p_1\ln[\alpha u+(1-\alpha)R_0]+p_2\ln[\alpha+(1-\alpha)R_0]$$
$$+p_3\ln[\alpha d+(1-\alpha)R_0]\}$$

这个问题有最优解 $\alpha=0.505$。因此，容易从式（16—6）求得相应的风险中性概率是：

$$q_1=\frac{p_1}{\alpha\cdot u+(1-\alpha)R_0}c \tag{16—7}$$

$$q_2=\frac{p_2}{\alpha+(1-\alpha)R_0}c \tag{16—8}$$

$$q_3=\frac{p_3}{\alpha\cdot d+(1-\alpha)R_0}c \tag{16—9}$$

这里 c 是标准化常数。标准化后，这些值是 $q_1=0.218$、$q_2=0.635$ 和 $q_3=0.148$。

利用现有的这些值，用正常的后推求解方法进行网格计算。计算结果显示在图 16—2。求得的价格是 5.805 9 美元，非常接近于用布莱克－斯科尔

斯方程计算的价值 5.80 美元。

					99.85	452
股票价格网格				90.77	90.77	
			82.52	82.52	82.52	
		75.02	75.02	75.02	75.02	
	68.20	68.20	68.20	68.20	68.20	
62.00	62.00	62.00	62.00	62.00	62.00	
	56.36	56.36	56.36	56.36	56.36	
		51.24	51.24	51.24	51.24	
			46.58	46.58	46.58	
				42.35	42.35	
					38.50	
					39.85	
对数定价网格				31.27	30.77	
			23.51	23.02	22.52	
		16.51	16.01	15.52	15.02	
	10.43	9.85	9.27	8.70	8.20	
5.805 9	5.20	4.56	3.85	3.03	2.00	
	1.92	1.43	0.92	0.43	0.00	
		0.26	0.09	0.00	0.00	
			0.00	0.00	0.00	
				0.00	0.00	
					0.00	

图 16—2　用三项式网格计算的 5 个月看涨期权的对数最优定价

上面的网格包含可能的股票价格。下面的网格是用推出的概率通过风险中性定价求得的。

16.4 双网格

这一章提出的一般投资分析的出发点是描述一族资产过程的图形。我们怎样构造这样一个图形以包含每个资产的特征和各资产的关系呢？很明显，这种构造可能会相当复杂。

这一节说明如何结合每个资产的独立描述构造两个风险资产的图形。具体地说，结合两个二项式网格产生一个忠实描述两个资产的双网格。

假定我们有两种资产 A 和 B，每个资产都由一个二项式网格描述。每个网格都有上行和下行因子与概率，但两个网格的运动可能是相关的。图 16—3 显示的是一个时期的描述。



图 16—3 两个独立网格的一步

它们的运动可能是相关的。

两个网格组合起来实际上是每个时间步骤有四个分枝的网格。这种联合网格用双重编码最方便，称节点 11、12、21 和 22。第一个编号指第一个网
458 格，第二个编号指第二个网格。我们将转移概率分别定义为 p_{11}，p_{12}、p_{21} 和 p_{22}。图 16—4 显示的就是联合网格。这里的中心节点是初始时间的节点，而外面的四个节点是四个可能的继任节点。

假定股票 A 的网格有节点因子 u^A 和 d^A，概率分别为 p_1^A 和 p_2^A；而股票 B 的网格节点因子为 u^B 和 d^B，概率分别为 p_1^B 和 P_2^B。如果两个回报因子的

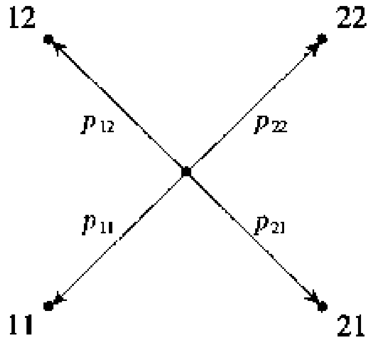


图 16—4　节点组合

从中央节点出发有四个可能的节点。

对数的协方差 σ_{AB}是已知的，我们可以选择双网格的概率满足：[1]

$$p_{11}+p_{12}=p_1^A$$

$$p_{21}+p_{22}=p_2^A$$

$$p_{11}+p_{21}=p_1^B$$

$$(p_{11}-p_1^A p_1^B)U^A U^B+(p_{12}-p_1^A p_2^B)U^A D^B+(p_{21}-p_2^A p_1^B)D^A U^B$$

$$+(p_{22}-p_2^A p_2^B)D^A D^B=\sigma_{AB}$$

这里和 $U^A=\ln u^A$，$D^A=\ln d^A$，$U_B=\ln u^B$ 和 $D^B=\ln d^B$。

协方差为 0 的特例对应于两资产回报独立的情况。这种情况下，求出合适的网格概率是 $p_{11}=p_1^A p_1^B$，$p_{12}=p_1^A p_2^B$，$p_{21}=p_2^A p_1^B$ 和 $p_{22}=p_2^A p_2^B$。

例 16.3（两个美妙的股票） 考虑两个具有同样的二项式网格描述 $u=1.3$，$d=0.9$ 和 $p_u=0.6$，$p_d=0.4$ 的股票。另外，假定它们的相关系数是 $\rho=0.3$。让我们求双网格描述。

令 S_A 和 S_B 表示最初价值是 1 经过一个时期后两只股票的随机价值，我们有：

$$E(\ln S_A)=E(\ln S_B)=0.6\times\ln1.3+0.4\times\ln0.9=0.115\ 27$$

$$\sigma^2=\text{var}(\ln S_A)=\text{var}(\ln S_B)$$

$$=0.6(\ln1.3)^2+0.4(\ln0.9)^2-0.115\ 27^2=0.032\ 45$$

$cov_{AB}=0.3\sigma^2=0.009\ 736$

454 因此，我们必须解如下方程：

$p_{11}+p_{12}=0.6$

$p_{21}+p_{22}=0.4$

$p_{11}+p_{21}=0.6$

$p_{11}(\ln 1.3)^2+p_{12}(\ln 1.3)(\ln 0.9)+p_{21}(\ln 1.3)(\ln 0.9)+p_{22}(\ln 0.9)^2$

$=0.009\ 736+(0.115\ 27)^2=0.023\ 023$

这个方程组的解是：

$p_{11}=0.432$

$p_{12}=0.168$

$p_{21}=0.168$

$p_{22}=0.232$

16.5 双网格定价

双网格构造确实提供了两个资产的有效描述方法，但是还存在一个问题。当加入无风险资产时，我们有四个节点，但只有三个资产：两个风险资产和一个无风险资产。存在一个额外的自由度。因此，风险中性概率没有如在原来的两个小网格中那样被完全指定。在风险中性概率的定义中，我们必须找到一种方法确定该自由度。

规定风险中性概率的一种方法是和前面一节一样引入效用函数。不同的效用函数可能导致不同的风险中性概率，但结果是在一定的条件下第四个关系独立于特定的效用函数面成立。

让我们引入效用函数 U。我们通过使预期效用最大化确定风险中性概率。用 X_{ij}^* 表示下一个时点在节点 ij 的财富最优价值，而且，相应地，定义 $U'_{ij}=U'(X_{ij}^*)$。因此，由式（16—6）求出风险中性概率是：

$$q_{ij} = \frac{p_{ij}U'_{ij}}{\sum_{k,l=1}^{2} p_{kl}U'_{kl}} \tag{16--10}$$

其中 i，$j=1$，2。如果效用函数 U 是严格递增的，那么风险中性概率是严格正的。

在某些特殊情况下，在 q_{ij} 之间将存在一个关系式，它提供额外的必要关系式使得它们是惟一的。其中两种情况在下面的定理中说明。

⇒**比率定理** *假定所有 q_{ij} 由式（16—10）确定。如果下面两个条件的一个得到满足：* 455

(a) 原来资产之一在最优组合中的头寸为 0。

(b) 时期间的 Δt 无限地变小。

则，下面的关系式：

$$\frac{q_{11}q_{22}}{q_{12}q_{21}} = \frac{p_{11}p_{22}}{p_{12}p_{21}}$$

成立。

证明：我们将证明在任何一个条件下 $U'_{11}U'_{22}=U'_{12}U'_{21}$。这个事实将推出最终结论。

(a) 假定资产 A 在最优组合中是 0 水平。那么，改变资产 A 不影响 U'。因此 $U'_{11}=U'_{21}$、$U'_{12}=U'_{22}$。所以 $U'_{11}U'_{22}=U'_{12}U'_{21}$。显然，如果资产 B 在最优组合中是 0 水平，同样的结论也成立。

(b) 再看第二个条件，若 Δt 很小。对最优组合，我们可写成 $X_{ij}=(\tilde{R}_i^A+\tilde{R}_j^B+\tilde{R}^0)\ X_t$，其中 $\tilde{R}_i^A$、$\tilde{R}_j^B$ 和 $\tilde{R}^0$ 项是组合中分别对应于风险资产 A、风险资产 B 和无风险资产的回报。对小的 Δt，一个时期的回报一定接近于 1。因此，有：

$$\begin{aligned}\tilde{R}_i^A+\tilde{R}_j^B+\tilde{R}^0 &= 1+r_i^A+r_j^B+r^0\\ &\approx(1+r_i^A)(1+r_j^B)(1+r^0)\end{aligned}$$

这里 r_i^A、r_j^B 和 r^0 很小。这个近似程序也适用于 U'，得到：

$$U'_{ij}=U'[(1+r_i^A+r_j^B+r^0)X_t]$$
$$\approx U'(X_t)+U''(X_t)(r_i^A+r_j^B+r^0)X_t$$
$$\approx U'(X_t)(1+\gamma\cdot r_i^A)(1+\gamma\cdot r_j^B)(1+\gamma\cdot r^0)$$

这里

$$\gamma=\frac{U''(X_t)X_t}{U'(X_t)}$$

U'_{ij} 的乘积形式意味着：

$$U'_{11}U'_{22}=U'_{12}U'_{21}$$

我们因此计算求得：

在(a)或(b)条件下，我们有 $U'_{11}U'_{22}=U'_{12}U'_{21}$。

$$\frac{q_{11}q_{22}}{q_{12}q_{21}}=\frac{p_{11}U'_{11}p_{22}U'_{22}}{p_{12}U'_{12}p_{21}U'_{21}}=\frac{p_{11}p_{22}}{p_{12}p_{21}}。$$

两个网格构造的重要特例是原来两个网格是独立的。在这种情况下，

456 $p_{11}=p_1^Ap_1^B$、$p_{12}=p_1^Ap_2^B$、$p_{21}=p_2^Ap_1^B$ 和 $p_{22}=p_2^Ap_2^B$。它是通过如下直接代换得到的：

$$\frac{p_{11}p_{22}}{p_{12}p_{21}}=1$$

因此，如果比率定理的任何一个条件得到满足，有：

$$\frac{q_{11}q_{22}}{q_{12}q_{21}}=1$$

而且从这个结论出发，可以证明原来的两个网格既关于原来的概率独立还关于风险中性概率独立。也就是说，关于原来的概率独立意味着关于风险中性概率独立。[2]

现在让我们回到原来的问题。在双网格中，我们有四个继任节点，但只有三个资产。对很小的 Δt，比率公式给出了要求决定四个风险中性概率的第四个关系。

两个网格情形的重要特例是其中一个网格为短期利率网格。这种情况可

以和辛普利可金矿例子描述的那样用同样的技术处理。

例 16.4（双随机辛普利可金矿） 考虑辛普利可金矿的 10 年租赁问题。在给这个租赁定价时，我们认识到黄金价格和利率都是随机的，但我们假定它们是独立的。

回想到每年可以每盎司 200 美元的成本从这个金矿开采高达 10 000 盎司的黄金。黄金价格最初是每盎司 400 美元，并且黄金价格根据上行因子 $u=1.2$和下行因子 $d=0.9$ 的二项式网格波动。出售一年生产的黄金获得的价格假定等于该年年初的黄金价格，但是现金流发生在年末。

在这种形式的问题中，我们假定利率期限结构由短期利率网格决定。最初的短期利率是 4%，而网格是简单的具有 $u'=1.1$ 和 $d'=0.9$ 的上升—下降模型。假定风险中性概率为 0.5。我们将用小 Δt 的近似，证明比率定理的结论是适用的。于是，因为黄金价格波动和短期利率波动是相互独立的，我们断定风险中性概率也是独立的。所以，实际概率和定价目的无关。

我们通过构造双网格解决这个问题。这个网格的每个节点代表黄金价格 g 和短期利率 r 的组合（g，r）。该网格的每个节点与四个相邻的节点（ug，$u'r$）、（ug，$d'r$）、（dg，$u'r$）和（dg，$d'r$）相连。这些弧线的风险中性概率只是两个初级网格运动的风险中性概率的乘积。对利率而言，每个风险中 457
性概率都是 0.5。对黄金而言，上行运动的概率是 $q_u=(1+r-d)/(u-d)$，这里 r 是（现在的）短期利率。因此，对应于通向标出节点弧线的、双网格的四个概率是 $q_{11}=0.5q_u$、$q_{12}=0.5q_u$、$q_{21}=0.5(1-q_u)$ 和 $q_{22}=0.5(1-q_u)$。

双网格可以建立成 10 个二维阵形系列。每个阵形包括该时期可能的（g，r）数对。因此，阵形通过风险中性定价公式联系起来。这个公式只是将四个继任节点的每个节点的价值乘以风险中性概率，将这些值加到该年末的现金流，并且用现在的短期利率贴现这些值。时期 10 的价值全是 0。图 16—5 说明了时期 9 和时期 8 的节点的价值。

时期 9										
g	0.015 5	0.018 9	0.023 1	0.028 3	0.034 6	0.042 3	0.051 7	0.063 1	0.077 2	0.094 3 r
2 063.91	18.355	18.293	18.271	18.126	18.016	17.883	17.724	17.532	17.304	17.033
1 547.93	13.274	13.229	13.174	13.108	13.029	12.933	12.817	12.679	12.514	12.318
1 160.95	9.463	9.431	9.392	9.345	9.288	9.220	9.137	9.039	8.921	8.781
870.71	66.048	6.582	6.555	6.523	6.483	6.435	6.378	6.309	6.227	6.129
653.03	4.461	4.446	4.428	4.406	4.379	4.347	4.308	4.261	4.206	4.140
489.78	28.535	2.844	2.832	2.818	2.801	2.780	2.755	2.726	2.690	2.648
367.33	1.648	1.642	**1.635**	**1.627**	1.617	1.605	1.591	1.574	1.553	1.529
275.50	7.435	0.741	**0.738**	**0.734**	0.730	0.724	0.718	0.710	0.701	0.690
206.62	0.065	0.065	0.065	0.064	0.064	0.064	0.063	0.062	0.061	0.061
154.97	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

时期 8									
g	0.017 2	0.021 0	0.025 7	0.031 4	0.038 4	0.047 0	0.057 4	0.070 2	0.085 7 r
1 719.93	29.917	29.812	29.685	29.531	29.345	29.121	28.852	28.529	28.144
1 289.95	21.463	21.390	21.301	21.194	21.064	20.907	20.719	20.493	20.224
967.46	32.925	15.073	15.013	14.941	14.853	14.747	14.619	14.466	14.283
725.59	21.784	10.336	10.297	10.251	10.194	10.126	10.044	9.946	9.828
544.20	14.492	6.782	6.760	6.733	6.701	6.661	6.613	6.555	6.486
408.15	9.058	4.118	4.107	4.095	4.080	4.062	4.040	4.013	3.980
306.11	4.123	2.119	**2.118**	2.117	2.115	2.113	2.110	2.106	2.100
229.58	1.900	0.620	0.626	0.633	0.641	0.651	0.662	0.675	0.690
172.19	0.025	0.026	0.026	0.027	0.028	0.030	0.031	0.033	0.035

图 16—5 辛普利可金矿的两个时期阵形

正如对应的阴影区域指出的时期 k 的每个节点有四个 $k+1$ 时期的继任节点。表中价值是以百万美元为单位的。

第一列说明可能的 g 值，而第一行说明可能的 r 值。主阵形的数值是对应的租赁价值（百万美元)。时期 8 阵形的节点价值是由时期 9 阵形的四个节点价值求得的，如图所示。

按这种方式后推计算，时期 0 只有一个节点的阵形，其价值为 22.255 1 百万美元。

16.6 具有个体不确定性的投资

假定一个工程需要初始现金费用，并且在一年末将产生不确定的现金流。还假定不确定性由**个体**（private）不确定性和**市场**（market）不确定性构成。基本上，市场不确定性可以用市场参与来复制，而个体不确定性却不能复制。例如，金矿租赁的现金流不仅取决于黄金价格的市场不确定性，还取决于有多少黄金在没有探明的矿脉中的个体不确定性。 458

确定这样一个工程的价值的方法是使人相信工程价值是价格，并且确定这个价格要使得：不论购买一小部分工程还是不买，你都不在乎。这种定价称为**零一水平定价**（zero-level pricing），因为你将在零水平上购买该工程。当然，这里假定你有购买其他资产（至少包括总回报为 R 的无风险证券）的期权。

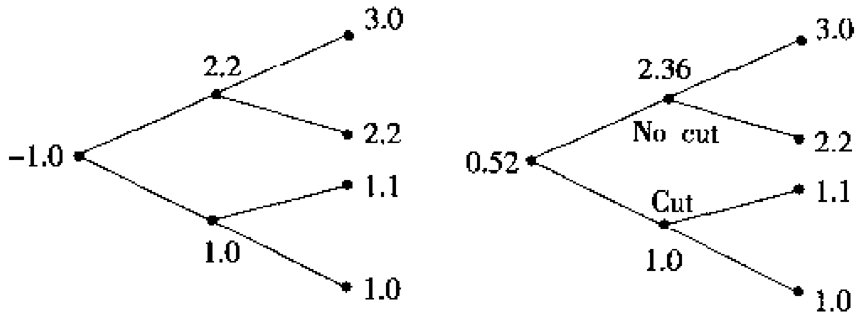
如果仅仅存在个体不确定性，则零—水平价格只是工程期望值（用实际概率）的贴现值。它不能定价更低了，因为再低你可能要购买一小部分工程。同样，它也不能定价更高；否则你可能要卖出一部分工程。因此，该工程的价值是：

$$V=c_0+\frac{1}{R}E(c_1)$$

这里 c_0 和 c_1 分别是最初的和最终的现金流。

注意到这个公式与市场资产价格的公式稍有不同。市场资产已经有价格了，并且你将有可能以非零水平把这些资产包含在你的组合中（或者多头或者空头）。

例 16.5（何时砍树）假定我们可能植树（为了木材）。树随机地生长，而与 1 年后或者 2 年后收获相关的现金流由图 16—6 左边的（图）树说明。树的每个弧线的概率是 0.5。不确定性是个体的，因为树的生长仅仅取决于当地的气候条件，并且与市场变量不相关。



(a)可能的现金流　　(b)价值

图 16—6　何时砍树

(a) 如果在该节点砍树产生的现金流。(b) 节点价值和最佳策略。

最初的现金流—1 必须支付，以实施这个工程。该期期末显示的现金流数字是如果 1 年后树被砍了将可能收到的现金。同样，显示的最终价值是如
459 果 2 年后树没有被砍掉将会收到的现金流。我们希望给这个工程定价，假定利率是常数 10%。为此，我们需要确定砍树的最佳策略。

我们利用零—水平定价方法，因为时期长度多于一期，我们按通常的方式向后推计算。最后时期上面两个节点的期望值是 2.6。将这个值按 10%的利率贴现后得到的价值是 2.36。因为，这个值比 2.2 大，所以它是如果 1 年后到达上面的节点能够获得的最优价值。我们将这个最优值记录在图 16—6（b）的价值图上。我们还在到达不会砍树的节点附近作一个记号。同样，最后时期下面两个节点的期望值是 1.05。将这个价值按 10%的利率贴现后的价值是 0.95，它小于 1.0，所以我们将在价值图上指定相邻的后面节点的价值为 1.0，并且在到达砍树的节点作一个记号。这两个单期最优值的期望值是 0.5(2.36＋1.0) ＝1.68，贴现后的价值为

1.52。因此，总价值是 0.52。

一般方法

前面关于具有个体不确定性的工程的零—水平定价可以推广到既有个体不确定性还有市场不确定性特征的工程。个体不确定性包括这样一些事情，如未知的生产效率（由于新工艺）、资源的不确定性（如油田的石油蕴藏量）、结果的不确定性（如研究和开发计划）和没有流动的市场（如一片孤立土地的将来价格）的商品价格不确定性成分。市场不确定性是与交易商品和其他资产价格相关的不确定性。

正式地，假定世界的状态被分成两部分因素：市场因素和非市场（个体的）因素。因此，一般状态（或者状态图中的节点）可以写成（s_t^m，s_t^n），对应于时间 t 的市场因素和非市场因素。为了简化起见（虽然不是必须的），我们假定这两个因素是统计独立的。

从一个给定的状态出发，有各种继任状态。在网格框架中，我们用 i 表示继任的市场状态索引（网格中的节点），用 j 表示非市场节点索引。第 i 个市场节点的概率是 p_i^m，而第 j 个非市场节点的概率是 p_j^n。因为，这两个因素是独立的，i 和 j 的联合概率是 $p_{ij}=p_i^m p_j^n$。现在，我们处于二重树或者二重网格的情境。

我们还假定系统的市场部分是完全的，意思是存在一系列证券横跨所有的市场状态。我们知道在这种情况下市场状态存在惟一的风险中性概率 q_i。

如果价格的确定使得工程本身以零水平进入最优组合，U'_{ij} 独立于索引 j，并且由前面一节的比率定理，风险中性概率 q_{ij} 也是独立的。因此，q_{ij} 具有 $q_{ij}=q_i^m p_j^n$ 的形式，这里 q_i^m 是市场状态的风险中性概率，而 p_j^n 是非市场状态[3]的概率（也是该状态的风险中性概率）。 460

注意到如果某工程没有市场因素，那么工程价格（或价值）由普通的概率决定；也就是说，工程价格由现金流期望值的贴现价值确定。在另一个极端，如果工程没有个体因素，则它的价格由风险中性市场概率决定；也就是

说，其价值为风险中性现金流期望值的贴现值。

这里有一个综合的例子说明怎样利用这些思想给复杂的工程定价。这个例子融入了本书的许多概念，并且作为一个综合性复习值得仔细学习。

例 16.6（拉彼多：迅速下降的油井） 你正在考虑投资于油井项目的可能性。如果成功，油井的生命期大约是 25 年。地质构造和其他资料表明：这可能是一个有利的地点。在任何初始钻探前，若钻探这个油井，那么从该油井的初期流量的最好估计可表示成可能的石油量和概率的一览表，如表 16—1 所示。我们将在分析中采取 5 年为一期时间（为了使问题规模足够小，以适合用一页纸描述）。在经营的前 5 年有 5 个可能的石油流量水平，显示在表中。

表 16—1　　经营最初 5 年的石油生产概率（每 5 年期千桶为单位）

生产的石油	0	20	40	60	100
概率	0.3	0.1	0.2	0.3	0.1

最初的钻探成本是 220 000 美元。钻探后，开始的流量能够被相当精确地估计到，因此可以决定是否完成这个油井钻探，使得这个油井能用于生产。完成钻探的成本是 500 000 美元。如果油井钻探结束，石油流量将随着储油层的枯竭而下降。这种下降可以表示成一种随机可能性，每个 5 年期末石油流量将以 30%的概率下降到较低的数值。油井油量的这个下降速度非常快，因此给它起一个“拉彼多”的名字。

如果经营这口油井，5 年的经营成本是 400 000 美元的固定成本和每桶 5 美元的变动成本。从该油井抽取的所有石油都能以原油市场价格销售，现行价格是每桶 16 美元。我们希望求得这个油井项目的公平价格，它具有与石油期货价格相关的市场风险，和与石油生产不确定性相关的技术（个体）风险。

考虑生产概率的技术不确定性概括在图 16—7 显示的网格中。

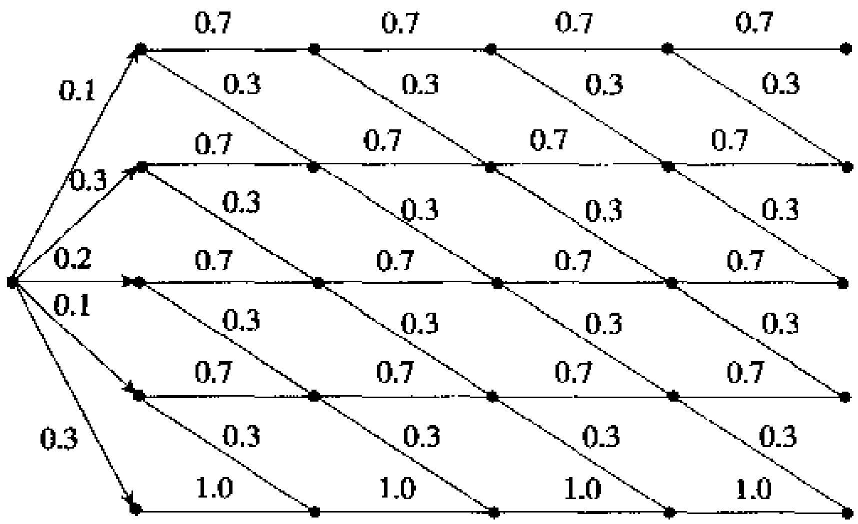


图 16—7 油井技术

有 5 个可能的初始流量，对应于开始节点的 5 个继任节点。具体的节点将由钻探结果决定。因此，每个相继的 5 年后，石油流量或（以 0.7 的概率）保持不变或（以 0.3 的概率）下降一个水平。

下一步我们必须规定市场结构。为简化起见，我们假定利率为每年 7% 保持不变，或者等价地说，每个 5 年期 40%。剩下的就是要规定石油市场 461
有关方面的情况。为此，我们将首先要对石油价格波动作出估计。这种估计可以从石油现货价格的历史记录来推算，但是还有可能从单日石油期权价格记录中直接估计石油价格波动性。虽然没有石油现货期权，但是我们能够利用石油期货期权作为适当的替代。图 16—8 左边的表显示了这种期权报价。

如果研究 8 月份执行价格为 1 600 和 1 700 的看涨期权，我们能够利用布莱克－斯科尔斯公式求解隐含的波动性和隐含的现在期货价格。这样推导出估计值 $\sigma=21\%$（见练习 7），并且我们假定这也是石油现货价格的波动性。如果我们应用普通的二项式网格近似程序，那么我们规定石油的上行因子 $u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=e^{0.21\sqrt{5}}=1.60$，下行因子 $d=1/1.60=0.625$。（这是将 $\Delta t=5$ 看成“小”的是不符合现实的；但是，我们正在将这个问题当成典型模型来对 462
待。更完善的模型将用较小的 Δt。）

石油

原油（NYM）
1 000 BBLS.；$ PER BBL.

敲定价格	Call-Settle 6月	Call-Settle 7月	Call-Settle 8月	Puts-Settle 6月	Puts-Settle 7月	Puts-Settle 8月
1600	1.33	1.21	1.29	0.04	0.21	0.42
1650	0.86	0.86	0.97	0.10	0.36	0.59
1700	0.51	0.58	0.70	0.22	0.60	0.82
1750	0.25	0.40	0.50	0.46	0.90	……
1800	0.11	0.25	0.34	0.82	1.25	……
1850	0.04	0.16	0.24	……	……	……

Est vol 3 794 Wed 18 173 calls 8 785 puts

Op int Wed 211，586 calls 170，881 puts

金属与石油

原油，Light Sweet（NYM）1，000 bbls；$ per bbl.

	开盘价	最高价格	最低价格	交割价格	变化幅度	合约开始以来的最高价格	最低价格	未平仓合约
6月	16.84	17.30	16.78	17.29	+.43	21.35	14.02	124 032
7月	na	17.02	16.60	17.00	+.35	20.78	14.15	73 360
8月	na	16.90	16.56	16.88	+.30	20.78	14.35	34 123
9月	na	16.81	16.57	16.83	+.27	20.78	14.50	28 809
12月	16.57	16.80	16.55	16.80	+.23	21.25	14.93	28 690
6月	16.90	16.87	16.87	16.96	+.18	21.21	15.73	17 396
12月	……	……	……	17.18	+.16	20.80	16.50	10 793
6月	17.40	17.58	17.40	17.43	+.14	20.26	17.22	14 698
12月	……	……	……	17.73	+.13	20.40	17.53	19 072

图 16—8　1994 年 5 月 6 日石油期货期权和石油期货报价

波动性可以由期权价格估计得到。风险中性概率可以直接从期货市场价格确定。

资料来源：《华尔街日报》，1994 年 5 月 6 日。

通常，下一步我们将利用公式 $q_u=(R-d)/(u-d)$ 计算网格的风险中性概率，假定 $q_u=0.8$，但是这个值在这里不合适。石油具有巨大的储存成本，因此用石油复制交易策略将需要支付储存成本。这将改变风险中性概率计算公式。（见 13.9 节。）实际上，即使石油储存是可能的，一般也不会持有石油作为投资手段，因为这么做的预期回报率不会足够高以抵消高昂的储存成本。石油市场的这种紧张性可以由图 16—8 右边的表所证明，它说明石油期货合约价格并没有正好与复合利率增长一样快，要是石油市场不紧张它们应该同步增长。（见 10.3 节。）事实上，我们注意到交割日增加 $2\frac{1}{2}$年，而期货价格仅仅按 17.73/17.29＝1.025 的因子增加。这相当于每年大约 1%的增长率。

但是，我们可以利用期货价格信息确定合适的风险中性概率。给定现货价格 S，根据我们的模型，下一期的价值将或者是 Su 或者是 Sd。5 年后到期的合约现在的期货价格大约是 $F=1.05S$。因为期货合约现在的价值是 0，而 5 年后的回报将或者是 $Su-F$ 或者是 $Sd-F$，我们一定有：

$$0=q_uS(1.6-1.05)+q_dS(0.62-1.05)$$

这可以得到：

$$q_u=0.44, q_d=0.56$$

这是我们能够用作石油价格状态风险中性概率的数值。

现在我们准备实施后推递归，确定石油项目的零—水平价格。在最后一期，从 $t=20$ 到 $t=25$ 有 25 个可能的状态，对应于该时期的 5 个石油流量因素和 5 个石油价格因素。我们考虑将这些因素设计成一个 5 行 5 列的阵形。在前一个时期，有同样的石油流量因素和 4 个石油价格因素，构成一个 5 行 4 列的矩形。按这种方式继续往后推至 0 期，刚好结束油井钻探时，这时有一个 5 行 1 列的状态矩形。因此，在 0 年开始钻探前，仅有单个节点。

图 16—9 说明了所有这些矩形。为了构造这个图形，首先要按通常的方式用二项式网格求出可能的石油价格，并且根据该年出现的价格将这些价格排列在阵形的最上面一行。可能的石油流量被排列在阵形的最后一列。

	$t=0$	$t=5$		$t=10$			$t=15$				$t=20$					
价格	16	10	25.6	6.25	16	41	3.91	10	25.6	65.5	2.44	6.25	16	41	105	流量
	1 938	517	3 994	67	1 523	6 713	0	279	2 756	9 395	0	0	700	3 196	9 586	100
	860	167	2 061	14.2	651	3 735	0	61	1 398	5 418	0	0	260	1 758	5 591	60
	288	46.9	1 000	1.94	203	2 085	0	8.8	694	3 292	0	0	40	1 038	3 594	40
总计	34.8	3.98	153	0	18.1	618	0	0	82.2	1 251	0	0	0	319	1 597	20
31.7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

图 16—9　拉彼多油井定价

第二行显示的可能的石油价格是通过二项式网格求出的，所以价值个数每期增加一个。每期有 5 个石油流量可能值。一旦确定合适的风险中性概率，后推定价就简单了。

后推计算只是简单的现金流期望和价值的直接贴现。为了简化起见，我们假定 5 年的时期里，所有的现金流都发生在该时期的期初。最后一个阵形仅仅由最后时期生产获得的利润组成。前面那些时期要将当时的利润加到下一期
463 价值的风险中性期望值的贴现值上。例如，在 $t=15$ 的阵形的右上角元素是：

$$v = \text{石油流量} \times \text{石油价格} - \text{成本} + \frac{1}{R}(\text{下一期的风险中性价值})$$

$$= 100 \times 65.5 - 400 - 5 \times 100 + \frac{1}{1.4}(0.44 \times 0.7 \times 9\,586 + 0.44 \times 0.3 \times 5\,591 + 0.56 \times 0.7 \times 3\,196 + 0.56 \times 0.3 \times 1\,758)$$

$$= 9\,395 (\text{四舍五入})$$

总的零—水平价格解释了完成油井钻探或者不完成期权。零—水平价格是 31 700 美元。注意这个相当复杂的问题是怎样通过简单的电子表格分析（但它包括大量的理论分析）解决的。

16.7 买入价格分析

工程机会经常出现在必须以固定的正水平投资或零水平投资的情况，而不会出现在其他情况。一个例子是参与合资企业的机会，每个参与者必须上缴工程的固定部分资本。另一个例子是单独承担一个工程的情形，如购买房地产投资项目。在这种情况下，零—水平价格可能不是合适的价值，因为所需要的现金费用可能代表投资资本的很大部分。

在这种情况下，一个更好的价值概念是**买入价格**（**buying price**）。买入价格定义为投资者按规定的水平参与工程时可能愿意支付的价格。这个价格 v_0 根据期望效用能得到最好的理解。我们首先计算不参与工程可能实现的期望效用。然后计算因参与工程可能实现的期望效用，包括额外的最初支付量 v_0。使这两个期望效用相等的 v_0 值就是买入价格。换句话说，如果 v_0 是

购买工程要支付的价格，投资者不会在乎拥有这个工程还是不拥有该工程。这个价格不同于零—水平价格，零—水平价格使投资者不在乎在一个很小的水平上参与和不参与该工程。

确定性等价和指数效用函数

假定投资者的效用函数具有指数形式 $U(x)=-e^{-ax}(a>0)$，那么一个工程的买入价格可以不费力地计算出来。计算程序应用确定性等价，而不是期望值。 464

让我们简明地考察一下确定性等价概念。假定某投资者有效用函数 U。假设 X 是描述投资者最终财富的随机变量。因此，这个财富的预期效用是 $E[U(X)]$。确定性等价是（非随机）数量 $\bar{x}$，使得 $U(\bar{x})=E[U(X)]$。我们常常将 X 的确定性等价写成 $CE(X)$。

作为具体例子，假定 $U(X)=-e^{-aX}$，并假定随机变量 X 有两个可能结果 X_1 和 X_2，它们分别以概率 p_1 和 p_2 发生。预期效用是：

$$E[U(X)]=p_1U(X_1)+p_2U(X_2)=-p_1e^{-aX_1}-p_2e^{-aX_2}$$

为了求得确定性等价，我们解如下方程：

$$e^{-a\bar{x}}=p_1e^{-aX_1}+p_2e^{-aX_2}$$

两边取对数，得到：

$$CE(X)=\bar{x}=-\frac{1}{a}\ln\{p_1e^{-aX_1}+p_2e^{-aX_2}\} \tag{16—11}$$

这个公式看起来可能很复杂，但是它却具有很重要而特殊的性质。

这种特殊性质是：如果一个常数，如 Δ，加到随机变量上去，那么确定性等价也增加同一个常数。这个性质常常被称为得尔塔性质（delta property）。正式地，有：

$$CE(X+\Delta)=CE(X)+\Delta$$

对任何随机变量 X 和任何常数 Δ 成立。参考式（16—11），这个性质可以轻松地检验两个结果的情形。

对指数效用函数，这里有一个一般证明，我们有：

$$E(e^{-aX})=e^{-aCE(X)}$$

因此，有：

$$E[e^{-a(X+\Delta)}]=e^{-a\Delta}E(e^{-aX})=e^{-a\Delta}e^{-aCE(X)}=e^{-a[CE(X)+\Delta]}$$

这说明：

$$\mathrm{CE}(X+\Delta)=\mathrm{CE}(X)+\Delta$$

这个得尔塔性质仅仅对指数形式的或者线性形式的效用函数成立。

⇒**得尔塔性质** *当且仅当对所有的随机变量 X 和所有的常数 Δ，确定性等价满足：*

$$\mathrm{CE}(X+\Delta)=\mathrm{CE}(X)+\Delta$$

一个效用函数是线性的或指数的。

CE 的序列计算

465 考虑具有已知的初始现金流 c_0 的单期工程，期末分别以概率 p_1 和 p_2 取价值为 c_1 和 c_2 的随机现金流。还存在回报为 R 的无风险资产。图 16—10 描述了这个工程。

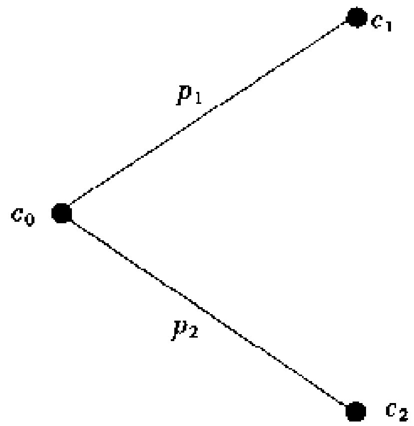


图 16—10 简单工程

这个工程有初始现金流 c_0，期末的现金流价值或是 c_1 或是 c_2。

假定投资者具有初始财富 X_0，并对最终财富应用指数效用函数。应用无风险借贷将开始时间的现金流转化为最终时间的现金流。如果没有获得该工程，那么最终效用值将是 $U(RX_0)$，因为最初的财富被无风险回报转化了。

如果以价格 v_0 获得该工程，则最终财富的预期效用将是：

$$p_1U\{[c_1+R(X_0+c_0-v_0)]\}+p_2U\{[c_2+R(X_0+c_0-v_0)]\}$$

当价格 v_0 被正确地确定时，获得该工程的预期效用将等于没有获得该工程的预期效用值；也就是 $U(RX_0)$。令这两个预期效用的确定性等价相等，我们得到：[4]

$$\mathrm{CE}[c_1+R(x_0+c_0-v_0),c_2+R(x_0+c_0-v_0)]=RX_0$$

注意左边两项包含 $R(X_0+c_0-v_0)$。这是一个常数，并且由得尔塔性质，它可以从 CE 的表达式中移出来。因此，我们得到：

$$\mathrm{CE}[c_1,c_2]+R[X_0+c_0-v_0]=RX_0$$

解 v_0，我们获得买入价格的表达式：

$$v_0=c_0+\frac{1}{R}\mathrm{CE}[c_1,c_2] \qquad (16\text{—}12)$$

注意到这个方程看起来恰好像一个净现值公式。确定性等价用来概括期末的现金流。

多期情形

前面的技术可以推广到定义在几个时期的现金流过程，但效用函数的风险厌恶系数必须每期作出调整。具体地说，用于确定时间 t 的确定性等价的风险厌恶系数一定是 aR^{T-t}，而不是原来的 a。这反映了时间 t 收到的财富 X 的有效效用函数是 $U(R^{T-t}X)$，而不是 $U(X)$，因为 X 在时间 T 将被转化成 $R^{T-t}X$。 466

作为完整计算的例子，考虑图 16—11 显示的两期工程。为了给这个工程定价，我们按通常的方式向后推。首先，我们用单期情形的公式计算 c_1

出现的节点价值 v_1；也就是说，$v_1=c_1+(1/R)\ \mathrm{CE}_2[c_3, c_4]$，这里 CE 的下标表示 $t=2$ 时使用的合适的风险厌恶系数（使用 a）。其次，节点 c_2 的值 v_2 按类似的方法计算为 $v_2=c_2+(1/R)\ \mathrm{CE}_2[c_5, c_6]$。最后，我们求得：

$$v_0=c_0+\frac{1}{R}\mathrm{CE}_1[v_1, v_2] \tag{16—13}$$

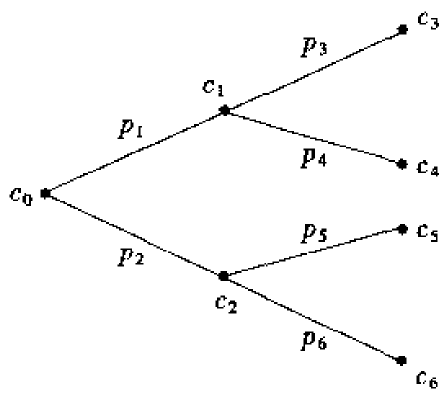


图 16—11　两期工程

买人价格可以通过后推过程确定确定性等价而求得。

这个最后的确定性等价是用单期利息放大的风险厌恶系数与以概率 p_1 和 p_2 分别取值 c_1 和 c_2 计算的。

例 16.7（何时砍树） 再次考虑上一节探讨过的砍树的例子，但这一次假定我们计划自己购买这个工程。我们必须买下整个工程，或者什么也不买。图 16—12（a）说明了该工程可能的现金流量。回想中间节点的数字是如果在该节点砍树而过程结束时该节点可能实现的现金流。而且，每个弧线的概率为 0.5。

467 假定我们的效用函数是 $U(x)=-e^{-3x}$，且利率和前而的例子一样是每年 10%。第一步是计算最后的两个最上面节点的确定性等价，这个确定性等价是：

$$-\frac{1}{3}\ln[0.5e^{-3\times 3.0}+0.5e^{-3\times 2.2}]=2.4$$

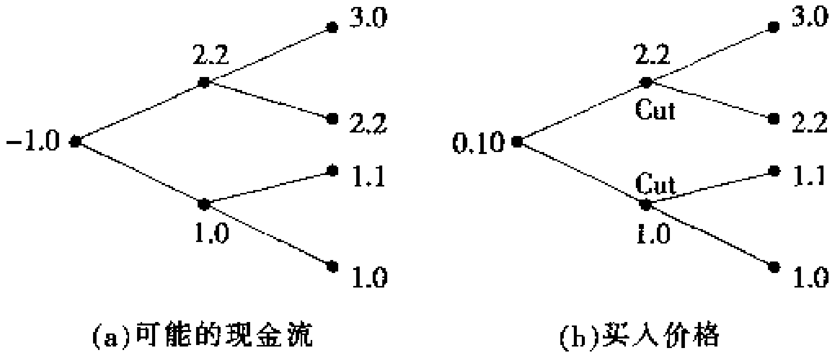


图 16—12　林场的买入价格

(a) 该节点砍树产生的现金流。(b) 节点的确定性等价和最佳策略。

当往后贴现一期时，这个值变成 2.18。因为，2.18 小于该点砍树可能实现的价值 2.2，所以我们决定砍树，并且指定该节点的买入价格就是 2.2。下面的节点也保持 1.0 的价值，因为很显然较低的最后一个阶段的确定性等价的贴现值小于 1。

最后，我们计算第一个节点的买入价格。为了计算确定性等价，我们必须将风险厌恶系数从 a 变成 aR，或这种情况下将 3 改成 3.3。相应地，该期合适的效用函数是 $U(x)=-e^{-3.3x}$。因此，中间两个节点的确定性等价是：

$$-\frac{1}{3.3}\ln[0.5e^{-3.3\times 2.2}+0.5e^{-3.3\times 1.0}]=1.21$$

将这个值贴现并考虑原来的现金流，我们求得 $v_0=0.10$。这比上一节求得的零一水平价格 0.52 低得相当多。这个价格一定较低，以致引诱我们购买整个工程而不仅仅是一小部分。

一般方法

现在假定世界的状态可以划分成独立的市场因素和非市场因素。时间 t 的一般状态和上一节一样写成 (s_t^m, s_t^n)，对应于市场因素和非市场因素。我们还假定系统的市场部分是完全的；也就是说，存在一整套资

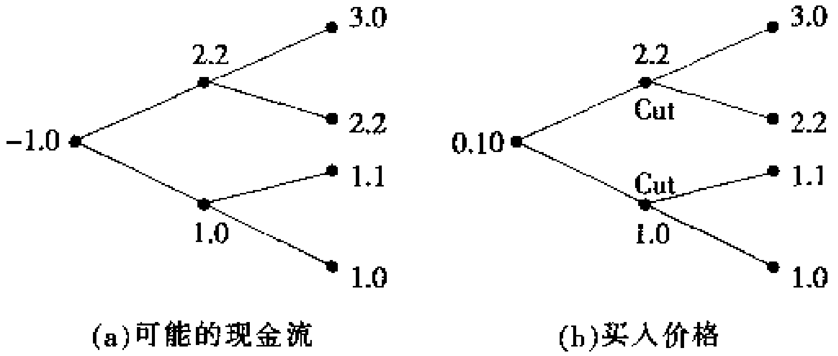


图 16—12　林场的买入价格

(a) 该节点砍树产生的现金流。(b) 节点的确定性等价和最佳策略。

当往后贴现一期时，这个值变成 2.18。因为，2.18 小于该点砍树可能实现的价值 2.2，所以我们决定砍树，并且指定该节点的买入价格就是 2.2。下面的节点也保持 1.0 的价值，因为很显然较低的最后一个阶段的确定性等价的贴现值小于 1。

最后，我们计算第一个节点的买入价格。为了计算确定性等价，我们必须将风险厌恶系数从 a 变成 aR，或这种情况下将 3 改成 3.3。相应地，该期合适的效用函数是 $U(x)=-e^{-3.3x}$。因此，中间两个节点的确定性等价是：

$$-\frac{1}{3.3}\ln[0.5e^{-3.3\times2.2}+0.5e^{-3.3\times1.0}]=1.21$$

将这个值贴现并考虑原来的现金流，我们求得 $v_0=0.10$。这比上一节求得的零--水平价格 0.52 低得相当多。这个价格一定较低，以致引诱我们购买整个工程而不仅仅是一小部分。

一般方法

现在假定世界的状态可以划分成独立的市场因素和非市场因素。时间 t 的一般状态和上一节一样写成 (s_t^m, s_t^n)，对应于市场因素和非市场因素。我们还假定系统的市场部分是完全的；也就是说，存在一整套资

	t=0	t=5		t=10			t=15				t=20					
价格	16	10	25.6	6.25	16	41	3.91	10	25.6	65.5	2.44	6.25	16	41	105	流量
	1 900	512	3 926	66.8	1 514	6 624	0	278	2 748	9 331	0	0	700	3 196	9 586	100
	849	165	2 041	14.2	649	3 710	0	60.8	1 396	5 402	0	0	260	1 758	5 591	60
	281	46.7	985	1.94	201	2 063	0	8.79	692	3 276	0	0	40	1 038	3 594	40
总计	34.5	3.98	150	0	18.1	610	0	0	81.9	1 242	0	0	0	319	1 597	20
-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

图 16—13 拉彼多油井的必然等价量分析

复杂问题通过单一电子表格模型处理。纵轴方向的数是按必然等价量组织的，而水平方向的数是按风险中性概率组织的。

$$v=\text{石油流量}\times\text{石油价格}-\text{成本}+\frac{1}{R}[q_u\text{CE}(95\ 865\ 591)+q_d\text{CE}\ (31\ 961\ 758)]$$

我们有：

$$\text{CE}(95\ 865\ 591)=-10\ 000\times\ln[0.7e^{-0.958\,6}+0.3e^{-0.559\,1}]=8\ 211$$

$$\text{CE}(31\ 961\ 758)=-10\ 000\times\ln[0.7e^{-0.319\,6}+0.3e^{-0.175\,8}]=2\ 742$$

因此，利用前面例子的 $q_u=0.44$ 和 $q_d=0.56$，我们得到：

$$v=100\times65.5-400-5.100+\frac{0.44\times8\ 211+0.56\times2\ 742}{1.4}$$

$$=9\ 331$$

注意到最初的买入价格是负的，表示这个工程太大，该投资者不能单独承担，正如零—水平分析显示的那样。但当承担较小部分工程或者风险厌恶系数较小时，它是一个好工程。

16.8 连续时间定价*

这一章讨论的定价原理既能应用于离散时间表示的问题，也能应用于连 469

续时间表示的问题。在连续时间情形，定价方程更紧凑，而结果更简洁。但是，实际计算的实施方式可能要涉及近似。其基础框架类似于 16.1 节绘制的离散时间基础状态图的描述，但是涉及更高级的概率理论。在稍失严格的情况下，我们可以提出主要的结论。

风险中性世界

作为一个简单情形，考虑价格由伊藤方程决定的单个股票：

$$dS=\mu(S,t)dt+\sigma(S,t)dz$$

这里 z 是标准化维纳过程。还假定存在常数利率 r。为了给股票的衍生证券定价，风险中性概率结构是有用的。这由下式给出：

$$dS=rSdt+\sigma(S,t)d\hat{z}$$

这里 $\hat{z}$ 还是标准化维纳过程。换句话说，我们只是将因子 $\mu(S,\ t)$ 改成 rS。在 13.4 节 $\sigma(S,\ t)\ =\sigma S$ 的情形证明了这个结果。

单资产的结果可以完美地推广到几个资产价格过程的情形。为简化起见，我们只提出两个标的资产的结果。

⇒一般风险中性世界结果 *假定两个资产的价格 S_1 和 S_2 由如下方程决定：*

$$dS_1=\mu_1(S_1,S_2,t)dt+\sigma_{11}(S_1,S_2,t)dz_1+\sigma_{12}(S_1,S_2,t)dz_2 \quad (16—14)$$

$$dS_2=\mu_2(S_1,S_2,t)dt+\sigma_{21}(S_1,S_2,t)dz_1+\sigma_{22}(S_1,S_2,t)dz_2 \quad (16—15)$$

这里 z_1 和 z_2 是独立的标准化维纳过程。假定无风险利率是 r。因此，这些资产产生的风险中性世界由如下方程定义：

$$dS_1=rS_1dt+\sigma_{11}(S_1,S_2,t)d\hat{z}_1+\sigma_{12}(S_1,S_2,t)d\hat{z}_2$$

$$dS_2=rS_2dt+\sigma_{21}(S_1,S_2,t)d\hat{z}_1+\sigma_{22}(S_1,S_2,t)d\hat{z}_2$$

这里 $\hat{z}_1$ 和 $\hat{z}_2$ 还是标准化维纳过程。

假定 S 是这两个资产的任意衍生资产的价格，并假定这个衍生证券具有现金流过程 $\delta(S_1,\ S_2,\ t)$ 和最终价值 $S(S_1,\ S_2,\ T)$。因此，在任何时间 $t<T$，衍生资产的价格是：

$$S(t) = \hat{E}_t\left[\int_t^T e^{-ru}\delta(S_1, S_2, u)\mathrm{d}u + e^{-r(T-t)}S(S_1, S_2, T)\right]$$

这里$\hat{E}_t$表示在时间t考察的关于风险中性世界的期望。

证明：本质上，这个结果说明 $S(t)$ 等于所有将来现金流的风险中性期望值的贴现值。这是一个强有力的结果，因为（在对 n 个标的资产的推广中）它广泛地适用于任何标的资产组。它是连续时间框架的一般定价公式。 470

这个结果可从双网格的有关结果直接推出。粗略地说，证明过程是：如果 σ_{12} 和 σ_{21} 两个都是 0，则原来的两个过程是独立的。因此，我们知道（在双网格中取 $\Delta t \to 0$）推出的风险中性过程也是独立的。所以，我们只要将单个过程的结果应用两次即可。如果 $\sigma_{12}=\sigma_{21}$ 不为 0，那么可以找到随机变量的线性变换，使得两个新过程 S'_1 和 S'_2 是独立的。我们把这个结果应用到这两个独立的过程。在风险中性世界中，这两个过程的漂移系数将等于 r。然后我们转换成原来的变量。原来的这些变量也将具有漂移系数 r，因为两个被转换的变量具有这个系数。

换句话说，和单个证券的情形一样，我们只要将漂移项 $\mu_i(S_1, S_2, t)$ 变成 rS_i。这个结果可以按显而易见的方式推广到许多资产。

利率过程

前面的结果能够推广到利率本身是随机的情况。特别地，假定利率衍生证券的定价是以风险中性短期利率过程为基础的：

$$\mathrm{d}r = \mu(r, t)\mathrm{d}t + \sigma(r, t)\mathrm{d}\hat{z}_0 \qquad (16—18)$$

这里 $\hat{z}_0$ 是标准化维纳过程，它独立于式（16—14）的过程。因此，用随机过程 r 作为证券定价方程中的利率，简单地将式（16—18）附加到式（16—16），可以求得风险中性世界。

对 S_1、S_2 和 r 的衍生证券，定价方程如下：

⇒**一般定价方程** *具有现金流过程δ和最终价值S（T）的衍生证券价值由风险中性定价方程决定：*

$$S(t)=\hat{E}_t\left\{\int_t^T \exp\left[\int_t^s -r(u)\mathrm{d}u\right]\delta \mathrm{d}s+\exp\left[\int_t^T -r(u)\mathrm{d}u\right]S(S_1,S_2,T)\right\}$$

例 16.9（康蒂纽科金矿） 康蒂纽科金矿是连续经营的。该金矿能够以每盎司 200 美元的经营成本每年开采高达 10 000 盎司的黄金。黄金价格由如下标准的几何布朗运动过程决定：

$$\mathrm{d}g=0.14g\mathrm{d}t+0.25g\mathrm{d}\hat{z}$$

471 初值 $g_0=400$ 美元。利率由短期利率的风险中性过程决定，具有 Ho-Lee 模型的形式：

$$\mathrm{d}r=0.005\mathrm{d}t+0.01\mathrm{d}\hat{z}_0$$

初值 $r_0=0.04$。利率波动独立于黄金价格波动。康蒂纽科金矿的 10 年租赁价值是多少?

解决这个问题的一种方法是用风险中性世界的过程进行模拟。我们将模拟下面两个方程：

$$\mathrm{d}g=rg\mathrm{d}t+0.25g\mathrm{d}\hat{z}$$

$$\mathrm{d}r=0.005\mathrm{d}t+0.01\mathrm{d}\hat{z}_0$$

根据 $g_0=400$ 和 $r_0=0.04$，利用 $\Delta\hat{z}$ 和 $\Delta\hat{z}_0$ 的两个独立的随机数发生器进行模拟。

在特定的向前模拟后，对应的现金流通过后推模拟定价（但它不是随机的）。合适的后推模拟是：

$$\mathrm{d}S=rS\mathrm{d}t-c\mathrm{d}t \tag{16--19}$$

且 $S(T)=0$。现金流 c 是：

$$c=\max(g-2\,000)\times 10\,000$$

微分方程（16—19）是用向前模拟求出的 g 和 r 的时间路径后推解出的。求出的 S（0）的值是金矿价值的一个估计。该价值可靠的总体估计是用不同

的模拟趋势求出的许多特定价值的平均值得到的。

注意到模拟方程（16—19）相当于：

$$S(t)=\int_t^T \exp\left(\int_t^s -r_u\mathrm{d}u\right)c\,\mathrm{d}s$$

解这个问题的另一种方法是建立一个网格，并利用后推风险中性定价方法。（见练习 10。）

16.9　小结

投机机会的定价变成其现金流的定价问题，但价值应该是由现金流对总的最优组合的影响构成的。作为分析的第一步，必须建立投资的现金流过程和投资与其他相关资产关系的模型。一般模型是每个时间点有许多状态（或节点）的图形。必须有足够的节点描述所有的重要状态。

一旦建立这个图形，就可以确定最优组合，它使最终财富的预期效用最大化。这个最优组合蕴涵一组风险中性概率，这些概率可用于给现金流由同一个图形描述的新资产定价。这种方式获得的价格是具有给定效用函数的投资者可能不在乎是否包括该资产的价格。它是零　水平价格。 472

构造描述一组资产的图形可能是一个挑战。一种途径是用二项式网格单独地描述每个资产，然后将这些网格按某种方式组合成双重、三重或者多重网格，使得紧扣资产的协方差结构。这种方法简单明白，并具有一些有用的理论性质，但它可能会导致高维结构。在每个时期，组合的网格具有的状态个数将比证券数更多，所以风险中性概率一般不惟一。但是，如果很小时，这些风险中性概率是惟一的。一旦确定风险中性概率，证券的价格就能够通过贴现的风险中性价值后推过程求得。

个体不确定性按不同于市场不确定性的方式处理，因为不存在有关的市场价格。通常，这意味着实际的个体概率应该恰好和风险中性概率一样，用

于确定资产的零—水平价格。

工程或资产的买人价格是投资者接受整个（或者规定的一部分）工程或者资产可能支付的价格。这个价格取决于投资者的效用函数，并且通常低于零—水平价格。如果最终财富的效用函数是指数形式的，则可以用后推定价过程求得买人价格。这种程序应用确定性等价决定个体不确定性，并用风险中性价格确定市场不确定性。这是因为个体不确定性不能被套期，但市场不确定性能够被套期。

几乎所有这些定价思想都能够应用于连续时间模型，而且公式更紧凑。但是，计算技术通常涉及离散时间模型近似。

练习

1.（状态树）某一基础状态图是每个节点有三个继任节点的树，编号为 a、b 和 c。有两种定义在这个树上、除最终时间 T 以外不支付股息的资产。在某一时期，已知这两种资产的价格被依赖于继任节点的因数相乘。表 16—2 显示了这些因数。

表 16—2

		a	b	c
证券	1	1.2	1.0	0.8
	2	1.2	1.3	1.4

（a）在这个时期存在短期无风险资产吗?

（b）构造套利机会可能吗?

473 2.（节点分离）考虑时间 $t=0$ 时无风险利率是 10%的短期利率二项式网格。在 $t=1$ 时，利率或是 10%（较高的节点），或是 0%（较低的节点）。

跟踪时间 $t=0$ 时的 1 美元无风险投资的增长，并在时间 $t=1$ 时再滚动一个时期。在时间 $t=1$ 和 $t=2$ 时获得的价值相当于 R_{01} 和 R_{02}。证明这些因素不能描述在二项式网格上，但相反地需要由一个完整的树来描述。画出这棵树。

3. （债券定价）假定练习 2 的短期利率过程和 0.5 的风险中性概率，考虑时间 $t=2$ 支付 1 美元的零息债券。用两种方法求这种债券在时间 $t=0$ 时的价值：

(a) 利用短期利率网格和方程（16—1）。

(b) 利用 R_{0j} 的树和方程（16—2）。

4. （最优组合定价⊕）用例 16.2 使用的同样的三项式网格，但效用函数为 $U(x)=\sqrt{x}$，求该例子中 5 个月看涨期权的价值。α 是多少？

5. （黄金相关性）假定双重随机辛普利可金矿例子中黄金价格上行运动的实际概率是 0.6，而短期利率上行运动的实际概率是 0.7。还假定黄金价格和短期利率波动具有 −0.4 的相关系数。求合适的 q_{ij}。

6. （科普莱克斯可金矿⊕）利用第 12 章例 12.8 的科普莱克斯可金矿的信息，但假定黄金价格和利率由例 16.4 的模型决定。求科普莱克斯可金矿的租赁价值。

7. （同时求解）应用 $T=0.25$ 的布莱克-斯科尔斯方程，求图 16—8 的 8 月份看涨期权 1 600 和 8 月份看涨期权 1 700 隐含的波动性和石油期货的现在价格。

8. （违约风险⊕）某公司发行了 5 年后到期、利率 10%的零息债券。但是，这个公司陷入了困境，据估计每年有 0.1 的概率将在当年违约。（一旦公司违约，就没有进一步的利息和本金支付。）这种债券的价值是多少？

(a) 假定利率期限结构是 10%的水平线。

(b) 假定短期利率现在是 10%并且短期利率每年以 0.5 的风险中性概

率或者乘以 1.2 或者乘以 0.9。违约风险独立于利率。

9.（汽车选择）史密斯先生要买一辆汽车，并且在品牌 A 和 B 之间抉择。A 汽车要花费 20 000 美元，而史密斯先生估计：按他驾驶的速度两年后他将按同样的价格购买另一辆同样型号的汽车。在每个两年末，汽车将各以 0.5 的概率或者 10 000 美元或者 5 000 美元的价格转售。B 汽车要花费 35 000 美元，并且 4 年后各以 0.5 的概率或者 12 000 美元或者 8 000 美元的估计价格转售。两种汽车的年度维护费用每年是不变的，并且两种汽车的维护费用相同。现在史密斯先生具有风险厌恶系数为 $a=1/1\ 000$ 美元的指数效用函数。实际利率保持 5%不变。从 4 年时期的经济观点看，他应该决定买哪种汽车更好，而差的确定性等价是多少？

474 10.（康蒂纽科金矿模拟）用 $\Delta t=0.25$ 的模拟给康蒂纽科金矿租赁定价。

11.（盖文的期终考试）琼斯先生正在考虑一个将产生随机年现金流序列的新葡萄水果企业。他问他的儿子盖文，“人们告诉我，我应该用资本成本数字贴现这个现金流。他们说这是以 CAPM 为基础的。你已经放弃那个问题了吗？我已经好一会儿没有听你谈起这个问题了。”

盖文回答说，“需要特殊条件证明这个问题对一个以上时期合适。我们有一次关于这个问题的期终考试。”

考虑两年的模型。每年的无风险利率是 r。两年中马克维茨组合（随机）回报率分别是 r_1 和 r_2，并且它们是独立的。第 2 年末存在单一的随机现金流 x_2。用 $x_{2|0}$ 和 $x_{2|1}$ 分别表示给定时间 0 和 1 的信息时的随机变量 x_2，并令 E_0 和 E_1 表示时间 0 和 1 时的期望。同样，令 V_0 和 V_1 分别表示时间 2 收到的 x_2 在时间 0 和 1 的价值。假定 $E_0\{E_1[x_{2|1}]\}=E_0[x_{2|0}]$，并且 $\mathrm{cov}[x_{2|1}/V_1, r_2]$ 独立于时间 2。证明时间 2 收到的 x_2 在时间 0 的价值是：

$$V_0=\frac{E_0[x_{2|0}]}{[1+r+\beta_1(\bar{r}_1-r)][1+r+\beta_2(\bar{r}_2-r)]}$$

这里 $\beta_1=\mathrm{cov}[V_1/V_0, r_1]/\sigma_{r_1}^2$

求 V_1 和 β_2。

【注释】

[1] 将前两个方程相加得到 $p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}=p_1^A+p_2^A=1$，所以概率相加等于 1。而且从上述方程中减去第三个方程得到 $p_{12}+p_{22}=1-p_1^B=p_2^B$。并且注意到最后一个方程可写成 $p_{11}U^AU^B+p_{12}U^AD^B+p_{21}D^AD^B+p_{22}D^AD^B=\sigma_{AB}+$（$p_1^AU^A+p_2^AD^A$）（$p_1^BU^B+p_2^BD^B$）。

[2] 简明地，令 **Q** 为具有元素 [q_{ij}] 的 2×2 矩阵。因此，不变性条件说 **Q** 是奇异的，意味着对某些 2×1 向量 **a**，**b** 有 $\mathbf{Q}=\mathbf{ab}^T$。标准化使得这两个矩阵的元素和等于 1，而且这定义了单个概率。

[3] 即使二重树的每一部分的状态多于两个独立性论断仍适用。

[4] 作为速记符号，如果 c_1 和 c_2 是两个最终状态的现金流，我们将相应的必然等价量写成 CE [c_1，c_2]。

【参考文献】

这一章的许多内容是比较新的。多期投资的总体结构是在文献 Duffie [1] 中提出的。多变量网格的构造已经在许多方面取得进展，可参见文献 [2～3]。这里的理论是在文献 [4] 中提出的。买入价格分析是根据文献 Smith and Nau [5] 改编的。

1. Duffie, D. (1996), *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd ed., Princeton University Press, NJ.
2. Boyle, P. P., J. Evnine, and S. Gibbs (1989), "Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims", *Review of Financial Studies*, 2, 241—250.

3. He, H. (1990), "Convergence from Discrete-to Continuous-Time Contingent Claims Price", *Review of Financial Studies*, 3, 523—546.
4. Luenberger, D. G. (1996), "Double Trees for Investment Analysis", presented at the Conference on Computational Economics and Finance, Geneva, June.

附录 A　概率基础理论

A.1　一般概念

正如第 6 章讨论的一样，随机变量 x 是由它的**概率密度函数**（**probability density function**）描述的。如果 x 只能取有限个数值，如 x_1，x_2，…，x_m，则密度函数给出每个结果值的概率。我们可以将概率密度函数表示成 $p(\xi)$，并且它仅在 $\xi=x_1$，x_2，…，x_m 值时取非零值。具体地说，有： 475

$$p(x_i) = \text{prob}(x_i)$$

就是说，$p(x_i)$ 是 x 取 x_i 的概率。对所有 x，我们总是有 $p(\xi) \geqslant 0$，并且，$\sum_i p(x_i) = 1$。

如果随机变量 x 可以取连续的值，如所有实数，则概率密度函数还是定义在所有这些值上的函数。粗略地说，这种情形的解释是：

$$p(\xi)\mathrm{d}\xi = \text{prob}(\xi \leqslant x \leqslant \xi + \mathrm{d}\xi)$$

随机变量的**概率分布**（**probability distribution**）是如下定义的函数 $F(\xi)$：

$$F(\xi) = \text{prob}(x \leqslant \xi)$$

它满足 $F(-\infty) = 0$ 和 $F(\infty) = 1$。在取连续值的情况下，如果 F 在 ξ 点可微，那么 $\mathrm{d}F(\xi)/\mathrm{d}\xi = p(\xi)$。

两个随机变量 x 和 y 由它们的**联合概率密度**（**joint probability density**）或者**联合概率分布**（**joint probability distribution**）描述。联合分布是这样定义的函数 F：

$$F(\xi, \eta) = \text{prob}(x \leqslant \xi, y \leqslant \eta)$$

联合密度是按照导数定义的，或者如果只存在有限个可能的结果，数对 x_i，y_j 的联合密度 $p(x_i, y_j)$ 等于该数对出现的概率。一般地，n 个随机变量由关于 n 个随机变量的概率分布定义。

476 根据联合分布，可以很容易获得任何一个随机变量的分布。例如，给定 x 和 y 的分布 $F(\xi, \eta)$，则 x 的分布是：

$$F_x(\xi) = F(\xi, \infty)$$

则随机变量 x 和 y 是**独立**（**independent**）的。如果密度函数分解成如下形式：

$$p(\xi, \eta) = p_x(\xi)\, p_y(\eta)$$

这是一个骰子两次公平抛掷定义的随机变量的情况。例如，抛得数对（3，5）的概率是 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$。

具有密度函数 p 的随机变量 x 的**期望值**（**expected value**）是：

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi\cdot p(\xi)\mathrm{d}\xi$$

如果用 $\bar{x}$ 表示 $E(x)$，则 x 的方差是：

$$\mathrm{var}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\bar{x})^2p(\xi)\mathrm{d}\xi$$

同样，x 和 y 的协方差是：

$$\mathrm{cov}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\bar{x})(\eta-\bar{y})p(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

容易证明：如果 x 和 y 是独立的，则它们有零协方差。

A.2　正态分布随机变量

如果概率密度函数具有如下形式：

$$p(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\xi-\mu)^2}$$

随机变量 x 称为**正态分布**（**normal**）或者**高斯分布**（**Ganssian**）。在这种情况下，x 的期望值 $\bar{x}=\mu$ 且 x 的方差是 σ^2。这个密度函数是独特的“钟形”曲线，如图 A—1 所示。

如果 $\bar{x}=0$，$\sigma^2=1$，则正态分布随机变量是**标准化**（**normalized**）的或者**标准的**（**standard**）。因此，标准正态随机变量具有密度函数（以变量 x 表示）：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

相应的标准分布用 N 表示，并由如下表达式给定：

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\mathrm{d}\xi$$

$N(x)$ 没有解析表达式，但由于它的重要性，函数值表和解析近似是可以获得的。

477 为了描述多于一个的随机变量，用矩阵符号是方便的。我们令 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 个随机变量的向量。这个向量的期望值是向量 $\bar{\mathbf{x}}$，它的元素是 $\mathbf{x}$ 的元素的期望值。因此，与 $\mathbf{x}$ 有关的**协方差矩阵**（**covariance matrix**）是具有元素 $[\mathbf{Q}]_{ij}=\mathrm{cov}(x_i, x_j)$ 的 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{Q}$。如果 $\mathbf{x}$ 被看成列向量，则 $\mathbf{x}^T$ 是相应的行向量，因此 $\mathbf{Q}$ 可以表示成：

$$\mathbf{Q}=E[(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T]$$

如果 n 个随机变量是联合正态的，则 $\mathbf{x}$ 的分布密度是：

$$p(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{Q}|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})}$$

如果两个联合正态随机变量是不相关的，那么容易看出，联合密度函数可以分解成两个独立随机变量的密度函数的乘积。因此，如果两个联合正态随机变量是不相关的，则它们是独立的。

联合正态随机变量最重要的性质是求和性质。具体地说，如果 x 和 y 是联合正态的，那么所有具有 $\alpha x+\beta y$ 形式的随机变量（α，β 是常数）也是正态的。这个结果很容易推广到高阶和。事实上，如果 x 是联合正态随机变量的列向量，而 $\mathbf{T}$ 是 $m\times n$ 矩阵，那么向量 $\mathbf{Tx}$ 是联合正态随机变量的 m-维向量。

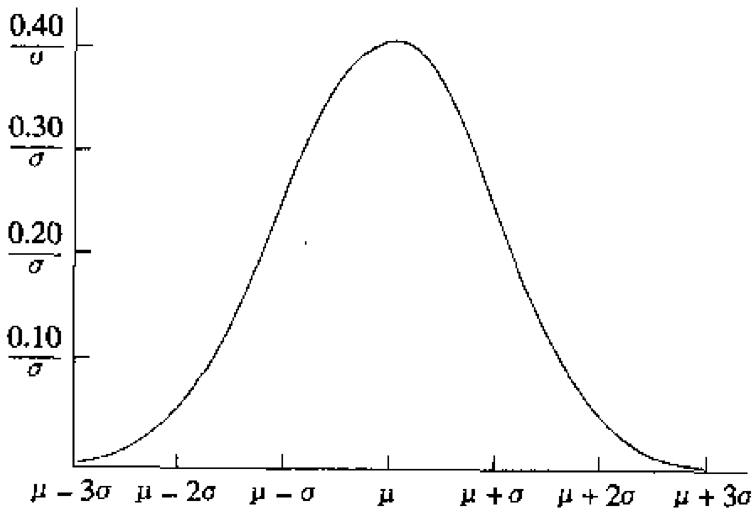


图 A—1　正态分布

期望值是 μ 而方差是 σ^2。

A.3 对数正态随机变量

如果随机变量 ln$z$ 是正态的，随机变量 z 就是对数正态的。等价地，如果 x 是正态的，那么 e^x 是对数正态的。用具体的术语，这意味着 z 的密度函数具有形式：

$$p(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\xi}e^{\frac{1}{2\sigma^2}(\ln\xi - v)^2}$$

我们求得如下值： 478

$$E(z)=e^{v+\sigma^2/2} \qquad (A—1)$$

$$E(\ln z)=v \qquad (A—2)$$

$$var(z)=e^{(2v+\sigma^2)}(e^{\sigma^2}-1) \qquad (A—3)$$

479 这个附录复习这个教材应用的微积分和优化的基本数学内容。

B.1 函数

函数指定依赖其独立变量的值。通常，函数用一个字母，如 f 表示。如果 f 的值依赖于单一变量 x，则相应的函数值用 $f(x)$ 表示。一个例子是函数 $f(x)=x^2-3x$。我们可以确定这个函数在 $x=2$ 时的函数值为

$f(2)=2^2-3\times2=-2$。虽然函数按它的名字，如 f 称呼是十分合适的，但有时称 $f(x)$ 为一个函数很方便也很常见，即使 $f(x)$ 实际上是 f 在 x 的函数值。

函数可以定义在某些特定的数值上。例如，在许多情况下，函数仅仅在整数值上有定义，这时独立变量通常用 i，j，k，m 或 n 表示。这种函数的例子是 $d(n)=1/(1+r)^n$，它是贴现函数。

几个变量的函数也很重要。例如，函数 g 可以依赖两个变量 x 和 y，这种情况下 g 在 x 和 y 的值是 $g(x, y)$。一个例子是 $g(x, y)=x^2+3xy-y^2$。

某些类型的函数常常用于投资学。这些函数包括：

1. 指数函数 指数函数是具有如下形式的单一变量 x 的函数：

$$f(t)=ac^{bt}$$

这里 a、b 和 c 是常数。常数 c 常常是 $e=2.718\ 281\ 8\cdots$ 它是自然对数的底数。

当变量限定取整数时，也有指数函数，如函数 $k(n)=(1+r)^n$，它说明在复利条件下资本是怎样增长的。在这种情况下，称函数显示几何增长性，或者几何增长函数。 480

2. 对数函数 自然对数函数是用 ln 表示的函数，它满足如下关系：

$$e^{\ln(x)}=x$$

一些重要的函数值是 $\ln(1)=0$，$\ln(e)=1$ 和 $\ln(0)=-\infty$。

3. 线性函数 单一变量 x 的线性函数具有形式 $f(x)=ax$，这里 a 是常数。几个变量 x_1，x_2，…，x_n 的函数是线性的，如果它具有形式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

a_1，a_2，…，a_n 是某些常数。

4. 反函数 如果对每个 x 都有 $g(f(x))=x$ 成立，一个函数 f 具有反函数 g。通常，反函数用 f^{-1} 表示。

作为例子，考虑函数 $f(x)=x^2$。这个函数具有反函数 $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$。

显然地，$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$。另一个例子，如果 f 是对数函数 $f(x) = \ln(x)$，那么反函数是 $f^{-1}(y) = e^y$，因为 $e^{\ln(x)} = x$。如果 g 是 f 的反函数，那么 f 是 g 的反函数也是正确的。例如，我们知道 $\ln(e^x) = x$。

5. 向量表示 当计算几个变量时，将它们看成一个向量并写成 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$。因此，我们将这些变量的函数值写成 $f(\mathbf{x})$。

B.2 微积分

假定读者熟悉微分知识。我们将复习教材中应用的许多概念。

1. 极限 微分是以函数的极限概念为基础的。如果 x 趋近于 x_0 时，函数值 $f(x)$ 趋近于 L 值，我们写成：

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

一个例子是 $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$。

2. 导数 给定函数 f，f 在 x 的导数是：

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

有时我们将 f 在 x 的导数写成 $f'(x)$。了解如下常用的导数是很重要的：

(a) 如果 $f(x) = x^n$，则 $f'(x) = nx^{n-1}$。

(b) 如果 $f(x) = e^{ax}$，则 $f'(x) = ae^{ax}$。

(c) 如果 $f(x) = \ln(x)$，则 $f'(x) = 1/x$。

481 **3. 高阶导数** 高阶导数是对导数求导数而形成的。例如，f 的二阶导数是函数 f' 的导数。我们用 $\mathrm{d}^n f/\mathrm{d}x^n$ 表示 f 的第 n 阶导数。在二阶导数的特殊情况下，我们常常用另一个记号 f''。

作为例子，考虑函数 $f(x) = \ln(x)$。一阶导数是 $f'(x) = 1/x$；二阶导数是 $f''(x) = -1/x^2$。

4. 偏导数 几个变量的函数可以关于每个变量的增量部分地求微分。

我们定义：

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_i+\Delta x,x_{i+1},\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\Delta x}$$

例如，假定 $f(x,y)=x^2+3xy-y^2$。因此，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x+3y$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x-2y$。

我们把 f 的全微分写成：

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

5. 近似　函数 f 可以用它的导数在给定点 x_0 的邻近区域近似。下面的两个近似关系特别有用：

(a) $f(x_0+\Delta x)=f'(x_0)\Delta x+O(\Delta x)^2$

(b) $f(x_0+\Delta x)=f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x_0)(\Delta x)^2+O(\Delta x)^3$

这里 $O(\Delta x)^2$ 和 $O(\Delta x)^3$ 分别表示和 $(\Delta x)^2$ 和 $(\Delta x)^3$ 同阶项。这些近似仅仅适用于具有完美定义导数的普通函数。它们不适用于包含维纳过程的函数。(见第 11 章。)

B.3 最优化

优化是投资问题中十分有用的工具。这一节仅仅复习最简单的要点；但这些知识对学习本教材的大部分内容足够了。

1. 必要条件　如果 $f(x_0)\geqslant f(x)$ 对所有 x 都成立，单变量 x 的函数 f 称为在点 x_0 有最大值。如果点 x_0 不是定义 f 的区间的边界点，那么 x_0 是最大值点，这里必须要求 f 在点 x_0 的导数等于 0，也就是：

$$f'(x_0)=0$$

这个方程可以用来求最大点 x_0。

例如，考虑函数 $f(x)=-x^2+12x$。为了求得最大值，我们令其导数等于 0，得到方程 $-2x+12=0$。求得解 $x=6$，它是最大值点。

当函数 f 依赖于几个变量时，类似的结论也成立。在最大值点（没有

482 一个变量在边界点），f 的每个偏导数一定等于 0。换句话说，在最大值点，有：

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_2}=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_n}=0$$

这是 n 个未知数 x_1，x_2，…，x_n 的 n 个方程的方程组。

2. 拉格朗日乘数 考虑点 x 必须满足 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$ 的附加约束条件的、有几个变量的函数 f 的最大值问题。我们说我们在寻找如下最优化问题的解：

$$\max_{x} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$\text{s. t. } g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$$

使得通过引入拉格朗日乘数 λ，可以求得最大值条件。我们构造拉格朗日函数：

$$L=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\lambda g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

因此，我们就像没有约束时求最大值的必要条件一样讨论拉格朗日函数。具体地说，我们令 L 关于每个变量的偏导数等于 0。这样给出了有 n 个方程的方程组，但是现在有 $n+1$ 个未知数 x_1，x_2，…，x_n 和 λ。我们从原来的约束条件 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$ 得到一个额外的方程。因此，我们有一组 $n+1$ 个方程和 $n+1$ 个未知数的方程组。

如果存在另外的约束条件，我们定义另外的拉格朗日乘数——每个约束条件一个拉格朗日乘数。例如，问题：

$$\max_{x} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\text{s.t. } g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

可以通过引入两个拉格朗日乘数 λ 和 μ 求解。拉格朗日函数是：

$$L = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \lambda \cdot g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \mu \cdot h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

令这个拉格朗日函数的偏导数都等于 0，得到 n 个方程。从原来的约束条件中可得到另外两个方程。因此，共有 $n+2$ 个方程和 $n+2$ 个未知数。

有些问题具有形如 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0$ 的不等式约束条件，如果只

[redacted]

484 这里给出所有奇数题号练习的答案。[1]如果练习涉及证明，只给出简明的概要或提示。

第 2 章

1. (a) 1 000 美元；(b) 1 000 000 美元。

3. (a) 3.04%； (b) 19.56%； (c) 19.25%。

5. PV=4 682 460 美元

7. $x<3.3$

9. 6 948 美元

11. $NPV_1=29.88$，$NPV_2=31.84$；因此，推荐 2。

$IRR_1=15.2\%$，$IRR_2=12.4\%$；因此，推荐 1。

13. （b）$c=0.940$，$r=6.4\%$。

15. 不应用通货膨胀率：NPV＝－435 000 美元；应用通货膨胀率：NPV＝89 000 美元。

第 3 章

1. 4 638.83 美元。

3. （a）95.13 年；（b）40 746 美元；（c）38 387 美元。

5. YTM<9.366%。

7. 每年的价值是 $A_A=6\ 449$ 美元，$A_B=7\ 845$ 美元。

9. 91.17.

11. $D=\frac{1+r}{r}$，$D_M=1/r$。

13. $dP/d\lambda=-DP$。

15. $C=T^2$。

第 4 章 485

1. 7.5%。

3. $P=65.9$。

5. (a)$f_{t_1,t_2}=[s(t_2)t_2-s(t_1)t_1]/(t_2-t_1)$；(c)$x(t)=x(0)e^{s(t)t}$。

7. $P=37.64$。

9. $(1+r)^i(1+f_{i,j})^{j-i}=(1+r)^j$ 隐含着$(1+f_{i,j})^{j-i}=(1+r)^{j-i}$，意味着 $f_{i,j}=r$。

11. PV＝9.497。

13. $x_1\approx-13.835$，$x_2\approx30.995$。

15. $a_k=1/(1+r_{k-1})^2$，$b_k=1/(1+r_{k-1})$。

第5章

1. 近似：工程1、2、5；最优：工程1、2、3。

3. 由工程4、5、6、7或者1、4、5、7实现的NPV=610 000美元。

5. 网格16，树40。

7. 关键的$d^*=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx0.618$。值$r=0.33$和$r=0.25$给出$d=0.75$和$d=0.8$，所以解是一样的。

9. (b) PV=366 740美元；提高2年，然后正常。

11. 利用提示并解S。

第6章

1. $R=(2X_0-X_1)/X_0$。

3. (a) $\alpha=19/23$；(b) 13.7%；(c) 11.4%。

5. (a) $(1.5\times10^6+0.5u)/(10^6+0.5u)$；(b) 300万单位，0方差，20%的回报。

7. (a)$\mathbf{w}=(0.5,0,0.5)$；(b)$\mathbf{w}=(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{2})$；(c)$\mathbf{w}=(0,0.5,0.5)$。

9. $r=\left[\sum_{i=1}^{n}(1/A_i)\right]^{-1}-1$。

第7章

1. (a) $\bar{r}=0.07+0.5\sigma$；(b) $\sigma=0.64$，借入1 000美元并投资2 000美元；(c) 1 182美元。

3. (a) $0.1\leqslant\bar{r}_M\leqslant0.16$；(b) $0.12\leqslant\bar{r}_M\leqslant0.16$。

5. $\beta_i=x_i\sigma_i^2\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\sigma_j^2\right)^{-1}$。

486 7. (a) $A=1$；(b) $\alpha=\sigma_0^2/(\sigma_0^2-\sigma_i^2)$；(c) 零—β点是有效的，但低于MVP；(d) $\bar{r}_i=10\%$。

9. 恒等式要求简单的代数运算。

第8章

1. (a) 11.44%；(b) $\sigma=16.7\%$。

3. 正态化的 $\mathbf{v}=(0.217, 0.263, 0.360, 0.153)$；特征值＝311.16；本金部分完全跟着市场变化。

5. (a) $\sigma(\bar{r}=\sigma)$；(b) $\sigma(\hat{\sigma}^2)=\sqrt{2}\sigma^2/\sqrt{n-1}$。

7. 方法：用 i 表示按半个月编制的索引。令 r_i 和 ρ_i 为从 i 开始的整月和半月的回报。假定 ρ_i 不相关。因此，$r_i=\rho_i+\rho_{i+1}$。证明 $\mathrm{cov}(r_i, r_{i+1})=\frac{1}{2}\sigma^2$。求 $\hat{r}=\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24}r_i$ 的误差。忽略遗漏年末半个月项，这种方法与普通方法给出同样的结果。

第9章

1. 108 610 美元。

3. $a(x)$

5. $a=(A'-B')/[U(A')-U(B')]$,
   $b=[B'U(A')-A'U(B')]/[U(A')-U(B')]$。

7. $C=(3+e)^2/16$，$e=4\sqrt{C}-3$。

9. $b'=b/W$

11. 1 500 美元。

13. 由提示：$\overline{R}_i-R=cW[E(R_M,R_i)-\overline{R}_MR]=cW[\mathrm{cov}(R_M,R_i)+\overline{R}_M(\overline{R}_i-R)]$。这意味着 $\overline{R}_i-R=\gamma\mathrm{cov}(R_M, R_i)$ 对某些 γ 成立。应用于 R_M 解出 γ。

15. $P=E\left(\frac{d}{R^*}\right)=E\left(\frac{Rd}{RR^*}\right)=\frac{1}{R}E\left(\frac{Rd}{R^*}\right)=\frac{\hat{E}(d)}{R}$。

第10章

1. 442.02 美元。

3.5%。

5. 时间 $t=0$ 时没有现金流。时间 T 的现金流是 $S/d(0, M)+\sum_{k=0}^{M-1}c(k)/d(k,M)-F$，它一定等于 0。

7. −100.34 美元。

9. (a)$V_{i-1}(r_i)=1-d(i-1,i)$；(b)$V_0(r_i)=d(0,i-1)-d(0,i)$；(c)$1-d(0,M)$。

11. (a) 3.971 百万美元；(b) 8.64%。

13. −131 250lb 橙汁；$\sigma_{new}=0.714\sigma_{old}$。

487 15. 卖空 163 200 美元国债期货。

17. 证明以 $\text{cov}(x,y^2)=E(xy^2)-E(xy)E(y)=0$ 为基础。$E(xy^2)$ 和 $E(y)$ 都是零对称的。

第 11 章

1. 假定 Δt 小，$p=0.65$，$u=1.106$，$d=0.905$；没有小 Δt 的近似，$p=0.643\ 67$，$u=1.110\ 05$，$d=0.900\ 86$。节点的概率（从上面开始用小近似）是 0.179，0.384，0.311，0.111，0.015。

3. (a) 利用 $(v_1-v_2)^2\geqslant 0$；(b) 15%和 9.54%；(c) 算术平均用单利，几何平均用复利。通常几何平均是最好的。

5. $\text{var}(u)=e^{2\bar{w}+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$。

7. $dG=\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{8}b^2\right)Gdt+\frac{1}{2}bGdz$。

9. 展开到一阶，两个都有期望值 $S(t_{k+1})=(1+\mu\Delta t)S(t_k)$。

第 12 章

1. 成本是非负的。

3. 如果 $S\geqslant K$，$Q=(S-K)-0+K=S$。同样，如果 $S\leqslant K$，$Q=0-(K-S)+K=S$。

5. 2.83 美式美元，2.51 欧式美元。

7. 当 $T\to\infty$ 时，$C(S,\ T)\geqslant\max[0,\ S-KB(T)]\to S$。显然，$C(S,\ T)\leqslant S$。因此，取极限时 $C=S$。

9. 7 美元。

11. 报价接近：低大约 0.3%。

13. 几乎相等！一个月间隔：4.801 美元；半个月间隔：4.796 美元。

15. 6.73 美元。

第 13 章

1. 2.57 美元。

3. $\sigma=0.251$。

5. $C(63)=6.557$ 美元，$\Delta=0.759$，$\Theta=6.02$。

7. $\Gamma=\frac{\partial\Delta}{\partial S}=\frac{\partial N(d_1)}{\partial S}=N'(d_1)\ \frac{\partial d_1}{\partial S}=\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$。对 Θ 应用 Γ 和练习 6。

9. $a=-\mathrm{cov}(x,\ y)\ /\mathrm{var}(y)$。

11. (a) 0.53 美元；(b) 2.04 美元。

13. 42.42 百万美元。

第 14 章 488

1. (a) 91.72；(b) 90.95

3. 在期货价格网格上作后推计算定价。

5. 6.00%、6.15%、6.29%、6.44%、6.59%、6.74%、6.89%、7.05%、7.19%、7.35%。

7. 从 a_0 到 a_5 分别是 7.67、8.829、9.799、10.66、11.3、11.93。

9. 162 800 美元。

11. $F(t)=r-\frac{1}{2}at+\frac{1}{6}\sigma^2t^2$。

第 15 章

1. $\gamma=\frac{1}{4}$。

3. $\max\left\{\frac{1}{2}\ln[2\alpha+(1-\alpha)]+\frac{1}{2}\ln[\alpha/2+(1-\alpha)]\right\}$得出 $\alpha=\frac{1}{2}$。

5. (a) 对 $k<n$，$\alpha_k=p_k-p_n r_n/r_k$；(b) $\alpha_1=\frac{5}{18}$，$\alpha_2=0$，$\alpha_3=\frac{1}{18}$。

7. 道·琼斯平均价格指数比率超过琼斯的股票比率。

9. (a) 条件是

$$E\left(\frac{r_i-r_f}{1+r_0}\right)=0\text{，或者 }E(r_iP_0)-r_fE(P_0)=0\text{，}$$

或者 $\mathrm{cov}(r_i, P_0)+\bar{r}_iE(P_0)=0$ 或者 $\bar{r}_i-r_f=-\frac{\mathrm{cov}(r_i, P_0)}{E(P_0)}$。

(b) 我们有

$$(\mu_i-r_f)\Delta t=-\frac{\mathrm{cov}[n_i\sqrt{\Delta t}, 1/(1+\mu_0\Delta t+n_0\sqrt{\Delta t})]}{E[1/(1+\mu_0\Delta t+n_0\sqrt{\Delta t})]}$$

展开到一阶为 $(\mu_i-r_f)\Delta t=\sigma_{i,0}\Delta t$。

第 16 章

1. (a) 是，利用组合权数$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$得到无风险收益 1.2；(b) 是，利用权数$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$。

3. (a) 和 (b) 为 0.867 8 美元。

5. $q_{11}=0.1$，$q_{12}=0.36$，$q_{21}=0.4$，$q_{22}=0.14$。

7. $S=16.81$ 美元，$\sigma=20.6\%$。

9. 确定性等价差 370.74 美元偏好汽车 B。

11. $V_1=\frac{E(x_{2|1})}{1+r+\beta_2(\bar{r}_2-r)}$，$\beta_2=\frac{\mathrm{cov}(x_{2|1}/V_1, r_2)}{\sigma_{r_2}^2}$。

【注释】

[1] 这些答案的编辑是许多热心的人大量工作的结果。我们不能保证没有错误。请将错误答案通知作者。

索引

A

Accrued interest, 51, 67 应计利息

Additive model, 299—300 可加模型

Adjustable-rate mortgage, 44, 392—395 可调节利率的抵押贷款

American option, 320 美式期权

Amortization, 47 摊销

Annual worth, 49, 69 年价值

Annuity, 44, 45—47, 133 年金

Antithetic variable, 364 对偶变量

APR, 47—48 年度百分比收益率

Arbitrage, 4, 446 套利

  type A, 240—241 A型

  type B, 241—242 B型

Arbitrage argument, 78, 388 套利论据

Arbitrage Pricing Theory (APT), 207—211, 223 套利定价理论

  and CAPM, 211 资本资产定价理论

Arc, 111 弧

Aristotle, 319 亚里士多德

Arrow-Pratt coefficient, 233 阿罗-普拉特系数

As you like it option, 349, 369 只要你喜欢期权

Asian option, 369—370 亚洲期权

Ask price, 51 要价

Asset, 137, 445—446 资产

At the money, 323 平价期权

B

Backward equation，408—409 后推方程
Backwardation，282 交割延迟费
Balloon payment，44 期末大笔支付
Banker's acceptance，42 银行未兑汇票
Benefit-cost ratio，104 收益—成本比率
Bermudan option，368 百慕大期权
Beta，179—181 贝塔
Beta book，218—219 贝塔表
Betting wheel，148，171 轮赌盘
Bid price，51 买价
Binomial coefficient，314 二项式系数
Binomial lattice，113 二项式网格
  for interest rates，385—389 用于利率的
  model of stock prices，297—299，313—315 用于股价模型的
  for options，366—368 用于期权的
Binomial options theory，327—337，346 二项式期权理论
Binomial tree，111 二叉树
Biweekly mortgage，68 双周的抵押
Black-Derman-Toy model，400，407，413 Black-Derman-Toy 模型
Black and Karasinski model，407 Black and Karasinski 模型
Black-Scholes equation，350，351—355，376—377 布莱克－斯科尔斯方程式
  and log-optimal pricing，438—440 对数最优定价
Black-Scholes formula，355—356 布莱克－斯科尔斯公式
Blur 模糊
  of a，218 a 的
  of history，212 历史的
  of mean，214—216，223 均值的
Bond，49—66，383 债券
  accrued interest，51 应计利息
  callable，68，383 可赎回的
  coupon payments，50 息票的支付
  derivatives，389 衍生品
  face value，50 面值
  futures，383 期货
  long or short，57 长期或短期
  options，383 期权
  par，50 平价
  price formula，53 价格公式
  price sensitivity，60—61 价格敏感度
  price-yield curve，53—57 价格－收益曲线
  putable，383 可赎回的
  quality of，51—52 质量
  yield，52—57 收益
  zero coupon，43，61 零息票
Branch，111 分支
Brownian motion，306—308 布朗运动
Bull spread，346 牛市基差
Butterfly spread，325 蝶形价差
Buying price，463—468 买入价格

C

Calculus，479—483 微积分
Call，319 买入期权
  Black-Scholes formula，355—356 布莱克－斯科尔斯公式
  perpetual，348 永久的
Callable bond，43，68 可赎回债券
Capital asset pricing model（CAPM），173—

196，192—193，196—197，253 资本资产定价模型
and APT，211 套利定价模型
certainty equivalent form，188—190 确定性等价
derivation，194 求导
as factor model，205—207 作为因素模型
formula and derivation，177—178 公式和求导
pricing form，187—190 定价形式
Capital budgeting，103—108 资本预算
Capital market line，175—177 资本市场线
Capitalization weights，174 资本化权重
Carrying charges，291—292，371—373 持仓费用
Cash flow，1—3 现金流
free，126—128 自由现金流
in graphs，113—114 在图表中
Cash flow stream，1—3 现金流序列
Cash matching，108—111 现金匹配
Certainty equivalent，188—190，233—234，253，254，464—469 确定性等价
Certificate of Deposit (CD)，41 存单
Characteristic line (or equation)，205—207 特征线（或特征方程）
Collateralized mortgage obligations (CMOs)，402—406 担保抵押债券
Commercial paper，41 商业票据
Comparison principle，3—4，77 比较原则
Complexico gold mine，119—121，132，339—340，349，473 科普莱克斯可金矿
Compound interest，14—16 复利
Concave functions，231—232 凹函数
Contango，282 交易延迟费
Continuco gold mine，470—471，474 康蒂纽科金矿
Control variate，364，379—380 控制变量
Convergence，of futures prices，278 期货价格的收敛
Convexity，65—66，70 凸度
Corporate bonds，43 公司债券
Correlation coefficient，145 相关系数
Cost of carry，269—272 持仓费用
Coupon payments，50 息票的支付
Covariance，144—145，476 协方差
continuous time，428 连续时间
matrix，164 矩阵
Cox，Ingersoll，Ross model，407 Cox，Ingersoll，Ross 模型
Curse of dimensionality，114 指数型增长
Cycle problems，29—30，68 周期问题

D

Debt subordination，43 债务附属化
Default，41，51—52，473 违约
Delta，358—359 得尔塔
Delta property，464 得尔塔性质
Demand deposit，41 活期存款
Derivative (calculus)，480—481 求导（微积分）
Derivative security，9，263—264 衍生证券
synthetic，360 虚拟的
Digital option，369 数字期权
Discount factor，18，74—76，85 贴现因子
Discounting，18 贴现
Diversifiable risk，201 可分散风险

Diversification，151—153 分散化
Dividend，371—373 股利
discount model，124—125 贴现模型
and options，335，347 和期权
process，445 分布过程
Dollars，32 美元
Double lattice，452—458 双网格
Dow Jones Average，442 道琼斯平均指数
Down and outer option，370 下跌和出局期权
Drift，398 漂移
Duration，57—62，91—94，67，71 久期
Fisher-Weil，91—93 费雪-韦尔
modified，60，67 修正的
quasi-modified，93 准修正的
Dynamic model，111 动态模型
Dynamic programming，111，129，134 动态规划
running，115—121 连续
Dynamics，5 动态
for interest rates，406—408 利率方面的
of several stocks，428 几种股票的

E

Early exercise，327，332—333 提前执行
Effective interest rate，15 有效利率
Efficient frontier，157，167—168 有效边界
continuous time，430—435 连续时间
Elementary prices，396—397 初级价格
Equal and opposite hedge，282 相等而反向的套期
Equilibrium，175 均衡
Equivalent utility functions，230—231 等效用函数
Estimation 估计
of mean，214—216，223 均值的
of sigma，217，223 西格马的
Eurodollar，42 欧洲美元
European option，320 欧式期权
Excess return，179 超额收益
Exercise，319 执行
early，327，332—333 提前
Exotic options，368—370 特异性期权
Expectations dynamics，83—90，96—97，278—279，291 预期动态
Expectations theory，81—82，96—97 预期理论
Expected excess return，179 期望超额收益
Expected value，142，476 期望值
Exponential growth，16 指数式增长
Exponential utility，229 指数效用
and certainty equivalent，464—468 和确定性等价

F

Factor loading，199 因数载荷
Factor model，198—207，223 因素模型
and CAPM，205—207 和资本资产定价模型
multifactor，203—204 多因素
single-factor，198—203 单因素
Fallacy（of multi-period CAPM），221—222，227 谬论（多期资本资产定价模型的）
Fama-French study，437—438 法马-弗伦奇研究
Feasible region，155—157 可行性区域
continuous time，430—435 连续时间

Financial instrument, 40 金融工具
Finite state model, 247—251 有限状态模型
Finite-difference method, 364—366 有限差分方法
Firm valuation, 124—128 公司估价
Fisher-Weil duration, 91—93 费雪－韦尔久期
Fixed-income securities, 40—67 固定收益证券
Fixed-proportions strategy, 418 固定比例策略
Floating rate bonds, 90—91 浮动利率债券
Forward contract, 263, 264—273 远期合约
Forward equation, 395—397 前推方程
Forward market, 265 远期市场
Forward price, 265, 266—272 远期价格
Forward rates, 77—80 远期利率
Forward value, 273, 274 远期价值
Forwards, on interest rates, 389—391 利率远期
Free cash flow, 126—128 自由现金流
Function, 479 函数
Future value, 19—20 终值
Futures contract, 275—282, 335—336 期货合同
  on interest rates, 389—391 关于利率的
Futures-forward equivalence, 278—281, 390—391 期货－远期等价
Futures market, 276—277 期货市场
Futures options, 335—337 期货期权

G

Gamma, 359 伽马 (γ)
Gaussian random variable, 476—477 高斯随机变量
Generalized Weiner process, 307—308 广义维纳过程
Geometric Brownian motion, 309, 310 几何布朗运动
Geometric growth, 14 几何增长
Geometric mean, 316 几何均值
Gold mine 金矿
  Complexico, 119—121, 132, 339—340, 349, 473 科普莱科斯可
  Continuco, 470—471, 474 康蒂纽科
  Simplico, 28, 76, 337—339, 341—343, 349, 456—457 辛普利可简单型
Gordon formula, 125 戈登公式
Graph, 111 图表
  for assets, 445 资产的
Growth efficiency proposition, 427 增长有效性命题

H

HARA utility, 256 超绝对风险厌恶效用
Harmony theorem, 121—124, 133, 191—192 一致性定理
Heath, Jarrow, Morton model, 413 希思，贾罗·默顿模型
Hedge, 7, 282—290 套期保值
  minimum-variance, 283—286 最小方差
  nonlinear, 287—290 非线性
  optimal, 285—287 最优
  perfect, 282 完美
Ho-Lee model, 398—400, 407, 413 Hoo-Lee 模型

Hull and White model, 407 Hull and White 模型

I

Ideal bank, 19, 21 理想的银行
Idiosyncratic risk, 182 异质风险
Immunization, 62 — 66, 67, 71, 94 — 96, 294, 400—402 免疫
In the money, 323 实值
Independence, 144 独立性
Index fund, 183 指数基金
Inflation, 32—34 通货膨胀
Information, 220—221 信息
Intercept, 199 截距
Interest, 13—34 利息
  compound, 14 复利
  effective, 15 有效
  nominal, 15, 32 名义
  real, 32 实际
  simple, 13 单利
Interest rate caps, 383—384 利率上限
Interest rate derivatives, 382—411 利率衍生品
Internal rate of return, 22—24 内部收益率
  main theorem, 23 主定理
Invariance theorem, 87—88 不变性定理
Inverted yield curve, 72 倒置的收益率曲线
Investment science, 1, 3 投资学
Investment wheel, 417—419, 423—425, 441, 442 投资轮盘
Ito process, 307—308 伊藤过程
Ito's lemma, 312—313 伊藤引理

J

Jensen's index, 186 詹森指数

K

Kelly rule of betting, 421, 443 凯利赌博规则
Knockout option, 369, 370 敲出期权

L

Lagrange multipliers, 158, 482 拉格朗日乘数
Lagrangian, 158 拉格朗日函数
Lattice 网格
  binomial, 113 二项式
  trinomial, 131 三项式
Law of large numbers, 420 大数定律
LEAPS, 369 长期权益预期证券
Leveling, 391—395 校准
LIBOR, 264, 383 伦敦银行间同业拆放贷款利率
Limits, 480 限额
Linear pricing, 188—190, 240—242, 343—344 线性定价
Liquidity preference, 82, 101 流动性偏好
Logarithmic utility, 229, 254, 419 对数效用
Lognormal 对数正态
  prices, 301—303, 309 价格
  random variables, 304—305, 477—478 随机变量
Log-optimal portfolio, 432 对数—最优组合
Log-optimal pricing, 245—247, 253 对数—最优定价
  and Black-Scholes equation, 438—440 布莱克－斯科尔斯方程式
  discrete time, 443 离散时间
  formula (LOPF), 435—438 公式（LOPF）
  of option, 450 期权

Log-optimal strategy, 425 对数—最优策略
Long bond, 57 长期债券
Long position, 265 多头头寸
Lookback option, 369 回望期权

M

Macaulay duration, 57—62 麦考雷久期
Margin, 320 保证金
Margin account, 276 保证金账户
Margin call, 277 保证金催缴通知
Market portfolio, 174 市场投资组合
Market segmentation, 82—83 市场分割
Market uncertainty, 458—463 市场不确定性
Marking to market, 276 盯住市场
Markowitz problem, 157—162, 169, 172 马克维茨问题
Martingale, 373—375 鞅
Mean, 142 均值
Mean blur, 214—216 均值模糊
Mean reversion, 407 均值回复
Mean-variance theory, 137—170 均值—方差理论
Minimum-variance hedge, 283—286 最小方差套期
Minimum-variance point, 156 最小方差点
Minimum-variance set, 156 最小方差集
Modified duration, 60 修正久期
Money market, 17, 41, 71 货币市场
Monte Carlo simulation, 363—364 蒙特卡罗模拟
Mortgage, 43—44 抵押贷款
  adjustable rate, 44 可调整利率的
  biweekly, 68 双周的
Mortgage-backed security, 44, 383 抵押担保证券
Multiperiod fallacy, 221—222 多期谬误
Multiperiod securities, 444—447 多期证券
Multiplicative model, 300—303 倍数模型
Municipal bonds, 43 市政债券
Mutual fund, 163 共同基金

N

Net present value, 25 净现值
Newton's method, 35 牛顿方法
No arbitrage, 4, 388 无套利
Nominal interest, 15 名义利率
Nondiversifiable risk, 201 不可分散风险
Nonlinear risk, 287—290 非线性风险
Nonsatiation, 157 非饱和的
Nonsystematic risk, 182—183 非系统风险
Normal random variable, 217, 239—240, 476—477 正态随机变量
  prices, 300 价格
Notional principal, 273 名义本金

O

One-fund theorem, 166—168 单基金定理
Optimal hedging, 285—287 最优套期
Optimal management, 114—121 最优管理
Optimal portfolio growth, 417—440 最优资产组合成长
Optimal pricing, 448—452 最优定价
Optimization, 102 最优化
  conditions, 481—482 条件
  portfolio, 108 资产组合
Option, 263, 319—346, 351—377 期权

American, 320 美式
call, 319 看涨期权
European, 320 欧式
exercise, 319, 327, 332—333 执行
exotic, 368—370 特异
on futures, 335—337 期货
pay later, 380 后付
premium, 319 溢价
put, 319 看跌期权
strike price, 320 执行价格
Out of the money, 323 虚值

P

Par, 50, 55 平价
Path dependent, 371 路径依赖
Pay later option, 380 后付期权
Perfect hedge, 282 完美套期
Performance evaluation, 184—187 业绩评价
Perpetual annuity (perpetuity), 435 永续年金
Perpetual call, 348, 353 永久看涨期权
Perpetual put, 378 永久看跌期权
Plain vanilla swap, 273 普通香子兰互换
Portfolio choice theorem, 242—243 投资组合选择定理
Portfolio diagram, 153—155 资产组合图
Portfolio insurance, 362 组合保险
Portfolio pricing theorem, 244 投资组合定价定理
Positive state prices, 249—251, 257 正状态价格
Power utility function, 230 幂效用函数
Premium, 7 保险费
call, 319 看涨
Present value, 18—22 现值
main theorem, 22 主要定理
net, 25 净
Present worth, 25 现在价值
Price process, 445 定价过程
Price of risk, 176 风险的价格
Price sensitivity, 60, 67 价格敏感度
Price-yield curve, 53—57 价格—收益曲线
Pricing form of CAPM, 187—190 资本资产定价模型的定价形式
Principal, 13 本金
notional, 273 名义的
Principal component, 225 本金构成
Private uncertainty, 458—463 个体不确定性
Probability, 475—478 概率
density, 142, 475 密度
distribution, 475 分布
Put, 319, 333—334 看跌
perpetual, 378 永久的
Put-call, parity, 325—326, 346, 347 看涨—看跌平价

Q

Quadratic program, 161 二次规划
Quadratic utility, 230 二次效用
and mean-variance criterion, 237—239 和均值—方差标准
Quasi-modified duration, 93 半修正久期

R

Random variables, 141, 475 随机变量
independent, 144 独立
Random walk, 305—307 随机游走

Rapido oil well，460—463，468 拉彼多油井
Rate of return，138 回报率
Ratio theorem，455 比率定理
Real options，337—343 实物期权
Rebalance，65，359 再平衡
Rendleman and Bartter model，406 Rendleman and Bartter 模型
Replication，360—362 复制
Repo rate，269 回购利率
Return，138 收益
 asset，137—141 资产
 portfolio，140 组合
Rsik 风险
 diversifiable，201 可分散的
 nonlinear，287—290 非线性的
 systematic，201 系统性的
Risk aversion，5，157，231—234 风险厌恶
 coefficient，233，256 系数
Risk-free asset，165 无风险资产
 short term，446—447 短期
Risk-neutral pricing，251—252，253，255，344—345，357，409，447—448 风险中性定价
Risk-neutral probabilities，251—252 风险中性概率
 existence of，448 存在
 for options，329 期权
Risk-neutral utility，229 风险中性效用
Risk-neutral world，469—471 风险中性世界
Running amortization，48 连续摊销
Running dynamic programming，115—121 连续动态规划
Running present value，88—90 连续现值

S

Security，40 证券
Security market line，181—183 证券市场线
Self-financing，360 自融资
Seven-ten rule，15 七一十规划
Seventy-two rule，15，34，35 七十一二规划
Sharpe index，187 夏普指数
Short bond，57 短期债券
Short position，265 空头头寸
Short rate，85—86，385 短期利率
 lattice，385—389 网格
Short sales，138 卖空交易
Shorting，138 卖空
Short-term risk-free rate，446—447 短期无风险利率
Simple interest，13 单利
Simplico gold mine，28，76，337—339，341—343，349，456—457 辛普利可金矿
Simulation，311—312 模拟
Sinking fund，43 偿债基金
Specific risk，182 特别风险
Spot market，265 现货市场
Spot price，expected，281—282 现货价格，预期
Spot rate，73—77，96 即期利率
 curve，74 曲线
 forecasts，83—85 预测
Standard deviation，143 标准差
State graph，444—447 状态图
State prices 状态价格
 elementary，248 基本的
 positive，249—251 正的
Stationary process，419 平稳过程

Storage costs, 371－373, 291－292 存货成本
Strike price, 320 执行价格
Swaps, 273 275, 384, 411 412 掉期
Swaptions, 384, 412 互换期权
Synthetic derivative, 360 合成衍生产品
Systematic risk, 181－183, 201 系统风险

T

Taxes, 30－32 税收
Term structure, 72－97, 386－388, 397－400 期限结构
  explanations, 80－83, 96, 101 解释
Theorem 定理
  CAPM, 177－178 资本资产定价
  equivalence, 87 等价
  existence of probabilities, 448 概率的存在
  floating rate, 91 浮动利率
forward price, 267, 269 远期价格
  futures-forward equivalence, 278－279 期货—远期等价
  growth efficiency proposition, 427 成长效率命题
  harmony, 124, 133, 191－192 一致性
  Ito's lemma, 312－313, 318 伊滕引理
  log-optimal pricing, 245－247 对数—最优定价
  one fund, 167 单基金
  portfolio choice, 242－243 投资组合选择
  portfolio pricing, 244 投资组合定价
  positive state prices, 249－250, 257 正状态价格
  present value, 22 现值
  ratio, 455 比率
  simple APT, 209 简单套利定价理论
  two fund, 163, 431 双基金
Theta, 359 西塔 (θ) 参数
Tight markets, 271－272 紧致市场
Tilting, 220－221, 226－227 偏离
Time value of money, 13, 34 货币的时间价值
Total return, 138 总收益
Tracking, 171 跟踪
Trading strategy, 446 交易策略
Tree cutting, 25, 26, 349, 458－460, 466－468 伐木
Trinomial lattice, 131 三项式网格
  for options, 366－368 期权
Two-fund theorem, 162－165, 431 两基金定理
Type A arbitrage, 240－241 A 型套利
Type B arbitrage, 241－242 B 型套利

U

U. S. Treasury securities, 42 美国短期国债
Uncorrelated, 145 不相关
Underlying security, 264 标的证券
Utility functions, 228－240 效用函数
  concave, 231－232 凹性
  equivalent, 230－231 等价
  exponential, 229 指数
  logarithmic, 229, 254, 419 对数
  and mean-variance criterion, 237－240 和均值—方差准则
  power, 230 幂
  quadratic, 230 二次

specification of，234—237 特征

V

Valuation of firm，124—128 公司估价

Variance，143，476 方差

Variance reduction，364 方差缩减

Vasicek model，407 Vasicek 模型

Volatility parameter，398 波动参数

Volatility pumping，422—425，429—430 波动泵吸

W

Weights，140 权重

capitalization，174 资本化

Weiner process，305—308，318 维纳过程

of fortune，146 财富

investment，417—419，423—425，441，442 投资

When to cut a tree，25，26，458—459，466—467 何时伐木

Write and option，320 开立期权

Y

Yield，52—57 收益

Yield curve，72 收益率曲线

inverted，72 逆向

Z

Zero-beta asset，194，196 零—贝塔资产